

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben
von
Emil Lampe.

Band XX.
Jahrgang 1888.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1891.

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört. Einige periodische Schriften, in welchen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Citat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4°. XI, XII.

Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, A. Cornu, E. Mascart, A. Potier. Paris. Au Bureau du Journal de Physique. 8°. (2) VII.

American J.: American Journal of Mathematics. Editor S. Newcomb, Associate Editor Th. Craig. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4°. X, XI.

Amst. Versl. en Meded.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. (3) V.

Annali di Mat.: Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi colla cooperazione dei professori: L. Cremona, E. Beltrami, E. Betti, F. Casorati. Milano. 4°. (2) XV, XVI.

Annals of Math.: Annals of Mathematics. Ormond Stone, editor. William M. Thornton, associate editor. Office of publication: University of Virginia. B. Westermann and Co. New-York. 4°. IV.

Ann. d. Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Chevreul, Berthelot etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. (6) XIII, XIV, XV.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°. (3) V.

Arch. f. Art.: Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des Deutschen Reichsheeres. Redaction: Schröder, Meinardus. Berlin. Mittler u. Sohn. 8°. XCV.

Arch. Néerl: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem et rédigées par J. Bosscha etc. Harlem. 8°. XXIII.

Ass. Franç.: Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 17me session (Congrès d'Oran). Paris au secrétariat de l'association et chez G. Masson. 8°.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher. Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaft herausg. von A. Krüger. Kiel. 4°. CXVIII, CXIX; No. 2809-2857.

Astr. Viertschr.: Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, H. Seeliger. Leipzig. W. Engelmann. 8°. XXII.

Atti d. Acc. Pont.: Atti dell' Accademia Pontaniana. Roma. XVII, XVIII.

Batt. G.: Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8° XXVI.

Belg. Bull.: Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°. (3) XV, XVI.

Belg. Mém. C.: Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in 8°. Bruxelles. F. Hayez. XLI.

Belg. Mém. S. É.: Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez. 4°. XLIX.

Berl. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1888.

Berl. phys. Ges. Verh.: Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin. G. Reimer. 8°. VII.

Bern Mitt.: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1888. Bern. Huber u. Co. 8°.

Besso Per. mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario diretto da D. Besso. Roma. 8°. III.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, herausgegeben von G. Eneström. Stockholm. (2) II.

Böklen Mitt.: Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen herausgegeben von Dr. O. Böklen. Tübingen. Fr. Fues. 8°. I, II.

Bologna Mem.: Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (4) VII-IX.

Bologna Rend.: Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 8°. 1887-88.

Bonc. Bull.: Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°. XX.

Bord. Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. (3) IV.

Brit. Ass. Rep.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°.

Brux. Ann.: Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publiées aux frais de l'État. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Brux. S. sc.: Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.). XII, XIII.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. VI.

Cambr. Trans.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.

Casop.: Casopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch.) XVII.

Centralb. d. Bauverw.: Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin und K. Schäfer. Berlin. Ernst u. Korn. 4°. VIII.

Chark. Ges.. Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.) XVIII u. (2) I.

Civiling.: Der Civilingenieur. Organ des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Unter Mitwirkung etc. herausgegeben von Dr. E. Hartig. Leipzig. Arthur Felix. 4°. (2) XXXIV.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. CVI, CVII.

Darb. Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Tannery avec la collaboration de MM. André, Battaglini etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. (2) XII.

Delft Ann. d. l'Éc. Polyt.: Annales de l'École Polytechnique de Delft. Leiden. E. J. Brill. IV.

Dorpat. Naturforscher Ges. Ber.: Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat. Dorpat. 8°.

Dublin Proc.: Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin. (3) I.

Dublin Trans.: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. XXIX.

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 8°. VI.

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. XV.

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°.

Ed. Times: Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. Francis Hodgson. XLVIII, XLIX.

Erlang. Ber.: Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Erlangen. 8°.

Exner Rep.: Repertorium der Physik herausgegeben von Exner. München und Leipzig. gr. 8°. XXIV.

Flammarion, Rev. d'Astr.: L'Astronomie. Revue d'astronomie populaire, de météorologie et de physique du globe, exposant les progrès de la science pendant l'année. Paris. Gauthier-Villars et Fils. gr. 8°. VII.

Génie civ.: Le Génie civil. Revue générale hebdomadaire des industries françaises et étrangères. Paris. XI.

Genova G.: Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova. 8°. 1888.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°. XXXIV.

Gött. N.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. Göttingen. 8°. 1888.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft. Hamburg. 8°. I.

Hannov. Zeitschr.: Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, redigirt von Keck. Hannover. Schmorl u. Seefeld. 4°. XXXIV.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. Teubner. 8°. XIX.

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig C. A. Koch. 8°. (2) VI, VII.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars. 4°.

J. de Math. élém.: Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du Gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de de Longchamps, Lucien Lévy. Paris. Delagrave. 8°. (3) II.

J. de Math. spéc.: Journal de Mathématiques spéciales à l'usage des canditats aux Écoles Polytechnique, Normale et Centrale, publié sous la direction de de Longchamps, Lucien Lévy. Paris. Delagrave. 8°. (3) II.

J. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass. Berlin. G. Reimer. 4°. CII, CIII, CIV.

Jordan Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Unter Mitwirkung von C. Steppes und R. Gerke herausgegeben von W. Jordan. Stuttgart. 8°. XVII.

Journ. de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville. Publié par C. Jordan avec la collaboration de G. Halphen, M. Lévy, A. Mannheim, É. Picard, H. Poincaré, H. Resal. Paris. 4°. (4) IV.

Journ. d. Wegebau-Minist.: Journal des Wegebau-Ministeriums. St. Petersburg. (Russisch.)

Kasan Ber.: Sitzungsberichte der mathematischen Section des Naturforschenden Vereins zu Kasan. (Russisch.)

Kasan Ges.: Sammlung der Mitteilungen der physikalisch-mathematischen Gesellschaft zu Kasan. (Russisch.) VI.

Kasan Nachr.: Nachr. der Kaiserlichen Universität zu Kasan.

Kiew Nachr.: Nachrichten der Kaiserlichen Universität zu Kiew. (Russisch.)

Kjob. Skrift.: Schriften der Kopenhagener Akademie. Kopenhagen. (6) II.

Kopenh. Overs.: Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. Kopenhagen.

Krak. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Krakauer Akademie. Krakau. (Polnisch.) XVIII.

Krak. Denkschr.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.) XIV.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 4°. XIV.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 8°. XL.

Leopold. Akad.: Verhandlungen der Kais. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle. gr. 4°. LII.

Liège Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. Bruxelles. Hayez. (2) XIV, XV.

Lisb. J.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa. XII.

Lisb. Mem.: Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) XXI.

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°. XIX.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. CLXXIX.

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8° XLIII, XLIV, XLV.

Lund Årsskr.: Acta universitatis Lundensis. Lunds Universitets Årsskrift. Lund.

Manchester Mem. and Proc.: Memoirs and Proceedings of the literary and philosophical Society of Manchester. Manchester. (4) I.

Mar. J.: Marine Journal. (Russisch.) 1888.

Math. Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. VonderMühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein, W. Dyck und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°. XXXI, XXXII, XXXIII.

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. Hoste; Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. VIII.

Math. naturw. Ber. Ung. Siehe *Ungar. Ber.*

Mém. Sav. Étr.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. 4°. (2) XXIX.

Mess.: The Messenger of Mathematics, edited by C. Taylor and J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan and Co. 8°. (2) XVII, XVIII.

Met. Zeitschr.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der Oestreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigirt von J. Hann u. W. Koeppen. Berlin. gr. 8°. V.

Mitt. üb. Art. u. Genie: Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Herausgegeben vom K. K. technischen u. administrativen Militär-Comité. Wien. R. v. Waldheim. 8°. XIX.

Modena Mem.: Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Modena. 4°. (2) VI.

Mosk. Math. Samml.: Mathematische Sammlung herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) XIII, XIV.

Mosk. Nachr.: Nachrichten der Moskauer Universität. Moskau. (Russisch.)

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. 4°.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. XVIII.

Nap. Rend.: Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Napoli. 4°. (2) II.

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York. Macmillan and Co. 4°. XXXVI, XXXVII, XXXVIII.

Néerl. Arch.: Siehe *Arch. Néerl.*

Nieuw Arch.: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. Amsterdam. 8°. XV.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. Gerono et Ch. Brisse. Paris. 8°. (3) VII.

Nuovo Cimento: Il Nuovo Cimento. Giornale fondato per la fisica e la chimica da C. Matteucci e R. Piria, continuato per la fisica esperimentale e matematica da E. Betti e R. Felici. Pisa. Salvioni. gr. 8°. (3 XXIII, XXIV.

Odessa Ges.: Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. (Russisch.) VIII.

Odessa Nachr.: Nachrichten von der Universität Odessa. Odessa. (Russisch.)

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Padova.

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. gr. 8°. II.

Paris Soc. Phil.: Siehe *Soc. Philom. Mém.*

Petersb. Abh.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. Petersburg. LVI-LVIII.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and journal of science, by Kane, Thomson, Francis. London. 8°. (5) XXV-XXVII.

Phys. Ges. St. Pet.: Journal der physiko-chemischen Gesellschaft zu St.-Petersburg. XVIII-XX. (Russisch.)

Phys. Math. Wiss.: Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau. (Russisch.)

Pisa Ann.: Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Pisa. 8°. V.

Poske Z.: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach und B. Schwalbe, herausgegeben von F. Poske. Berlin. J. Springer. gr. 8°. I, II.

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc.

Prace mat.-fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. (Mathematische und physikalische Abhandlungen, hrsgb. in Warschau von S. Dickstein, W. Gosiewski, E. u. W. Natanson.) gr. 8°. I.

Prag. Abh.: Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. Selbstverlag der Königl. Böhmischen Gesellschaft. 4°. (7) II.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°. 1888.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by N. M. Ferrers, A. Cayley, J. W. L. Glaisher, A. R. Forsyth. London. 8°. XXII, XXIII.

Rev. d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8°. XXXI, XXXII.

Rev. des qu. sc.: Revue des questions scientifiques. Bruxelles. XXIII, XXIV.

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4°. (4) IV, V.

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Roma 4°. (4) IV. (Zwei Semester, unterschieden als IV_1 und IV_2.)

Rom. Acc. P. d. N. L.: Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. Roma. 4°. XLI, XLII.

Rom. Acc. P. d. N. L. Mem.: Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei. Roma. 4°. I-IV.

Samml. d. Wegebau-Ing.-Inst. zu St. Petersb.: Sammlung des Wegebau-Ingenieur-Instituts zu St. Petersburg. (Russisch.) XIII-XV.

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. Teubner. 8°. XXXIII.

Hl. A.: Historisch-literarische Abteilung (besonders paginirt).

Schweiz. Bauztg.: Revue Polytechnique; Schweizerische Bauzeitung, Wochenschrift für Bau-, Verkehrs- und Maschinentechnik, Organ des Schweizerischen Ingenieur- und Architekten-Vereins etc. Herausgegeben von Waldner. XI, XII.

Sill. J.: The American Journal of science. Editors: J. D. and E. S. Dana.

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. XV, XVI.

Soc. Philom. Mém.: Mémoires publiés par la Société Philomatique à l'occasion du centenaire de sa fondation 1788-1888. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°.

Stockh. Handl.: Handlingar af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens. Stockholm.

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm.

Stockh. Vetensk. Bihang: Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens handlingar. Stockholm. 8°. XIII, XIV.

Techn. Bl.: Technische Blätter, Vierteljahrschrift des deutschen Polytechnischen Vereins in Böhmen, redigirt von Ed. Maiss. Prag. XIX.

Techn. Inst. St. Pet.: Die Mitteilungen des Technologischen Instituts in St.-Petersburg. (Russisch.)

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. IX.

Tokio Math. Ges.: Tokyo sugaku buteurigaku kwai kiji (Zeitschrift der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Tokio. Englisch u. Japanisch.) Tokio. 8°. III.

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. XXIII, XXIV.

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino. 4°. (2) XXXIX.

Toulouse Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la faculté etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°. II.

Toulouse Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse. Douladoure-Privat. 8°. (8) X.

Ungar. Ber.: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ung. Akad. der Wissensch. und der Königl. Ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft hrsg. von Baron R. Eötvös etc. Redig. v. J. Fröhlich. Budapest. 8°. V, VI.

Ups. N. Act.: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Upsala. 4°.

Ven. At.: L'Ateneo Veneto. Rivista mensile di scienze, lettere ed arti diretta da A. S. de Kiriaki e L. Gambari. Venezia. 8°. (12) I, II.

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. (6) V, VI, VII.

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. 4°. Venezia.

Wash. Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington. 8°.

Wiedemann Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. v. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. (2) XXXIII, XXXIV, XXXV, XXXVI.

Wiedemann Beibl.: Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Herausgegeben unter Mitwirkung befreundeter Physiker von G. und E. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°.

Wien. Anz.: Anzeiger der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 8°. 1888.

Wien. Bauztg.: Allgemeine Bauzeitung gegründet von Chr. L. Förster. Redigirt unter Mitwirkung etc. von A. Köstlin. Wien. R. v. Waldheim. Fol.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. XCV-XCVII.

Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 4°.

Wochenbl. für Bauk.: Wochenblatt für Baukunde. Organ der Architekten- u. Ingenieurvereine von Bayern, Elsass-Lothringen, ... Herausgegeben von Fr. Scheck. Berlin. 4°.

W. Oestr. Ing. u. Arch.: Wochenschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Redacteur P. Kortz. Wien. 4°.

Wolf Z.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°. XXXIII.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. J. Springer. Berlin. 4°. XXXII, XXXIII.

Zeuthen T.: Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af J. P. Gram og H. G. Zeuthen. Kopenhagen. 8°. (5) VI.

Z. f. Bauwesen: Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin u. K. Schäfer. Berlin. Ernst u. Korn. 4°. XXXVIII.

Z. Oestr. Ing. u. Arch.: Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereins. Redacteur P. Kortz. Wien. 4°.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

Capitel 2. Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

B. Pädagogik.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

Capitel 2. Theorie der Formen.

Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1. Niedere Arithmetik.

Capitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

B. Theorie der Formen.

Capitel 3. Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

Capitel 3. Integralrechnung.

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Seite

Capitel 7. Variationsrechnung.

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen.

B. Elliptische Functionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen. (Analysis situs).

Capitel 3. Elementare Geometrie. (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

B. Besondere ebene Gebilde.

C. Besondere räumliche Gebilde.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Lehrbücher, Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

B. Theorie der algebraischen Curven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

Seite

Capitel 4. Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

B. Conforme Abbildung.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

B. Hydrostatik.

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

C. Capillarität.

Capitel 2. Akustik und Optik.

A. Akustik.

B. Theoretische Optik.

C. Geometrische Optik.

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Capitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

B. Gastheorie.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

Seite

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Capitel 1. Geodäsie.

Capitel 2. Astronomie.

Capitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

Anhang.

Verzeichnis

der Herren, welche für den zwanzigsten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A. Herr Prof. August in Berlin.
Bb. „ Professor Bobylew in St. Petersburg.
Bk. „ Dr. Buka in Charlottenburg.
Bm. „ Prof. v. Braunmühl in München.
Bx. „ Dr. Bendixson in Stockholm.
Cly. „ Prof. Cayley in Cambridge.
Dn. „ Dickstein in Warschau.
Dz. „ Dr. Dziobek in Charlottenburg.
E. „ Prof. G. Eneström in Stockholm.
E. K. „ Dr. E. Kötter in Berlin.
El. „ Prof. Engel in Leipzig.
F. „ Dr. Faerber in Berlin.
F. K. „ Dr. F. Kötter in Berlin.
G. „ Prof. van Geer in Leiden.
Gbs. „ Assist. Prof. Gibson in Glasgow.
Glr. „ Prof. Glaisher in Cambridge.
Gr. „ Prof. Günther in München.
H. „ Prof. Hoppe in Berlin.
Hk. „ Prof. Hauck in Berlin.
Hr. „ Prof. Hamburger in Berlin.
Ht. „ Dr. Hilbert in Königsberg i. Pr.
Hz. „ Prof. Hurwitz in Königsberg i. Pr.
K. „ Dr. Kobb in Stockholm.
Js. „ Dr. Jolles in Aachen.
Kr. „ Prof. Krazer in Strassburg.
La. „ Prof. Loria in Genua.
Lbg. „ Prof. Lorberg in Bonn.
Lg. Herr Dr. Lange in Berlin.
Lp. „ Prof. Lampe in Berlin.
Ls. „ Lazarus in Hamburg. (†)
M. „ Prof. F. Müller in Berlin.
Mi. „ Dr. Michaelis in Berlin.
Mn. „ Prof. Mansion in Gent.
Ms. „ Dr. Mestschersky in St. Petersburg.
My. „ Prof. F. Meyer in Clausthal.
Mz. „ Dr. Maynz in Ludwigslust.
N. „ Prof. Neumann in Leipzig.
No. „ Prof. Netto in Giessen.
P. „ Dr. Petzold in Hannover.
P. G. „ Dr. P. Günther in Berlin.
R. M. „ Dr. R. Müller in Berlin.
Sbt. „ Dr. Siebert in Gross-Lichterfelde.
Schg. „ Dr. Schlegel in Hagen.
Schn. „ Prof. Schumann in Berlin.
Scht. „ Prof. Schubert in Hamburg.
Sn. „ Dr. P. Simon in Berlin.
St. „ Dr. Stäckel in Halle a. S.
Std. „ Prof. Studnička in Prag.
T. „ Dr. Toeplitz in Breslau.
Tn. „ Prof. Treutlein in Karlsruhe.
Tx. „ Prof. Teixeira in Porto.
V. „ Dr. Valentiner in Kopenhagen.
Vi. „ Dr. Vivanti in Mantua.
Wi. „ Prof. A. Wassilieff in Kasan.
Wn. „ Prof. Wangerin in Halle a. S.
W. St. „ Prof. W. Stahl in Aachen.
Wz. „ Dr. Weltzien in Berlin.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe, Berlin W, Kurfürstenstr. 139.

Erster Abschnitt.
Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.
Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

W. W. Rouse Ball. A short account of the history of Mathematics. London. Macmillan and Co. XXIII + 464 S.

Nach der Absicht des Verfassers soll diese Geschichte für alle Leser verständlich sein, welche nur die Elemente der Mathematik kennen, und bei der Anführung der Resultate ist meistens die neuere Bezeichnungsweise benutzt worden. Wie die Vorrede ausdrücklich hervorhebt, ist daher das Buch vornehmlich eine Compilation aus vorhandenen Werken, und der Entwickelung der Mathematik neuerer Zeit ist eine nur dürftige Behandlung zugefallen. So weit es indes reicht, scheint es uns sorgfältig zu sein und ist ohne Frage sehr interessant. Die erste Periode, zu welcher das Capitel I über die egyptische und phönizische Mathematik die Einleitung bildet, umfasst die Mathematik unter griechischer Führung vom Auftreten des Thales um 600 v. Ch. bis zur Einnahme von Alexandrien durch die Muhamedaner 641 n. Ch. In dieser Periode werden die ionischen und pythagoreischen Schulen besprochen, die Schulen von Athen und Cyzicus, die erste und die zweite Alexandrinische Schule, endlich die

Byzantinische Schule (v. 641-1453) als die Hüterin der Werke der griechischen Mathematiker. In einem besonderen Capitel am Ende dieser Periode werden auch die verschiedenen Systeme der Zahlzeichen betrachtet, welche durch die sogenannten arabischen verdrängt wurden. Die zweite Periode ist die Mathematik im Mittelalter und während der Renaissance. Nach einem Capitel über das Erstarken der Bildung im westlichen Europa folgen andere über die Mathematik der Araber, über die Einführung arabischer mathematischer Werke in Europa, über die Entwickelung der Arithmetik bis zum Jahre 1637, über die Mathematik der Renaissance und beim Ende derselben. Die dritte Periode behandelt die neuere Mathematik unter den Capitel-Ueberschriften: Charakter der neueren Mathematik, Geschichte der Mathematik von Descartes bis Huygens, Leben und Werke Newton's, Leibniz und die Mathematiker der ersten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts, Lagrange, Laplace und ihre Zeitgenossen, endlich die jüngste Zeit. Obgleich dieses letzte Capitel kaum etwas anderes als ein Verzeichnis von Namen ist, so bildet das Buch als Ganzes eine anerkennungswerte Einführung in die Geschichte der Mathematik. Sein Wert wird erhöht durch ein Inhaltsverzeichnis und eine Liste von Werken über die allgemeine Geschichte der Mathematik oder über lange Perioden in jener Geschichte. (Ausführliche Anzeige in Nature XXXIX. 265-268). Gbs. (Lp.)

V. Bobynin. De l'Étude sur l'histoire des mathématiques en Russie. Bibl. Math. (2) II. 103-110.

Der Verfasser berichtet hier über die Entwickelung des mathematisch-historischen Studiums in Russland. Die ersten hierauf bezüglichen Schriften wurden in der ersten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts publicirt. Aber bis auf das letzte Decennium unseres Jahrhunderts waren die Arbeiten über Geschichte der Mathematik in Russland qualitativ und quantitativ unbedeutend; es finden sich darunter fast nur Uebersetzungen deutscher und französischer Werke oder Compilationen ohne Benutzung der Quellen. Während der letzten Jahre hat jedoch in Russland

ein eingehendes Studium der Geschichte der Mathematik begonnen, und eine besondere Zeitschrift für dies Studium ist im Jahre 1885 gegründet. Zwar ist die Anzahl der russischen Forscher auf diesem Gebiete noch sehr klein, aber man darf die Hoffnung hegen, dass sie allmählich grösser werden wird. E.

J. H. Graf. Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Erstes Heft: XVI. Jahrhundert. Bern. K. J. Wyss. 1888. 8°. 82 S. Zweites Heft: XVII. Jahrhundert. Bern u. Basel. K. J. Wyss 1889. 8°. 102 S.

Aus dem genaueren Studium der Leistungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Bern während der ersten hundert Jahre ihres Bestehens (1786-1886) erwuchs dem Verfasser allmählich Absicht und Stoff zu einer ausführlichen Darstellung des oben genannten Gegenstandes für das eine der vier culturellen Hauptcentren der Schweiz. Freilich würde man eine „Geschichte" vergeblich suchen; die zwei Hefte enthalten wesentlich dankenswerte Beiträge zur Geschichte des bernischen Schulwesens, zur Biographie und Würdigung einzelner um mathematische Lehrweise und Schriftstellerei, sowie um bernische Topographie und Kalenderfabrikation, um Landwirthschaft und Natur-, besonders Pflanzen- und Alpenkunde verdiente Männer (Braufels, Aretius, Schöpf, v. Graffenried, Rosius, Rhagor u. a.). Rückblicke auf die Geschichte der Akademie zu Lausanne beenden jedes der Hefte.

Den zwei vorliegenden Heften sollen je zwei weitere, das 18. und 19. Jahrhundert behandelnde folgen. Tn.

Chambers's Encyclopaedia: a dictionary of universal knowledge. London. William and Robert Chambers.

Anzeige in Nature XXXVII. 604. Als Verfasser der Artikel Atomtheorie und Atom werden bzw. Crum-Brown und Tait genannt. Lp.

G. Eneström. Questions 19, 22. Dänische Gesellschaft der Wissenschaften. Question 20. P. Mansion. Question 21. W. W. Beman. Questton 23. Bibl. Math. (2) II. 32, 63-64, 96, 120.

Anfragen über verschiedene Punkte der Geschichte der Mathematik. (Vgl. F. d. M. XIX. 1887. 23).

19) Es wird gefragt, ob irgend ein arabischer oder jüdischer Mathematiker des Mittelalters über den baculus geometricus geschrieben hat.

20) Preisfrage über das Verhältnis zwischen der griechischen und der arabischen Mathematik.

21) Ueber die Anwendung von Buchstaben vor Newton (ohne + oder —), um sowohl positive als negative Grössen zu bezeichnen.

22) Ueber die Formel, welche die Fläche eines sphärischen Dreicks ausdrückt.

23) Ueber die erste Anwendung des Buchstabens *e* für 2,718...

E.

P. Riccardi. Saggio di una Bibliografia Euclidea I. Bologna Mem. (4) 124 S. 4°.

J. L. Heiberg. Euclidis elementa, vol. V der Ausgabe: Euclidis opera omnia ed. Heiberg et Menge. Bibl. Script. Graec. et Roman. Teubneriana. Leipzig 1888. CXIII + 738 S.

Nachdem Heiberg 1880 und 81 in drei Bänden der Teubner'schen Sammlung die sämtlichen Werke Archimeds kritisch gesichtet herausgegeben und mit lateinischer Uebersetzung begleitet hatte, machte er sich in unermüdlicher und gleich dankenswerter treuer Arbeit daran, seit 1883 auch, im Verein mit Menge, die Gesamtwerke Euklids in gleicher Gestalt zu veröffentlichen. In den früheren Bänden dieses Jahrbuches (XV, 2; XVI, 6; XVIII, 4) wurde über die vier ersten Bände dieser Ausgabe berichtet; jetzt liegt der ebenfalls von Heiberg allein bearbeitete fünfte Band vor. Derselbe enthält das sog. 14. und 15. Buch der Elemente

und (S. 69-677) bloss griechisch die aus 12 Handschriften entnommenen, aber von über 50 verschiedenen Händen geschriebenen Scholien zu den 13 Büchern, dann (S. 679ff.) in vier Anhängen weitere neuere Scholien zum 14. und 15. Buch und Lesefrüchte zu den früheren Büchern. Einen wichtigen Bestandtteil des Buches bilden die schon zum 3. und 4. Band versprochen gewesenen „Prolegomena critica", welche in vier Capiteln auf bezw. 28, 25, 22, 16 Seiten davon handeln: 1) Quibus auctoribus de editione Theonis judicari possit, 2) De recensione Theonis, 3) De interpolationibus erroribusque ante Theonem ortis, 4) De Elementorum apud occidentales fatis. Benützung, Ursprung und Alter der Scholien, sowie teilweise frühere Veröffentlichungen derselben zu besprechen behält sich der Verfasser für eine andere Gelegenheit vor. Tn.

S. A. Christensen. Om Ligninger i 10de Bog af Euclids Elementer. Zeuthen T. (5) VI. 161-192.

Der Verfasser hat über das zehnte Buch der Elemente eine Abhandlung geschrieben, welche von der Kopenhagener Universität preisgekrönt ist. Die in der Zeitschrift veröffentlichte Arbeit ist ein Auszug aus derselben.

Es wird nachgewiesen, dass Euclid im zehnten Buch nur solche Irrationalitäten discutirt hat, die bei der Lösung von Gleichungen zweiter und vierter Ordnung vorkommen. V.

R. T. Greek Geometry. Nature XXXVII. 78-79.

Im Anschluss an eine Notiz in Nature XXXIV. 548 über Dr. Allman's „Greek geometry from Thales to Euclid" wird der Anteil erörtert, welcher dem Theaetetus an den Elementen des Euclid zukommt. In den Büchern X und XII hauptsächlich wird sein Einfluss nachgewiesen. Lp.

H. Narducci. Sur l'optique de Claude Ptolémée. Bibl. Math. (2) II. 98-102.

Eine lateinische Uebersetzung der Optik des Ptolemäus ist bekanntlich im Jahre 1885 von Govi herausgegeben, worin der Herausgeber als Einleitung viele bibliographische Notizen über die Arbeit gegeben hat. Zu diesen fügt Herr Narducci in der oben genannten Note die Bemerkung, dass in Krakau ein bisher unbekanntes Manuscript der lateinischen Uebersetzung befindlich ist, das aus dem XIV. Jahrhundert herstammt, und teilt einen unedirten Abschnitt aus Baldi's „Vite de Matematici“ mit, der über die Optik des Ptolemäus handelt. Hieraus geht hervor, dass schon im XVI. Jahrhundert eine Ausgabe der Optik von der Akademie „della Fama“ in Venedig in Aussicht gestellt war. Herr Narducci commentirt dann näher das abgedruckte Bruchstück von Baldi. E.

P. Tannery. Études sur Diophante. IV. Bibl. Math. (2) II. 3-6.

Fortsetzung der im vorigen Jahrgange der Biblioth. Math. (Vgl. F. d. M. XIX. 1887. 6) begonnenen Studien über Diophant. Herr Tannery behandelt hier die unbestimmten algebraischen Aufgaben der drei letzten Bücher von Diophant's Arithmetik, in denen aber keine eigentlich neuen Substitutionsmethoden enthalten sind. Nur das sechste Buch bietet etwas von grösserem Interesse; es handelt sich bekanntlich darum, rationale rechtwinklige Dreiecke zu bestimmen, deren Seiten gewissen Bedingungen genügen. Herr Tannery zeigt, dass die Aufgaben wesentlich dahin reducirt werden können, entweder die Form oder die Scala (échelle) des Dreiecks zu finden. E.

J. S. Mackay. Pappus on the progressions. Edinb. M. S. Proc. VI. 48-58.

Eine Uebersetzung des zweiten Teiles des dritten Buches von Pappus' „Mathematischer Sammlung“. Progression ist als Uebersetzung von μεσότης gebraucht. Gbs. (Lp.)

E. Sachau. Al-Bîrûnî. An account of the religion, philosophy, literature, chronology, astronomy, customs, law, and astrology of India about A. D. 1030. London. Trübner and Co. (1887).

Anzeige in Nature XXXVIII. 97-98. Lp.

M. Steinschneider. Jusuf ben Ibrahim und Ahmed ben Jusuf. Bibl. Math. (2) II. 49-52, 111-117.

Als Einleitung zur Notiz über den Mathematiker Ahmed ben Jusuf giebt Herr Steinschneider Auskunft über den Vater des Ahmed Jusuf ben Ibrahim. Dieser lebte im IX. Jahrhundert in Bagdad, Damaskus und Kahira; unter seinen Schriften werden auch „Erzählungen von den Astronomen" genannt, aber Herr Steinschneider hält es für möglich, dass hier der Vater mit dem Sohne verwechselt ist.

Was den Sohn, Ahmed ben Jusuf, betrifft, so lebte er in Aegypten in der ersten Hälfte des X. Jahrhunderts; als sein Todesjahr giebt Hagi Khalfa 945 an. Herr Steinschneider verzeichnet 9 Schriften von ihm; die erste ist der „Liber de proportionibus", der in einer Handschrift fälschlich dem Ahmed ben Musa zugeschrieben wird. Unter den übrigen Schriften Ahmed's finden sich ein Commentar zum „Centiloquium" des Ptolomäus und ein Aufsatz „De arcubus similibus". E.

M. Cantor. Ahmed und sein Buch über die Proportionen. Bibl. Math. (2) II. 7-9.

Der Verfasser lenkt die Aufmerksamkeit auf ein von Leonardo Pisano citirtes Buch des „Ametus filius" über die Proportionen, worin die sogenannte „figura cata" (d. i. der Satz des Menelaus von den sechs Abschnitten der Dreiecksseiten, die durch eine Transversale geschnitten sind) behandelt ist. Ob dieser „Ametus filius" mit Ahmed ben Musa oder Ahmed ben Jusuf identisch ist, lässt Herr Cantor unbestimmt. Dagegen erklärt er

die Notiz Leonardo's, dass Ahmed 18 verschiedene Anordnungen der „figura cata" aufgestellt hatte, für richtig, indem er bemerkt, dass sie eine Proportion zwischen sechs Grössen angiebt, und zeigt, dass diese Proportion auf 18 verschiedene Weisen geschrieben werden kann. E.

M. Steinschneider. Études sur Zarkali (Appendice). Bonc. Bull. XX. 575-604.

Giebt auf Grund neu aufgefundener Handschriften Verbesserungen und Zufügungen zu den Aufsätzen, welche in Bonc. Bull. XIV, XVI, XVII, XVIII (seit 1881) über den gleichen Gegenstand veröffentlicht sind. Tn.

P. Riccardi. Ancora del trattato „De quadratura circuli" di Giovanni Battista della Porta. Bonc. Bull. XX. 605f.

Bezieht sich auf eine Meinungsverschiedenheit zwischen dem Verfasser und Favaro, Bibliographisches betreffend. Tn.

H. Weissenborn. Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters. Mit 6 Figuren-Tafeln. Berlin. Mayer u. Müller. 1888. VI u. 251 S.

Auf die Kritik der „Geometrie des Boetius" (1879) folgt hier von demselben Verfasser die der „Geometrie Gerberts": diese rühre gar nicht her von Gerbert, sondern bestehe aus „drei weder ein zusammenhängendes und zusammengehöriges Ganzes bildenden noch von einem und demselben Verfasser herrührenden Stücken" — dies ist das Hauptergebnis der Untersuchung, und hiermit geht der Verfasser weit über Olleris und Friedlein hinaus, von welchen jener (1867) die Echtheit der Geometrie bezweifelt, dieser (1867) in ihr drei Teile unterschieden hatte, deren mittlerer noch am ehesten auf Gerbert zurückführbar sei. An diese Hauptuntersuchung reihen sich an, wesentlich um jene zu stützen, drei wesentliche Teiluntersuchungen, die alten Messmethoden und Messinstrumente (S. 96—168), die sog. comple-

mentäre Multiplication (S. 169—208) und endlich das Rechenbrett und das Rechnen bei Gerbert (S. 209—239) behandelnd.

Tn.

G. ENESTRÖM. Sur trois petits traités mathématiques attribués au savant suédois Peder Månsson. Bibl. Math. (2) II. 17-18.

Der schwedische Bischoff Peter Månsson († 1534) hat ein eigenhändiges Manuscript nachgelassen, worin u. a. drei kleine mathematische Aufsätze sich finden. Man hat bisher geglaubt, dass diese von Månsson verfasst sind, aber Herr Eneström weist nach, dass sie nur Excerpte aus der „Margarita philosophica" von Reisch sind.

E.

A. FAVARO. Di alcuni nuovi materiali per lo studio del carteggio di Ticone Brahe e delle sue relazione con Galileo. Ven. Ist. Atti (6) VII. 199-215.

Tycho Brahe wollte seinen Briefwechsel selbst herausgeben in mehreren Bänden; aber nur einer derselben erschien im Jahre 1596. Später wurden dann Briefe von und an Brahe veröffentlicht durch Hansch (1728), Alberi (1851), Frisch (1858—68), Friis (1875 ff.) und Favaro (1886). Neuerdings (1887) hat nun Burckhardt von den in Basel aufbewahrten 40 Briefen an und 90 Briefen von Brahe eine Auswahl herausgegeben; einen der letzteren, an Pinelli am 3. Januar 1600 geschrieben, behandelt nun Favaro genauer ob der darin zu Tage tretenden Beziehungen zu Galilei. Ein Anhang stellt tabellarisch Absender und Adressen, sowie Datum der genannten 40 + 90 Briefe zusammen. Tn.

PH. GILBERT. Les manuscrits de Galilée et leur histoire. Rev. des qu. sc. XXIV. 353-378.

Uebersicht über die bezüglichen neueren Untersuchungen von Berti und A. Favaro.

Mn. (Lp.)

L. Schuster. Johann Kepler und die grossen kirchlichen Streitfragen seiner Zeit. Graz. 250 S. gr. 8°.

C. Le Paige. Sur une traduction néerlandaise de la méthode de perspective de Girard Desargues et sur les „Leçons de ténèbres.“ Bibl. Math. (2) II. 10-12.

Der Verfasser beschreibt eine niederländische Uebersetzung der Arbeit von Bosse: „Manière universelle de Mr. Desargues pour pratiquer la perspective“ und giebt aus dem Briefwechsel zwischen Oldenburg und Leibniz einige wenig bekannte Notizen über die „Leçons de ténèbres“ von Desargues. E.

Ch. Huygens. Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société hollandaise des sciences. Tome premier. Correspondance 1638—1656. la Haye. Martenus Nyhoff. XIV und 621 S.

Der erste Teil des grossen Unternehmens der Ausgabe sämmtlicher Werke von Ch. Huygens ist nunmehr erschienen, und es soll hier eine kurze Uebersicht seines Inhalts gegeben werden. Den ersten Vorbericht erstattet der Vorstand des Vereins, welcher die Herausgabe übernommen hat. Wir erfahren daraus, was den Anstoss zu dem Unternehmen gab, und werden auf verschiedene Ausgaben von Werken und Briefen von Huygens hingewiesen, die bereits vorhanden sind; hierbei ist jedoch übersehen die Ausgabe von Huygens Correspondenz mit Leibniz in: Leibnizens mathematische Schriften (herausgegeben von Gerhardt, III. Folge, Bd. II. Berlin 1850), und mit Papin in: Leibnizens und Huygens' Briefwechsel mit Papin u. s. w. von E. Gerland (Berlin 1881). In einem zweiten Vorwort bespricht Hr. Bierens de Haan, der Präsident der Commission für die Herausgabe, die Art und Weise, wie sie ihre Thätigkeit eingerichtet hat und zu beendigen hofft. Daraus ergiebt sich, dass in erster Linie die selbständige Correspondenz in acht Teilen herausgegeben

werden soll, und zwar in chronologischer Ordnung, als der einzig möglichen bei einer Sammlung, in der viele Gegenstände sehr zerstreut behandelt werden. Die Originale der meisten Briefe befinden sich in der Universitätsbibliothek zu Leiden, welcher Huygens seine hinterlassenen Papiere vermachte. Diese umfassen alle Briefe an Huygens und viele Notizen über die von ihm an andere Gelehrten gerichteten; zum grossen Teil befinden sich diese Briefe in andern Sammlungen und sind mit den Concepten verglichen worden. Mit grösster Sorgfalt hat die Commission die fehlenden Adressen und Daten vieler Briefe aufgesucht und meist auch festgestellt. Ueber alle in der Correspondenz genannten Personen werden biographische Einzelnheiten mitgeteilt, ebenso ist mit allen angeführten wissenschaftlichen Werken verfahren.

Den Briefen geht eine Gruppe von Bildnissen aus der Familie Huygens voran: der Vater, der Dichter Constantin Huygens, seine vier Söhne und eine Tochter nach einem Gemälde im „Mauritshuis“ im Haag. Aus dem angegebenen Zeitraum werden 365 Briefe mitgeteilt. Ein Supplement enthält noch 18 Briefe aus derselben Zeit, welche erst während des Druckes des ersten Teils gefunden worden sind. Sodann sind verschiedene Tabellen beigegeben. In der ersten sind die Briefe nach dem Datum geordnet, die zweite führt die Verfasser alphabetisch auf; die dritte alle Personeu, die in den Briefen genannt werden unter Hinweis auf die Briefe, in denen sie vorkommen; mehr als 600 Gelehrte aus allen Culturländern sind darin aufgenommen. In der vierten Tabelle sind in alphabetischer Ordnung die Titel aller wissenschaftlichen Werke, deren in den Briefen Erwähnung geschieht, unter Hinweis auf dieselben zusammengestellt; in der fünften endlich finden sich die Gegenstände, über welche sich die Briefe verbreiten, zu grösseren Gruppen vereinigt. Das Ganze schliesst mit einer langen Liste von Zusätzen und Verbesserungen ab.

Druck und sonstige Ausführung lassen nichts zu wünschen übrig. G.

G. J. Gray. Bibliography of the works of Sir Isaac Newton; together with a list of books illustrating his life and works. Cambridge. 40 S. 8°.

Für Subscribenten sind 120 Exemplare gedruckt. Lp.

D. Wierzbicki. Leben und Wirken des polnischen Astronomen Johann Hevelius. Krakau 1888. 4°. 57 S. (Polnisch.)

I. Biographie des Hevelius. II. Seine astronomischen Beobachtungen und Instrumente. III. Seine wissenschaftliche und literarische Thätigkeit. IV. Verzeichnis seiner Schriften.

Dn.

D'Alembert. Oeuvres et correspondances inédites. Publiées avec introduction, notes et appendice par Ch. Henry. Abbeville. XX + 356 S. 8°.

Lagrange. Oeuvres complètes de Lagrange, publiées par les soins de J.-A. Serret et G. Darboux, etc. Tome XI. Mécanique analytique, avec Notes de J. Bertrand et G. Darboux. 1re Partie. 1888. XII. 2e. Partie. 1889. Paris. Gauthier-Villars.

Beide Bände der Mécanique analytique sind auch mit besonderem Titel selbständig verkäuflich. Lp.

Fourier. Oeuvres de Fourier, publiées par les soins de Gaston Darboux, Membre de l'Institut, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. Tome I. Théorie analytique de la chaleur. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°.

PH. GILBERT. Notice sur le tome premier des Oeuvres de Fourier. Rev. des qu. sc. XXIV. 245-254.

Enthält eine vortreffliche historische Betrachtung zu den Fourier'schen Reihen. Mn. (Lp.)

H. GÖRING. Sophie Germain und Clotilde de Vaux, ihr Leben und Denken. Zürich. Schröter u. Meyer. 1888 8°. 270 S.

Dieser „Beitrag zur Geschichte der Philosophie und der Frauenwelt" bringt ausser der Uebersetzung einer philosophischen Schrift von S. Germain (S. 53—183) und einer Lebensskizze der oben genannten Freundin von A. Comte (S. 183—227) als hier einzig Interessirendes eine nach schon gedruckten Quellen gearbeitete Biographie von Sophie Germain (1776—1831), dieser berühmten Mitstrebenden eines Lagrange, Freundin eines Gauss, Vorläuferin eines Kirchhoff; ihre Bestrebungen und Leistungen auf dem Gebiete der reinen Mathematik und der theoretischen Physik werden des Genaueren populär dargelegt. Dass und in wiefern Wilhelm Jordan durch seine „Nibelungen" gewisse ästhetische Forderungen der Mathematikerin und Philosophin erfüllt habe, sucht ein Anhang (S. 227—270) zu beweisen.

Tn.

J. F. ENCKE. Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen. Bd. I. Allgemeines betreffend Rechnungsmethoden. 211 S. 8°. Bd. II. Methode der kleinsten Quadrate. Fehlertheoretische Untersuchungen. VI + 248 S. 8°. Berlin. Dümmler.

Inhalt von Band I: Ueber Interpolation (1830). Ueber mechanische Quadratur (1837). Ueber eine andere Methode, zu den Formeln der mechanischen Quadratur zu gelangen (1862). Ueber die Cotesischen Integrationsfactoren (1863). Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen (1841). Ueber die Entwickelung einer Function in eine periodische Reihe (1860).

Lp.

A. Cauchy. Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. Publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'instruction publique. Ire série. Tome VI. Paris. Gauthier-Villars et Fils. IV + 474 S. 4°.

Fortsetzung zu Bd. V (F. d. M. XVII. 1885. 16); den Inhalt bilden die Noten und Artikel, welche Cauchy in den C. R. vom 21. December 1840 bis zum 27. Juni 1842 veröffentlicht hat (No. 112—168) und in welchen sehr verschiedenartige Gegenstände behandelt werden. Eine grössere Anzahl beschäftigt sich mit der Theorie der bestimmten Integrale und mit der Integration partieller Differentialgleichungen; andere sind der Mechanik des Himmels, der mathematischen Physik, der Zahlentheorie u. s. w. gewidmet. Lp.

L. Kronecker. Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten. Berl. Ber. 439-442.

Erläuterung der betreffenden Stellen in Hrn. Kummer's Gedächtnisrede (Berl. Abh. 1860) (Stabilität des Weltsystems und eine ganz neue, allgemeine Methode der Behandlung und Auflösung der Probleme der Mechanik) unter Bezugnahme auf eine in Acta. Math. VII veröffentlichte Preisaufgabe. Lp.

C. Segre. C. G. C. V. Staudt ed i suoi lavori. Torino. Fratelli Bocca. 1888. 8°. 17 S.

Giebt kurz den Lebensgang, ausführlicher die Leistungen Staudt's und deren Würdigung. Tn.

C. Bricarelli. Della vita e delle opere del P. Angelo Secchi della Compagnia di Gesù. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. IV. 41-106.

Eine liebevolle Würdigung der Verdienste von A. Secchi (geb. zu Reggio d'Emilia 28. Juni 1818, gest. 26. Februar 1878

zu Rom). Auf S. 74—106 findet man das Verzeichnis seiner Schriften. Lp.

C. W. BORCHARDT's Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von G. HETTNER. Mit dem Bildnisse Borchardt's. Berlin. G. Reimer. X + 511 S. 4°.

So wie die Werke Steiner's, Jacobi's und Dirichlet's hat die Akademie der Wissenschaften auch Borchardt's gesammelte Werke, die einen Quartband füllen, herausgegeben und damit dem Andenken ihres vor zehn Jahren verschiedenen Mitgliedes (geb. 22. Februar 1817, gest. 27. Juni 1880) ein Denkmal gesetzt. Hr. Hettner hat die ihm übertragene Arbeit mit peinlicher und rühmenswerter Sorgfalt durchgeführt, wofür ihm alle Mathematiker und Freunde Borchardt's Dank wissen werden.

Der vorliegende Band enthält nur Abhandlungen und kürzere Mitteilungen, welche bereits gedruckt vorlagen. In dem Nachlässe fand sich keine in wesentlichen Punkten abgeschlossene Arbeit vor; auch die Doctordissertation, sowie die meisten Abhandlungen, welche B. in der Akademie der Wissenschaften gelesen, aber nicht veröffentlicht hat, waren nicht mehr vorhanden. Die Abhandlungen (No. 1—25) sind chronologisch geordnet, ihnen folgen (No. 26—38) kurze Notizen mathematischen und biographischen Inhalts. Den kurzen Lebenslauf (S. 502—503), welcher der 13. Auflage des Brockhaus'schen Conversationslexikons entnommen ist, hat ein Freund Borchardt's verfasst. Einige Vorreden, kurze Anmerkungen zu Abhandlungen anderer Autoren und Anzeigen des Ablebens einiger Mathematiker sind nicht aufgenommen worden. In den vom Herausgeber (S. 506—511) hinzugefügten Anmerkungen sind nur solche Stellen erwähnt worden, die einer eingehenderen Besprechung bedurften.

Die Ausstattung ist dieselbe wie in Jacobi's Gesammelten Werken, würdig der Veranstalterin, das beigegebene Bildnis ist wohl gelungen und giebt die feinen Züge des der Wissenschaft zu früh Entrissenen getreu wieder; der Ausdruck spiegelt die

freundliche Milde und den klaren Blick wieder, welcher allen bekannt ist, die mit ihm Verkehr gehabt haben.

Wie eine Lapidarinschrift erscheinen die kurzen, sonst aber trefflichen Worte des Lebenslaufs. Ref. möchte hinzufügen, dass vor allem die selbstlose Hingabe an die Wissenschaft den edlen Charakter Borchardt's so liebenswürdig machte. Neidlos und freudig anerkannte er jede bedeutendere Leistung und förderte gern jedes aufkeimende Talent. Durch diese Eigenschaft, durch seine grosse Belesenheit und seinen ehrlichen und gerechten Sinn, der mit feinem Urteile sich paarte, war er in hervorragender Weise zum Leiter des Journals befähigt, für dessen Gedeihen er stets sann und sorgte, bis er auf das Todesbett geworfen wurde. Klagte doch ein Altmeister unserer Wissenschaft bei seinem Begräbnisse um ihn: „Der Mann ist unersetzlich; dieser eine Mann war eine Bibliothek der Mathematik, die nun verloren ist“. Lp.

Ettore Caporali. Memorie di Geometria. Napoli. Pellerano. VII + 378 S.

Das Erscheinen dieses Buches haben wir bereits im vorigen Bande der F. d. M. S. 23 angekündigt. Nach dem von uns a. a. O. angezeigten Nekrolog von Hrn. Padelletti enthält es die folgenden Arbeiten Caporali's:

I. Sulla superficie del quinto ordine dotata di una curve doppia del quinto ordine.

II. Teoremi sulle curve del terz' ordine e sui fasci di curve del terzo ordine.

III. Sui complessi e sulle congruenze di secondo grado.

IV. Sopra i piani e i punti singolari della superficie di Kummer.

V. Sulle trasformazioni univoche piane involutorie.

VI. Sopra alcuni sistemi di rette.

VII. Sull' esaedro completo.

VIII. Teoremi sulle superficie del terzo ordine.

IX. Sulle tangenti condotte ad una curva abgebrica piana da un suo punto multiplo.

X. Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane.

XI. Sopra una certa curva del quinto ordine.

XII. Sul sistema di due forme binarie cubiche.

XIII. Relazione sul concorso pel premio accademico nell' anno 1882.

XIV. Studio sull' esagrammo di Pascal.

XV. Frammenti sull' esagrammo di Pascal.

XVI. Sulla teoria delle configurazioni.

XVII. Introduzione alla teoria dello spazio rigato.

XVIII. Sullo spazio di quattro dimensioni.

XIX. Sulla teoria degli spazi à più dimensioni.

XX. Alcuni teoremi sui fasci sizigetici di curve del terzo ordine.

XXI. Sulla figura costituita dai punti di contatto delle tangenti condotte ad una cubica di tre suoi punti in linea retta.

XXII. Sulla teoria delle curve piane del quarto ordine.

Die Abhandlungen unter den Nummern I, II, V, VI, VII, VIII, IX, X, XII, XIII sind im Jahrbuche besprochen worden (F. d. M. VII. 1875. 518; IX. 1877. 488; XI. 1879. 598, 590; XIII. 1881. 619, 531, 514; XVI. 1884. 96; XV. 1883. 746). No. III enthält eine geometrische Untersuchung der Abbildung des Complexes zweiten Grades auf den Punktraum und erfreut sich mit Recht eines Ansehens. In IV werden die Eigenschaften des Hexagrammum mysticum bewiesen und mittels geometrischer Betrachtungen auf drei Dimensionen ausgedehnt. No. XI ist eine kurze Mitteilung über eine besondere Curve vierter Ordnung. No. XVII ist eine unter Mitwirkung des Hrn. Del Pezzo entstandene längere Arbeit Caporali's, in welcher die Geometrie der Graden in origineller synthetischer Art untersucht wird, und welche sehr viele interessante und neue Ergebnisse enthält. Der Leser findet Genaueres hierüber in dem Aufsatze des Berichterstatters: „L'opera scientifica di Ettore Caporali" (Batt. G. XXVII. 1889). Auf diesen Aufsatz verweisen wir auch betreffs der Notizen über die abgedruckten und noch nicht veröffentlichten Fragmente des Nachlasses. La. (Lp.)

W. Voigt. Zum Gedächtnis von G. Kirchhoff. Göttingen. Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung. 10 S. 4°.

Rede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der K. Gesellschaft der Wissenschaften am 5. December 1887. Sie schildert in markigen Zügen die wissenschaftliche Lebensarbeit des Verblichenen. „Seine Gabe war nicht das Anfangen, sondern das Vollenden. Es ist gewiss bezeichnend für seine Arbeiten, für seine Neigung, nur von den sichergestelltesten Grundlagen und nur in völlig mathematischer Strenge die Entwickelung fortzuführen, dass er wohl fast niemals gezwungen gewesen ist, auch nur in Kleinigkeiten sich selbst zu berichtigen oder berichtigen zu lassen". Lp.

G. Brunel. Notice sur l'influence scientifique de Guillaume-Jules Houël, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Bordeaux Mém. (3) IV. 1-78.

Der Verf. hat die Einzelheiten (S. 1—4) über die äusseren Lebensumstände des verstorbenen Mathematikers einem Artikel von G. Lespiault entnommen, der im Mémorial des anciens élèves de l'École Normale Supérieure für 1887 erschienen ist. [Houël ist geb. 7. April 1823 zu Thaon (Calvados), gest. zu Périers bei Caen 14. Juni 1886]. Auf S. 5—17 werden unter 131 Nummern die Titel seiner schriftstellerischen Arbeiten aufgeführt, unter ihnen viele Uebersetzungen und literarische Anzeigen. Die Wirksamkeit des liebenswürdigen und vielseitigen Gelehrten wird danach in fünf Capiteln besprochen: 1) Unterricht der Geometrie und der Trigonometrie. 2) Tabellen. 3) Analysis. 4) Mechanik des Himmels und Astronomie. 5) Literarische Anzeigen und Uebersetzungen. Lp.

R. Schram. Nekrolog. Theodor von Oppolzer. Astr. Viertschr. XXII$_2$. 177-192.

R. Schram. Notice sur les travaux de Théodore d'Oppolzer avec la liste complète de ses publications, traduite de l'allemand par E. Pasquier. Bonc. Bull. XX. 439-480.

Eine Schilderung des Lebensganges und der wissenschaftlichen Leistungen des plötzlich seiner reichen Thätigkeit entrissenen Astronomen (geb. zu Prag 26. October 1841, gest. zu Wien 26. December 1886). Die Liste der Schriften umfasst 320 Nummern. Lp.

E. d'Ovidio. Francesco Faà di Bruno. Annuario della R. Università di Torino 1888-1889.

F. Faà di Bruno wurde in Alessandria den 29. März 1825 geboren und starb den 27. März 1888 als Professor der höheren Analysis an der Universität Turin. Sehr zahlreich sind seine wissenschaftlichen Veröffentlichungen. Zuerst ist er als Verfasser dreier Lehrbücher zu nennen, nämlich: Théorie générale de l'élimination (Paris 1859), Cenni elementari sopra il calcolo degli errori (Torino 1867) und Théorie des formes binaires (Turin 1876) [Vgl. F. d. M. VIII, 1876, 56]; von ihnen ist das zweite auch französisch gedruckt (Théorie élémentaire du calcul des erreurs, Paris 1869) und das dritte in das Deutsche übersetzt worden [vgl. F. d. M. XIII, 1881, 86]. Ferner hat er viele Aufsätze verfasst, welche in den besten wissenschaftlichen Sammlungen erschienen und grösstenteils in diesem Jahrbuch schon besprochen worden sind; die meisten derselben behandeln Fragen aus der Theorie der Gleichungen und der binären Formen. Die beiden letzten beweisen jedoch, dass er später seine Aufmerksamkeit den elliptischen Functionen zugewandt hatte; und in der That bereitete er eine neue Darstellung dieser Lehre vor, welche für ihn viele Jahre hindurch Gegenstand seiner Universitäts-Vorlesungen war. La.

A. Pánek. Leben und Wirken des böhmischen Mathematikers P. Wenzel Šimerka. Časop. XVII. 253. (Böhmisch.)

Geboren am 20. December 1819 in Hoch-Weselí, erhielt er 1845 die Priesterweihe, studirte dann Mathematik und Physik an der Universität in Prag, lehrte 9 Jahre am Obergymnasium zu B. Budweis, ward 1862 Pfarrer in Slatina bei Senftenberg

und starb am 26. December 1887. Die Akademie der Wissenschaften zu Wien veröffentlichte von ihm: 1858 „Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativen Determinanten“. 1859 „Lösung zweier Arten von Gleichungen“. „Die trinären Zahlformen und Zahlwerte“. 1883 „Die Kraft der Ueberzeugung, ein mathematisch-philosophischer Versuch“; die Prager Gesellschaft der Wissenschaften: „Beiträge zur unbestimmten Analytik“ (Böhmisch). Ausserdem gab er eine für die höheren Klassen der Mittelschulen bestimmte „Algebra“ nebst Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung heraus und lieferte 5 Abhandlungen in den „Casopis“, worüber in diesem Jahrbuch an betreffender Stelle referirt ist. Std.

E. Riecke. Rudolf Clausius (1822-1888). Rede gehalten in der öffentlichen Sitzung der K. Ges. d. Wiss. Göttingen. Dieterich. 1888. 4°. 39 S.

Als eines der jüngeren von 18 Kindern ist Clausius bald auf sich selbst angewiesen; mit 28 Jahren erst habilitirt er sich zu Berlin, wird 1855 in Zürich Ordinarius am Polytechnicum, 1857 auch an der Universität, kommt 1867 nach Würzburg und 1869 nach Bonn, dem er bei stets wachsendem Wirkungskreis treu blieb. Die vorliegende Darstellung der Arbeit seines Lebens knüpft an an seine Umdeutung (1850) der Carnot'schen Auffassung von der bewegenden Kraft der Wärme (aus 1824), erläutert Geschichte und Tragweite seines Satzes von der Aequivalenz der Verwandelungen (1854), zeigt, wie er dann auch die nicht umkehrbaren Vorgänge untersucht und wie er seine Sätze mehrfach (1862, 64, 65) umformt und gar mannigfaltig anwendet, insbesondere auch auf elektrische Erscheinungen, wie er der Begründung einer wirklichen Molecularmechanik der Wärme zustrebt, wie er die kinetische Theorie der Gase fördert. Die Erzählung von Clausius' Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrodynamik (von 1875 ab) bildet den zweiten, die Schilderung seiner Persönlichkeit, seines Wesens den dritten Teil dieser anregenden

gehaltreichen Rede. Ein Anhang bringt das Verzeichnis der wissenschaftlichen Veröffentlichungen von Clausius. Tn.

G. W. de Tunzelmann. Professor Rudolf Julius Emanuel Clausius. Nature XXXVIII. 438-439.

G. F. Fitzgerald. The death of Clausius. Nature XXXVIII. 491.

G. Basso. In commemorazione di Rodolfo Clausius. Torino Atti XXIV. 3-4.

Nekrologe (geb. 2. Jan. 1822 zu Cöslin, gest. 24. Aug. 1888 zu Bonn). Lp.

Rev. John Herwitt Jellett, D. D., D. C. L. Nature XXXVII. 396-397.

Nachruf an Jellet, geb. den 25. Dezember 1817 zu Cashel in der Grafschaft Tipperary, gestorben als Provost of Trimity College zu Dublin am 19. Februar 1888. Von seinen Werken werden in dem Artikel angeführt: „Treatise on the calculus of variations" (1850), „Treatise on the theorie of friction" (1872), ferner aus Liouville's Journal: „Equilibrium and motion of an elastic solid", „On researches in Chemical optics". Er war auch ein beliebter Kanzelredner. Lp.

A. Voss. Zur Erinnerung an Axel Harnack. Math. Ann. XXXII. 161-174.

M. Noether. Carl Gustav Axel Harnack. Schlömilch Z. XXXIII. Hl. A. 121-124.

Geben die Lebenszüge und wissenschaftliche Würdigung des 1888 im Alter von noch nicht 37 Jahren verstorbenen Dresdener Professors, in dessen mathematischem Schaffen zwei verschiedenartige Perioden unterschieden und gekennzeichnet werden. Erstere Schrift zählt im Anhang die Liste von Harnack's Arbeiten auf; die zweite fügt diesen noch zwei weitere hinzu. Tn.

---

und starb am 26. December 1887. Die Akademie der Wissenschaften zu Wien veröffentlichte von ihm: 1858 „Die Perioden ... quadratischen Zahlformen bei negativen Determinanten". 18.. „Die Lösung zweier Arten von Gleichungen". „Die trinären Zahlformen und Zahlwerte". 1883 „Die Kraft der Ueberzeugung, ein mathematisch-philosophischer Versuch"; die Prager Gesellschaft der Wissenschaften: „Beiträge zur unbestimmten Analytik" (Böhmisch). Ausserdem gab er eine für die höheren Klassen der Mittelschulen bestimmte „Algebra" nebst Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung heraus und lieferte 5 Abhandlungen in den „Casopis", worüber in diesem Jahrbuch an betreffender Stelle referirt ist.

Std.

E. Riecke. Rudolf Clausius (1822-1888). Rede gehalten in der öffentlichen Sitzung der K. Ges. d. Wiss. Göttingen. Dieterich 1888. 4°. 39 S.

Als eines der jüngeren von 18 Kindern ist Clausius bald auf sich selbst angewiesen; mit 28 Jahren erst habilitirt er sich zu Berlin, wird 1855 in Zürich Ordinarius am Polytechnicum und 1857 auch an der Universität, kommt 1867 nach Würzburg und 1869 nach Bonn, dem er bei stets wachsendem Wirkungskreis treu blieb. Die vorliegende Darstellung der Arbeit seines Lebens knüpft an an seine Umdeutung (1850) der Carnot'schen Auffassung von der bewegenden Kraft der Wärme (aus 1824), erläutert Geschichte und Tragweite seines Satzes von der Aequivalenz der Verwandelungen (1854), zeigt, wie er dann auch die nicht umkehrbaren Vorgänge untersucht und wie er seine Sätze mehrfach (1862, 64, 65) umformt und gar mannigfaltig anwendet, insbesondere auch auf elektrische Erscheinungen, wie er der Begründung einer wirklichen Molecularmechanik der Wärme zustrebt, wie er die kinetische Theorie der Gase fördert. Die Erzählung von Clausius' Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrodynamik (von 1875 ab) bildet den zweiten, die Schilderung seiner Persönlichkeit, seines Wesens den dritten Teil dieser anregenden

haltreichen Rede. Ein Anhang bringt das Verzeichnis der wissenschaftlichen Veröffentlichungen von Clausius. Tn.

W. DE TUNZELMANN. Professor Rudolf Julius Emanuel Clausius. Nature XXXVIII. 438-439.

F. FITZGERALD. The death of Clausius. Nature XXXVIII. 491.

G. BASSO. In commemorazione di Rodolfo Clausius. Torino Atti XXIV. 3-4.

Nekrologe (geb. 2. Jan. 1822 zu Cöslin, gest. 24. Aug. 1888 zu Bonn). Lp.

Rev. John Herwitt Jellett, D. D., D. C. L. Nature XXXVII. 396-397.

Nachruf an Jellet, geb. den 25. Dezember 1817 zu Cashel in der Grafschaft Tipperary, gestorben als Provost of Trimity College zu Dublin am 19. Februar 1888. Von seinen Werken werden in dem Artikel angeführt: „Treatise on the calculus of variations" (1850), „Treatise on the theorie of friction" (1872), ferner aus Liouville's Journal: „Equilibrium and motion of an elastic solid", „On researches in Chemical optics". Er war auch ein beliebter Kanzelredner. Lp.

A. VOSS. Zur Erinnerung an Axel Harnack. Math. Ann. XXXII. 161-174.

M. NOETHER. Carl Gustav Axel Harnack. Schlömilch Z. XXXIII. Hl. A. 121-124.

Geben die Lebenszüge und wissenschaftliche Würdigung des 1888 im Alter von noch nicht 37 Jahren verstorbenen Dresdener Professors, in dessen mathematischem Schaffen zwei verschiedenartige Perioden unterschieden und gekennzeichnet werden. Erstere Schrift zählt im Anhang die Liste von Harnack's Arbeiten auf; die zweite fügt diesen noch zwei weitere hinzu. Tn.

W. Cudworth. Life and correspondence of Abraham Sharp, the Yorkshire Mathematician and Astronomer. London.

O. M. Mitchel. Astronomer and General. Biographical narrative by his son, F. A. Mitchel. Boston (1887). 8°.

Franz. Gedächtnisrede auf den am 17. Oktober verstorbenen Königsberger Astronomen Eduard Luther. Königsberg. Koch.

J. L. E. Dreyer. H. C. F. C. Schjellerup. Nature XXXVII. 154-155.

Nekrolog für den verstorbenen dänischen Astronomen Hans Carl Frederick Christian Schjellerup, (geb. zu Odense 8. Febr. 1827, gest. zu Kopenhagen 13. Novbr. 1887). Lp.

P. G. Tait. Dr. Balfour Stewart, F. R. S. Nature XXXVII 202-203.

Nekrolog für den verstorbenen englischen Physiker (geb. zu Edinburgh 1. Novbr. 1828, gest. zu Manchester den 18. Decbr. 1887). Lp.

J. Liagre. Discours prononcé aux funérailles de J. C. Houzeau. Belg. Bull. (3) XVI. 141-147.

Der den Astronomien durch seine Bibliographie générale de l'Astronomie wohl bekannte Gelehrte (7. Oct. 1820 — 12. Juli 1888) hat auch über physikalische Geographie und über die seelischen Eigenschaften der Tiere im Vergleich mit denen des Menschen geschrieben. Mn. (Lp.)

J. J. Sylvester. The late Arthur Buchheim. Nature XXXVIII. 515-516.

Nekrolog (gest. 9. Septbr. 1888 im Alter von 29 Jahren). Ein anderer Nachruf von R. Tucker steht in Lond. M. S. Proc. XIX. 592-594; an dieser Stelle befindet sich auch ein Verzeichnis seiner mathematischen Schriften. Lp.

R. TUCKER. John Brooksmith †. Lond. M. S. Proc. XIX. 591-592.

John Brooksmith (geb. 17. Juli 1824 zu Huddersfield, gest. 5. Mai 1888) war Verfasser von Arithmetic in theory and practice, einem beliebten Lehrbuche, das 7 Auflagen erlebte, und von einigen anderen mathematischen Schriften. Lp.

Obituary. Monthly Not. XLVIII. 157-174.

Kurze Nachrichten über die im Jahre 1887 verstorbenen Mitglieder der Royal Astronomical Society:

Joseph Baxendell (19. April 1815 — 7. Oct. 1887).

John Benjamin Dancer (8. Oct. 1812 — 24. Novbr. 1887).

Peter Gray (1807 — 17. Jan. 1887).

Balfour Stewart (1. Novbr. 1828 — 18. Decbr. 1887).

Samuel Wilkes Waud (26. Aug. 1801 — 24. Febr. 1887).

Eduard Luther (24. Febr. 1816 — 17. Oct. 1887).

Hans Karl Frederik Christian Schjellerup (8. Febr. 1827 bis 13. Novbr. 1887). Lp.

KOLOMAN V. SZILY. Ungarische Naturforscher vor hundert Jahren. Math. naturw. Ber. Ungarn. VI. 211-223.

Der Verf. will in der Literaturgeschichte auch die wissenschaftlichen Schriften berücksichtigt haben und weist in der vorliegenden Rede (vom 6. Mai 1888) auf eine Anzahl ungarischer Naturforscher des vorigen Jahrhunderts hin; unter ihnen sind für das Jahrbuch zu nennen Max Hell, Astronom, (1720-1792) zuletzt in Wien; Wolfgang Kempelen, Mechaniker (1734-1804) ebenfalls zuletzt in Wien; Paul Makó von Kerekgede, Philosoph und Mathematiker, (1724-1793) thätig in Wien, gest. in Ofen;

Ladislaus Csernák (1742-1816), Verfasser des Scribrum arithmeticum, Professor in Deventer; Johann Horváth (1732-1800) Physiker und Mathematiker, zuletzt in Ofen; Josef Pap v. Fogaras (1744-1783), Mathematiker und Philosoph. Lp.

Nekrologe in Hoffmann Z. XIX. 72-74, 74, 75, 76-77, 394-396, 396-397, 475-476.

J. F. W. Gronau (geb. 11. Oct. 1803 zu Danzig, gest. 14. Aug. 1887 zu Oels).

Heinrich Ide (geb. 9. Jan. 1851 zu Trusen, gest. 14. Oct. 1887 zu Kassel).

Karl Heinrich Buderus (geb. 13. April 1835 zu Rauschenberg, gest. 27. Oct. 1887 zu Kassel).

Eduard Luther, Astronom (geb. 24. Febr. 1816 zu Hamburg, gest. 17. Oct. 1887 zu Königsberg i. Pr.).

Richard Baltzer (geb. 27. Jan. 1818 zu Meissen, gest. 7. Novbr. 1887 zu Giessen).

Karl Snell (geb. 19. Jan. 1806 zu Dachsenhausen, gest. 12. Aug. 1886 zu Jena).

F. J. Pisko (geb. 10. Juni 1827 zu Neu-Rausnitz bei Brünn, gest. 26. Juni 1888 zu Aussee). Lp.

A. Cayley. The collected mathematical papers of Arthur Cayley, Sc. D., F. R. S., Sadlerian Professor of Pure Mathematics in the University of Cambridge. Cambridge: at the University Press. Vol. I: XVI + 589 S (1889), Vol. II: XII + 606 S. (1889). 4°.

Die mathematische Welt wird freudig die Kunde vernehmen, dass die Anwälte der Cambridge University Press Hrn. Cayley um die Erlaubnis gebeten haben, einen Neudruck seiner mathematischen Abhandlungen veranstalten zu dürfen, und dass zwei Bände bereits ausgegeben sind. Hr. Cayley selbst überwacht den Druck und fügt solche Noten und Verweisungen hinzu, welche ihm wünschenswert scheinen.

Bd. I enthält 100 (von 1 bis 100 numerirte) Abhandlungen, die ursprünglich in den Jahren 1841 bis 1853 veröffentlicht sind. Bd. II umfasst 58 Arbeiten (No. 101-158), welche alle mit Ausnahme von zweien zuerst in den Jahren 1851 bis 1860 erschienen. Die Aufsätze werden ungefähr, obschon nicht genau, in chronologischer Folge abgedruckt und nahezu in ihrer ursprünglichen Gestalt.

Der Druck, das Papier und die allgemeine Ausstattung sind ausgezeichnet und in jeder Beziehung würdig sowohl des Inhaltes der Bände als auch des Ansehens der Anstalt, wo sie erscheinen. Gbs. (Lp.)

E. Catalan. Mélanges mathématiques. Tome troisième. Liège Mém. XV. 1-275.

84 vereinigte Noten grösseren oder geringeren Umfanges, mehr oder weniger wichtig, über fast alle Teile der Mathematik (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 23). Mn. (Lp.)

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

R. A. Roberts. Modern Mathematics. Dublin Proc. (3) I. 151-156.

Eine kurze Skizze der Principien, welche der Entwickelung der Mathematik im gegenwärtigen Jahrhundert zu Grunde liegen. „Der moderne mathematische Gedanke wurzelt hauptsächlich in der mit dem Principe der Continuität verbundenen Theorie der Projection und in der Erkenntnis der Thatsache, dass Winkel und Längen in der euklidischen Erfahrungsgeometrie von einer gewissen absoluten Curve zweiter Ordnung abhängen. Auf der algebraischen Seite hat er die Theorie der linearen Transformationen und Invarianten gezeitigt, zu denen wir die Erkenntnis des Wertes der Homogeneïtät und der aus ihr hergeleiteten Symmetrie rechnen können". Neben diesem Auszuge dürfte der

folgende zur Kennzeichnung der Hauptansichten der Skizze genügen: „Es erscheint jetzt die Theorie der Invarianten und der übrigen Erzeugnisse des modernen mathematischen Gedankens als ein ebenso notwendiger Teil des mathematischen Wissens wie die Differential- und Integral-Rechnung. Wir haben manche andere neuen Gedanken in die Mathematik einführen sehen, wie z. B. Hamilton's Quaternionen und die Grassmann'schen Methoden; allein wir haben nicht die Ueberzeugung, dass sie einen notwendigen Teil unseres Wissens bilden. In der That hat sich neuerdings ein zu grosses Bestreben geltend gemacht, solche Rechnungen einzubürgern; doch scheinen sie in blosse Spielereien auszuarten, und ich glaube auch, dass sie nicht dazu genützt haben, irgend welche neuen Resultate zu erlangen, sondern dass sie sich dem Streben danach als nachteilig erweisen."

Gbs. (Lp.)

F. Unger. Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart nach den Originalquellen bearbeitet. Leipzig. Teubner. 1888. XII + 240 S.

Der Verfasser verteilt den Stoff in drei Perioden, welche er mit den Stichwörtern: „Einseitige Gedächtniskultur oder Mechanismus, Betonung der beweisführenden Lehrart, Verfechtung von Principien" kurz kennzeichnet und bezw. von ca. 1450-1700, 1700-1800, 1800 bis heute reichen lässt.

In einem einleitenden Abschnitt wird von den Schulverhältnissen des 15. und 16. Jahrhunderts, dann (S. 35-112) von den über Arithmetik handelnden Schriftstellern und dem Betrieb dieses Wissens- und Kunstzweiges in jenen Zeiten gehandelt, und hier ist des Berichterstatters „Rechnen im 16. Jahrhundert" als Vorarbeit und Modell deutlich erkennbar; kürzer (S. 112-136) wird das 17. Jahrhundert abgemacht, etwas ausführlicher (S. 137-173) das 18. und hier insbesondere die Reform der Methode und die Einführung des sog. Kopfrechnens berücksichtigt. Betreffs der dritten Periode finden die nacheinander als Grundlagen alles

Rechenunterrichtes verfochtenen Principien ihre geschichtliche Darstellung, nämlich die Anschauung (Pestalozzi), die allseitige Zahlbehandlung (Grube), das Zählen (Knilling), sowie bezüglich des angewandten Rechnens das Princip der konzentrischen Erweiterung und der Einfluss der mehr und mehr sich einbürgernden Zehnteilung der Maasse. Tn.

Fr. Unger. Das älteste deutsche Rechenbuch. Herausgegeben und übersetzt von Fr. Unger. Schlömilch Z. XXXIII. Hl. A. 125-145.

Bei seinen geschichtlichen Studien, deren Ergebnis in der oben besprochenen Schrift vorliegt, stiess der Verfasser auf die seit 1851 wiederholt gedruckte Erwähnung eines alten, wohl in oder kurz vor dem Jahre 1445 in niederdeutscher Sprache abgefassten „Algorismus", d. h. einer Anweisung fürs Zifferrechnen, welche handschriftlich erhalten ist in dem Sammelbande F. VII, 12 der Baseler Universitätsbibliothek. Diese Anweisung wird hier abgedruckt, in heutiges Deutsch übersetzt und mit wenigen kurzen erklärenden Anmerkungen begleitet. Tn.

P. Dziwiński. „Algoritmus" von Thomas Klos. Lemberg. 8°. 24 S. (Polnisch.)

Eine Beschreibung des ältesten in polnischer Sprache verfassten Rechenbüchleins aus dem Jahre 1538. Dn.

K. Hunrath. Zur Geschichte der annähernden Berechnung quadratischer Irrationalitäten. Schlömilch Z. XXXIII. Hl. A. 1-12.

Der Verfasser giebt hier als Nachträge zu seiner 1884 unter dem fast wörtlich gleichen Titel erschienenen Brochüre eine Anzahl von Zahlenbeispielen, welche Schriftstellern wesentlich des 16. und 17. Jahrhunderts entnommen sind und $\sqrt{a^2+b}$ entweder

als $= a + \frac{b}{2a+1}$ oder als $= a + \frac{b}{2a}$ behandeln, aber auch Beispiele für $\sqrt{n} = \sqrt{na^2} : a$. Tn.

J. L. Heiberg. Kleine Anecdota zur byzantinischen Mathematik. Schlömilch Z. XXXIII. Hl. A. 161-170.

Bei seinem zur Herausgabe von Archimeds und Euklids Werken nötigen Studium altgriechischer Handschriften fand Heiberg in diesen manche vereinzelten Stellen, welche der so vernachlässigten Geschichte byzantinischer Mathematik dienen können und von welchen er hier deren fünf im Urtext mitteilt. Die erste bezieht sich auf die platonische Art der Construction zweier geometrischen Mittel, die zweite und dritte auf die angenäherte Quadratwurzelausziehung und deren Durchführung mittels sechzigteiliger Brüche, die vierte auf pythagoreische Deutung und Benennung der sieben ersten ganzen Zahlen; die fünfte, freilich spätbyzantinische, giebt — bei der Seltenheit solcher Dinge doppelt dankenswert — einen griechischen Rechenknecht in Tabellenform, nämlich Addiren, Subtrahiren und Multipliciren je der Einer, Zehner, Hunderter und Tausender, sowie die $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ..., $\frac{1}{15}$fachen der Zahlen von 1 bis 10000 bezw. bis 1000, wobei die Ergebnisse durch Stammbrüche angegeben sind.

Tn.

E. Tregear. The natural history of the Roman numerals. Nature XXXVIII. 565.

Nachtrag zu einem Artikel des Hrn. Lymburn in Nature XXXVI. 555. Lp.

P. Mansion. Note historique sur la règle de médiation. Bibl. Math. (2) II. 36.

Der Verfasser bemerkt, dass die von Nicolas Chuquet angegebene Approximationsmethode (Mediationsregel), von welcher bisher keine Anwendung später als 1563 bekannt war, auch von

Adrian Anthonisz um das Jahr 1589 benutzt, und von seinem Sohne Adrian Metius 1611 beschrieben worden ist. E.

P. Mansion. Sur une table du papyrus Rhind. Brux. S. sc. XII. A. 44-46.

Der Papyrus Rhind enthält eine Tabelle zur Zerlegung der Brüche von der Form $\frac{2}{2p+1}$ (von $p = 2$ bis $p = 49$) in Teilbrüche. Unter allen möglichen Zerlegungen scheint der egyptische Verfasser diejenige gewählt zu haben, welche zu einem letzten Bruche mit kleinstem Nenner führt, mit Ausnahme einiger besonderer Fälle, in denen er einen etwas grösseren, aber durch 6 teilbaren Nenner vorgezogen hat. Mn. (Lp.)

S. Günther. Ueber eine merkwürdige Beziehung zwischen Pappus und Kepler. Bibl. Math. (2) II. 81-87.

Herr Günther berichtet hier über einen Satz von Kepler, der, in moderne Sprache übersetzt, die Formel

$$\int_0^\varphi \sin\varphi d\varphi = 1 - \cos\varphi$$

enthält. Ueber diesen Gegenstand hat Kepler zweimal gehandelt. An der ersten Stelle begnügt er sich mit einem empirischen Beweis; er zeigt nämlich, indem er seine trigonometrischen Tafeln benutzt, dass

$$\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \cdots + \sin 89^\circ + \sin 90^\circ$$

nicht allzuviel von $\sin\text{vers}\, 90^\circ = 100{,}000$ verschieden ist, und dass der Satz sich auch in einem andern Falle annähernd verificiren lässt. An der zweiten Stelle aber giebt er, mit Anwendung eines Lemma von Pappus, die Gründe an, warum die Summa aller Sinus, wenn die Differenz der Bogen unendlich klein wird, dem Sinusversus in aller Strenge gleich sei, also

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{r=n} \sin\frac{\varphi_r}{n} = \sin\text{vers}\,\varphi.$$

Was die eigentliche Herleitung dieses Satzes betrifft, so hat Kepler sie nur andeutungsweise gegeben; zwar hat Frisch ver-

sucht, den wahrscheinlichen Weg Kepler's zu ermitteln, aber Herr Günther weist nach, dass dieser Versuch eine entschiedene Schwäche hat, und begnügt sich mit der Thatsache, dass Kepler wirklich eine Summation vollzogen hat, die einer modernen Integration genau entspricht. E.

K. MIWA. Ueber die Einführung einer neuen unabhängigen Variablen in Differentialgleichungen. Tokio math. Ges. III. 245-248. (Japanisch.)

Einige Beispiele der Integration von Differentialgleichungen durch Einführung einer neuen unabhängigen Variablen. E.

C. A. BJERKNES. La tentative de Degen de généraliser le théorème d'addition d'Euler. Bibl. Math. (2) II. 1-2.

In seiner Biographie über Abel erwähnt Bjerknes, dass der dänische Mathematiker Degen († 1825) das Additionstheorem der elliptischen Functionen zu verallgemeinern versucht hat. In dieser Note giebt er nähere Auskunft über dies Theorem, das freilich nur in einem sehr speciellen Falle wahr ist. E.

G. ENESTRÖM. Sur un point de l'histoire du problème des isopérimètres. Bibl. Math. (2) II. 38.

Die Note bezieht sich auf die von Johann Bernoulli der Pariser Akademie der Wissenschaften im Jahre 1701 übersandte Lösung des isoperimetrischen Problems, die erst 1706 von der Akademie veröffentlicht wurde. Man hat bisher angenommen, dass die Lösung während der Zwischenzeit von der Akademie aufbewahrt wurde, aber aus dem in Stockholm befindlichen Bernoulli'schen Briefwechel geht hervor, dass dies Manuscript schon den 23. März 1701 an Johann Bernoulli zurückgesandt und erst nach dem Tode seines Bruders der Akademie wieder überreicht wurde. E.

L. Anton. Geschichte des isoperimetrischen Problems, eine geschichtliche Darstellung der Variationsrechnung von Bernoulli bis Lagrange. Diss. Leipzig. 77 S. 8°.

R. Klimpert. Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt. Mit 100 Figuren. Stuttgart. J. Maier. 1888. 160 S.

Als Bestandteil von Kleyer's Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Naturwissenschaften will das vorliegende Büchlein, wie es sagt, Nichtakademikern in einem das Gebiet der höheren Geometrie nicht vernachlässigenden, aber wesentlich die Elementargeometrie berücksichtigenden Ueberblick die allmählige Entwickelung der Geometrie vorführen und sucht dieses Ziel zu erreichen durch einen gedrängten Auszug im wesentlichen aus den bekannten Werken von Chasles, Arneth, Cantor, Hankel und Suter, wobei viele Stellen dieser Werke wörtlich zur Anführung kommen. Tn.

G. Loria. Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Ins Deutsche übertragen von F. Schütte. Leipzig. Teubner. 1888. 8°. 132 S.

Das italienische Original ward im vorigen Jahrgange S. 29 besprochen. Die von Herrn Sturm bevorwortete deutsche Uebersetzung bringt vom Verfasser eine viel eingehendere Besprechung der Differentialgeometrie und eine Umarbeitung der auf die Gestalt der Curven und Oberflächen und auf die abzählende Geometrie bezüglichen Teile, sowie eine reichliche Vermehrung der Literaturnachweise. Das Buch giebt so eine treffliche anschauliche Uebersicht der hauptsächlichsten Untersuchungsrichtungen der Geometrie unserer Zeit. Tn.

H.-G. Zeuthen. Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument. Kopenh. Overs. 127-144.

In seinem Buche „Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum" (1886) hatte der Verfasser den alten Griechen Verständnis und steten Gebrauch von recht- wie schiefwinkeligen Coordinaten bei ihren geometrischen Untersuchungen zugeschrieben, während Günther (1877) Fermat als den ersten bezeichnet, der solche Kenntnis und Einsicht in deren Nutzen gehabt habe. Gegen diese Auffassung, zur Verteidigung seiner eigenen, ist der angeführte Aufsatz geschrieben: die Priorität Fermat's vor Descartes stehe ja gar nicht fest, übrigens, wenn sie auch gesichert wäre, so sei Fermat gerade durch sein eifriges Studium des Apollonius auf die Coordinaten gekommen, und die Art, wie er sie verwende, zeige deutlich, dass er sie bei den Alten geschöpft habe. Somit sei und bleibe wahr, dass „diese letzteren volles Bewusstsein vom Nutzen dieses Hülfsmittels gehabt haben"; Astronomie und Geographie bewiesen dies ebenfalls. Tn.

E. Lehmann. De la Hire und seine Sectiones conicae. I. Teil. Pr. Gymn. Leipzig für 1887/88. Leipzig. 4°. 28 S.

In dem Bestreben die sog. neuere Geometrie mit den Methoden der Alten in organische Verbindung zu setzen, zugleich in Ausführung des Gedankens, diese Verbindung für die Wendezeit eines Desargues und Pascal möglichst augenfällig nachzuweisen, giebt der Verfasser, da ja der Genannten Werke verloren gegangen, eine Bearbeitung eines Teiles des Hauptwerkes von de la Hire (1640-1718), welcher jenen zeitlich und geistig nahe genug steht. Lehmann entnimmt den ersten fünf und dem siebenten unter den 9 Büchern der Sectiones conicae (aus dem Jahre 1685) die wichtigsten Lehrsätze und Aufgaben derart, dass so Grundlage und Hauptpfeiler des Lehrgebäudes der Kegelschnitte deutlich vor Augen treten und der Zusammenhang mit altgriechischen Ergebnissen und mit heutiger elementarer Behandlungsweise sich klar herausstellt. Auf wenigen Blättern

sucht er so die Grundgedanken von 120 enggedruckten Folioseiten vorzuführen, veröffentlicht davon freilich in der vorliegenden Programmbeilage zunächst nur das auf die beiden ersten Bücher Bezügliche, die Fortsetzung für das nächste Jahr versparend; Geschichte, Methodik und Pädagogik werden ihm Dank wissen für seine Arbeit. Tn.

M. Curtze. Ueber einen De La Hire zugeschriebenen Lehrsatz. Bibl. Math. (2) II. 65-66.

Diese Note ist veranlasst durch einen Aufsatz von Herrn Le Paige im vorigen Jahrgang der „Bibliotheca Mathematica" (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 31). Herr Curtze bemerkt, dass der fragliche Satz schon von Copernicus aufgestellt worden ist. E.

H. Schubert. Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Eine kulturgeschichtliche Studie. [Neue Folge, dritte Serie, Heft 67 der Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge, herausgegeben von Virchow und v. Holtzendorff.] Hamburg. 1888. 8°. 40 S.

Nach einer Schilderung des hohen Alters, des steten Reizes und des Wesens der Aufgabe werden die Bemühungen der Alten und des Mittelalters um wahre und scheinbare Lösung derselben dargelegt, es wird die durch Erfindung der Differentialrechnung gebrachte Förderung der bezüglichen Zahlenrechnungen erläutert und endlich wird über den durch Lambert (1761) begonnenen, durch Lindemann (1882) vollendeten Nachweis der Unmöglichkeit einer Lösung berichtet. Tn.

H. Weissenborn. Ueber die verschiedenen Namen des sogenannten geometrischen Quadrates. Bibl. Math. (2) II. 37.

Herr Weissenborn stellt die verschiedenen Namen zusammen, die im Mittelalter dem geometrischen Quadrate gegeben worden

sind; unter diesen finden sich z. B. „Astrolabium", „Gnomon" und sogar ganz allgemein „Instrumentum". E.

G. Loria. Notizie storiche sulla geometria numerativa. Bibl. Math. (2) II. 39-48, 67-80.

Enthält eine kurze Uebersicht über die Geschichte der abzählenden Geometrie. Als Vorbereitungen zur Entwickelung der abzählenden Geometrie rechnet der Verfasser gewisse Abhandlungen und Sätze von Steiner, sowie einige Untersuchungen über ebene Curven von Jonquières. Die eigentliche Geschichte der abzählenden Geometrie beginnt erst mit Chasles, dem Schöpfer der Theorie der Charakteristiken der Systeme von Curven oder Flächen, welche Theorie später von ihm selbst und vielen anderen Forschern ausgebildet und auf neue geometrische Gebilde (z. B. Dreiecke) ausgedehnt wurde. Chasles hat auch das Verdienst das Correspondenzprincip entdeckt zu haben, eine Entdeckung, durch deren Verallgemeinerung und Anwendung auf verschiedene Gebilde eine Menge von interessanten Resultaten gewonnen worden ist. Einen wichtigen Beitrag zur abzählenden Geometrie enthalten die Abhandlungen von Clebsch und Fouret über den Zusammenhang zwischen Systemen von ebenen Curven und gewissen Differential-Gleichungen erster Ordnung. Ferner ist die abzählende Geometrie durch viele Gelehrte, unter welchen besonders Halphen und Schubert zu nennen sind, weiter entwickelt, und durch die bekannte Arbeit des Letzteren: „Kalkül der abzählenden Geometrie" (1879) zu einem selbständigen Zweige der Mathematik erhoben worden.

E.

E. Gelcich. Entwurf einer Geschichte der Gesetze des Stosses. Schlömilch Z. XXXIII. Hl. A. 41-58, 81-89.

Nach kurzer Erwähnung der Ansichten von Aristoteles, Galilei und Mersenne über den Stoss werden der Reihe nach die Anschauungen und Schlussfolgerungen folgender Autoren einzeln besprochen: Descartes (Princip. philos. Pars II, Prop. 46 sq.)

und seine Schüler, Marc Marci, Wallis, Wren, Huygens, Kästner, Lambert, Euler, Karsten, Mariotte und Nollet, Musschenbroek, Maupertuis u. a. Das neunzehnte Jahrhundert ist also gar nicht berücksichtigt worden; für die behandelte Zeit nimmt der Verf. auf schon vorhandene Darstellungen nicht Bezug, z. B. auf Poggendorff's Geschichte der Physik, Mach's Mechanik in ihrer Entwickelung u. s. w. Das Citat des Werkes von Marc Marci giebt den Titel der Fortsetzung vom Jahre 1648, nicht den der ersten Veröffentlichung von 1639; dadurch erst wird die Angabe des Textes verständlich, dass M. die Gesetze des Stoffes dreissig Jahre vor Wallis, Wren und Huygens (1669) veröffentlicht habe.

Lp.

E. Wohlwill. Hat Leonardo da Vinci das Beharrungsgesetz gekannt? **Bibl. Math. (2) II. 19-26.**

Durch Venturi's Untersuchungen über das Verhältnis des Leonardo da Vinci zum Beharrungsgesetz war man bisher anzunehmen geneigt, dass Leonardo dies Gesetz gekannt, wenngleich nicht ganz klar formulirt habe. Da aber einige Aussprüche der neuerdings publicirten Manuscripte Leonardo's sich mit dieser Auffassung nicht in Einklang bringen liessen, so hat Herr Wohlwill diese Frage näher untersucht, und nach sorgfältiger Prüfung des zugänglichen Materials ist er zu dem Resultate gelangt, dass Leonardo das Beharrungsgesetz nicht gekannt hat. Vielmehr hat Leornardo deutlich angegeben, dass auch da, wo kein Widerstand vorhanden ist, die Bewegung aufhören wird, wenn ein gewisser, von der Natur der Kraft abhängiger, Weg zurückgelegt ist. Doch bemerkt Herr Wohlwill, dass dieses Resultat insofern nur als ein vorläufiges betrachtet werden kann, als viele Handschriften noch unvollständig durchforscht sind, und es also möglich ist, dass der angegebene Standpunkt Leonardo's in späteren Jahren von ihm überwunden worden ist.

E.

P. Vedel. Principet af den mindste Madestand. **Zeuthen Tidss. (5) VI. 13-22.**

Das Princip des geringsten Widerstandes. Es werden die verschiedenen Auffassungen und Beweise von Moseley's „principle of least resistance" kritisirt, und es wird versucht, das Princip aus Gauss' „Princip des kleinsten Zwanges" herzuleiten. Zuletzt wird das Princip durch ein Beispiel erläutert. *V.

F. GRUBE. Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide. II. Teil. (Laplace und Legendre.) Schleswig. Pr. Königl. Domschule. (Nr. 273) 28 S. 4°.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit ist 1883 ebenfalls als Programmbeilage erschienen und in F. d. M. XV. 861 angezeigt worden. Der Verfasser führt im Auszuge folgende Abhandlungen vor: 1) Legendre: Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes (Mém. des Sav. étr. X. 1785, gedruckt 1783). 2) Laplace: α) Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes (1784). β) Théorie des attractions des sphéroïdes (Hist. de l'Ac. Roy. des Sc. 1782, gedruckt 1785). γ) Mécanique céleste. T. II, Livre VII, Chap. I (1799). 3) Legendre: Mémoire sur les intégrales doubles (Hist. de l'Ac. Roy. des Sc. 1788). 4) Laplace: Mécanique céleste. Livre III, chap. II.

In der ersten Arbeit findet sich die Anziehung für innere Punkte zum ersten Male durch das heute als Endergebnis bekannte elliptische Integral dargestellt; für einen beliebigen äusseren Punkt hat Legendre ebenda die Lösung nur beim Rotationsellipsoid zum Abschluss gebracht. Die Verallgemeinerung des Resultates auf das dreiaxige Ellipsoid, die Legendre in dieser Arbeit vermutete, hat er erst in Nr. 3) ausgeführt. Zwischen beide Legendre'sche Arbeiten fallen die unter 2) von Laplace genannten, „in welchen die Untersuchungen über unser Problem ihren Höhepunkt erreicht haben. Hier finden wir nämlich den ersten Beweis von der allgemeinen Gültigkeit des Maclaurin'schen Satzes". Für das dreiaxige Ellipsoid hat demnach Laplace zuerst die Anziehung bestimmt, die ein äusserer Punkt erleidet. (Vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. Vorrede zur ersten Auflage.) Lp.

A. Heller. Die bewegenden Ideen in der physikalischen Forschung des XIX. Jahrhunderts. Math. naturw. Ber. Ungarn. VI. 200-210.

In dieser Antrittsrede (Akademiesitzung vom 16. April 1888) schildert der Verfasser zunächst kurz die wissenschaftlichen Ansichten und Theorien vom sechzehnten Jahrhundert an, und führt dann näher aus, wie für unser Jahrhundert die Ideen der Erhaltung und äquivalenten Transformation der Energie, ergänzt durch die Idee der Entropie und durch die Potentialtheorie, und als zweite Art der Abstraction die Theorie der Materie die Angelpunkte des physikalischen Denkens bilden. Lp.

Hele Shaw. Perpetual motion. Nature XXXVII. 254-256.

Eine kurze Uebersicht über die verfehlten Versuche, ein Perpetuum mobile zu construiren. Lp.

T. Bertelli. Di alcune teorie e richerche elettro-sismiche antiche e moderne. Bonc. Bull. XX. 481-542.

Erstattet Bericht über ein, wie es scheint, seltenes Buch von Sarti (1783) und wiederholt, diesem folgend, alle die bis dahin aufgestellten Vermutungen über die Ursache der Erdbeben und prüft sodann unter wörtlicher Anführung vieler Belegstellen die seitdem über den gleichen Gegenstand vorgebrachten Hypothesen und Theorien. Das Verzeichnis der behandelten 102 bezüglichen Schriftsteller steht S. 537-542; ein interessantes Verzeichnis von 155 bis zum Jahre 1783 stattgehabten Erdbeben und vulkanischen Ausbrüchen steht S. 531-535. Tn.

A. M. Clerke. Geschichte der Astronomie während des 19. Jahrhunderts. Gemeinfasslich dargestellt von A. M. Clerke. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Berlin. Springer. 1889. XV + 540 S.

Uebersetzt nach der zweiten Auflage des 1885 erstmals von

der Verfasserin herausgegebenen Originals, führt dieses auf einen grösseren Leserkreis berechnete Buch die seit des älteren Herschel's Zeiten gemachten Fortschritte der Wissenschaft des Himmels vor Augen, ausserdem die Fortschritte in den Hülfsmitteln wie in den Ergebnissen der Himmelsforschung, und giebt zugleich reichliche Hinweise auf die literarischen Quellen. Die Mitte des Jahrhunderts als ungefähre Grenzscheide benützend, zerlegt die Verfasserin den überreichen Stoff in zwei Abschnitte von 64 + 13 Capitěln (auf 153 + 341 Seiten) derart, dass in jedem Abschnitt zuerst die Gesamtauffassung, dann die Lehre von der Sonne, hierauf die von den Planeten und Satelliten, von den Kometen, endlich von den Instrumenten und von der Entwickelung der Forschungshülfsmittel überhaupt zur Besprechung gelangt. Herschel's Untersuchungen über den Bau des Himmels bilden den Hauptgehalt des ersten Abschnittes, die Entdeckung der Sonnenflecken, der Erdmagnetismusperiode und der Spektralanalye bestimmen den Charakter des zweiten. Eine der Zeitfolge nach geordnete Tabelle von 245 der wichtigsten Forschungsergebnisse aus den Jahren 1774 bis 1887, sowie ein besonderes Namen- und ein Sachregister bilden den Schluss. Tn.

G. Bilfinger. Die babylonische Doppelstunde; eine chronologische Untersuchung. Stuttgart. 1888. Wildt.

Während man gewöhnlich auch die Sexagesimalteilung der Zeit auf die Bewohner des Zweistromlandes zurückzuführen unternimmt, fehlt es doch dafür an thatsächlichen Belegen, denn wirklich nachweisen lässt sich die Minutenteilung erst bei dem Araber Albîrunî (um 1000 n. Chr.). Aus griechischen Angaben sowol wie aus den Ergebnissen der Keilschriftforschung scheint zu folgen, dass die Babylonier als Normalzeitmass einen Zeitraum von zwei gewöhnlichen Stunden betrachteten, welcher haspu oder asla genannt wird. Dieser Haspu scheint auch nach Griechenland übertragen worden zu sein, denn es mangelt nicht an Andeutungen dafür, dass ὥρα als Doppelstunde gebraucht wurde. Zuerst kommt hiefür der sogenannte Papyrus des Eudoxus in Be-

tracht, dann aber vermochte der Verfasser auch bei dem Bischofe Epiphanius (IV. Jahrhundert n. Chr.) an fünf verschiedenen Orten einen Hinweis auf die den zwölften Teil der scheinbaren Umdrehungsdauer des Himmels umfassende „Stunde" zu erkennen. Unsicherer sind gewisse Stellen bei Hyginus und Ausonius, bestimmter spricht sich wieder Beda Venerabilis aus, und ganz unzweideutig sagt das Chronicon paschale, das tropische Jahr betrage 365 Tage „und drei Stunden". Beim Begriffe „Tag" bemerken wir einen ganz ähnlichen Vorgang: bald denkt man, wenn man dieses Wort ausspricht, an den „Lichttag", bald an die Zeitdauer, welche durch die Achsendrehung der Erde bestimmt ist. In Europa hat sich anscheinend die Rechnung nach Doppelstunden niemals heimisch gemacht, sondern nur in Aegypten, Vorderasien und Mesopotamien, auf welch' letzteres Land eine an sich schwer verständliche Erzählung des Achilles Tatius von der bei den Chaldäern bestehenden Identität zwischen einem Längen- und einem Zeitmasse hinweist. Bezeugt wird ferner, dass wenigstens in früherer Zeit auch der chinesische Volltag in zwölf gleiche Teile zerfiel; man kann dem Verfasser beipflichten in der Annahme, dass diese Zählweise aus Westasien nach dem fernen Osten gelangte, ohne deswegen doch mit ihm der gesamten Mathematik und Astronômie der Chinesen einen griechischen (alexandrinischen) Ursprung zuzuschreiben. Dafür tragen diese Disciplinen ein viel zu eigenartiges, den Charakter des Volkes zum Ausdruck bringendes Gepräge. — Von Epping ist neuerdings die Existenz der Doppelstunde, deren Namen er jedoch kasbu schreibt, gleichfalls zugestanden worden, indem nämlich gewisse Keilschrifttexte über Mondfinsternisse, deren Dauer man ja durch Nachrechnung zu controlliren im Stande ist, nur dann verständlich werden, wenn man die Stunde zweimal so lang nimmt, als es heutigen Tages gebräuchlich ist. Gr.

P. Tannery. La grande année d'Aristarque de Samos. Bordeaux Mém. (3) IV. 79-96.

Der Verf. hat bei seiner ersten Studie über Aristarch aus

Samos (Bordeaux Mém. (2) V. 237) vom Jahre 1883 eine von Censorinus (De die natali, 18, 19) gelieferte Nachricht nicht beachtet, weil die betreffenden Stellen verderbt sind. Sein grosses Jahr, d. i. die Zeit, nach welcher alle Gestirne wieder zu ihren Anfangsstellungen am Himmel zurückkehren, wird dort zu 2484 Jahren angegeben, die Jahresdauer zu $365\frac{1}{4}$ Tag plus $\frac{1}{1623}$ Tag. Hr. Tannery zeigt, dass die Correctur 2434 für 2484 beide Zahlen völlig in Uebereinstimmung unter sich und mit der chaldäischen Periode bringt. Letztere Periode (bei Geminus und Ptolemaeus) umfasst $6585\frac{1}{3}$ Tage, ihr Dreifaches oder der Exeligmos 19756, endlich der 45fache Exeligmos 889020 Tage = 2434 siderische Sonnenjahre mit 32539 siderischen Mondumläufen, 274 Umläufen des Perigäums, 131 der Knoten (32266 anomalistische, 32670 drakonitische Umläufe). Im weiteren Verlaufe werden die verschiedenen grossen Cyklen des Altertums besprochen, besonders auch die Frage, in wie weit bei ihnen wohl die Umläufe der Planeten berücksichtigt worden seien; der Verf. meint, eine verneinende Antwort sei einzig möglich.

Lp.

A. Wittstein. Historische Miscellen. Schlömilch Z. XXXIII. Hl. A. 96-97.

Enthält zwei Richtigstellungen: die erste, gegen R. Wolf gerichtet, weist dessen Behauptung eines Gebrauches von Wasseruhren durch die altgriechischen Astronomen als nicht durch die Ueberlieferung begründet zurück, die zweite stellt ein unrichtiges Citat des jüngeren Sédillot zurecht, nach der A. Jaubert eine eigene Abhandlung über den Kompass zugeschrieben hatte. Tn.

M. Steinschneider. Ueber das Wort Almanach. Bibl. Math. (2) II. 13-16.

Anschliessend an einen 1884 erschienenen Aufsatz vom Fürsten Boncompagni giebt Herr Steinschneider einige Notizen über das Wort Almanach. Was die Herleitung des Wortes betrifft, muss er diese Frage ungelöst lassen, da es sich weder im

Arabischen noch im Hebräischen findet; dagegen weist er das arabische Synonymon „Takwim" (Tabelle) in verschiedenen lateinischen Arbeiten aus dem Mittelalter nach. Betreffs der Einführung des Wortes Almanach in die europäischen Sprachen hat es Fürst Boncompagni bekanntlich wahrscheinlich gemacht, dass dasselbe durch den Titel der astronomischen Tabellen des Prophatius Judaeus (1300) in Gebrauch gekommen sei. Um einige Beiträge zur Entscheidung dieser Frage zu geben, führt Herr Steinschneider 16 lateinische Manuscripte aus dem Mittelalter an, wo das Wort vorkommt. Leider unterliegen die Datirungen der ältesten dieser Handschriften chronologischen Zweifeln; sonst wäre das Vorkommen des Wortes schon im Jahre 1231 bewiesen.

E.

Terzo centenario dalla promulgazione del Calendario Gregoriano. Rom. Acc. Pont. d. N. L. Mem. I. 1-68.

G. Alimonda. L'aureola della scienza alla chiesa nella riforma del calendario. Ibid. 7-43.

St. Ferrari. La riforma Gregoriana del calendario. Ibid. 45-58.

Die Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei hat am 7. Juni 1883 unter dem Vorsitz des Conte Ab. Francesco Castracane im Verein mit den päpstlichen Akademien d'Arcadia und Tiberina die dritte Säcularfeier der Einführung des gregorianischen Kalenders in der Basilica dei SS. Lorenzo in Damaso begangen. Gegenwärtig werden genauere Mitteilungen über die Feier gemacht, nämlich:

1) Die zum Andenken an diese Feier gestifteten Inschriften (S. 3-6).

2) Die Festrede des Kardinals Gaetano Alimonda.

3) Die Rede über die historischen Vorgänge bei der Einführung des gregorianischen Kalenders von Stanislao Ferrari.

4) Verschiedene Festgedichte. A. Gregorio XIII perturbatam temporum rationem restituenti gratulatur Urania. Lateinische Ode von Hilarius Alibrandi. B. Nella commemorazione del III°

centenario del Calendario Gregoriano. Italienische Ode von Giov. Batt. Comm. Avv. De Dominicis Tosti. C. Vers lus au IIIme centenaire du calendrier grégorien. Französische Ode von Anicet Digard. Lp.

G. Govi. Della invenzione del micrometro per gli strumenti astronomici. Bonc. Bull. XX. 607-622.

Weist durch Nachbildung einer Vollmondkarte und der darauf enthaltenen Inschrift nach, dass der als Teleskopen- und Mikroskopen-Verfertiger berühmte Eustachio Divini (1610-1695) im Jahre 1649 erstmals das Okularmikrometer erfand und zur Herstellung seiner Vollmondkarte, sowie zur Anfertigung anderer astronomischer Aufnahmen dasselbe verwendete. Tn.

A. Pahde. Die theoretischen Ansichten über die Entstehung der Meeresströmungen. Pr. Crefeld. R.-Gymn.

Hippalus soll bereits die Meerströmungen im indischen Ocean und deren Zusammenhang mit den Monsunen richtig erkannt haben. Erst im Entdeckungszeitalter aber erhielt man eine ausgebreitetere empirische Kenntnis von den progressiven Bewegungen des Meerwassers, Kircher entwarf die freilich noch unvollkommene erste Strömungskarte, Franklin und Blagden förderten die Erkenntnis durch Temperaturmessungen im Strome und ausserhalb des Stromes. Der Verfasser bespricht sodann, hauptsächlich nach Zöppritz, die neueren Ansichten über Circulation des Meerwassers im allgemeinen und erörtert dann die einzelnen Hypothesen, welche hinsichtlich der Entstehung der Strömungen zu verschiedenen Zeiten eine gewisse Rolle gespielt haben. Schilling vertrat seine eigentümliche Gravitationshypothese, Kepler, Varenius, Kant, Reclus betrachteten die Erdrotation als den hauptsächlichsten Factor, wobei freilich viel zu wenig daran gedacht wurde, dass die Bewegung der Erde zwar bereits im Gange befindliche Bewegungen zu beeinflussen, nicht jedoch eine

Bewegung hervorzurufen vermag. Auch Witte hat neuerdings bei seinen Untersuchungen über den Golfstrom der Achsendrehung eine nach der Ansicht Vieler zu einflussreiche Thätigkeit zugeschrieben. Maury nahm an, dass Unterschiede in der Verteilung des specifischen Gewichtes resp. der Salinitätsstufe die eigentliche Ursache seien, allein wenn schon hierdurch der Anstos zur Bildung schwächerer localer Ausgleichströme gegeben werden kann, so doch gewiss nicht zu der der Strömungen im gewöhnlichen Sinne; Reclus hat freilich einen rechnungsmässigen Beleg für die Richtigkeit dieser Anschauung beizubringen versucht, allein es fand sich, dass er den Betrag der jährlichen Verdunstung in den Tropen viel zu hoch angeschlagen hatte. Die Wärmedifferenzen verschiedener Stellen der Oceane wollten als Hauptfactor anerkannt wissen Lionardo da Vinci, Buff, Mühry, Carpenter, welch' letzterer sein bekanntes Wannenexperiment als Analogie des Vorganges in der Natur erdachte. Dass die Winde das Wasser mit sich fortreissen und eine „Driftströmung“ hervorrufen könnten, daran war schon früher (Kant, Rennell, Mühry, Croll) gedacht worden, allein erst Zöppritz lieferte den überzeugenden Beweis dafür, dass die Luftadhäsion und die innere Flüssigkeitsreibung, wenn die Winde constant im nämlichen Sinne wehen, bis in die grössten Meerestiefen hinab das Wasser in translatorische Bewegung zu versetzen im Stande sind. Endlich wird noch der Aspirationsströme von Ekman und der Einwirkungen gedacht, welche die Konfiguration der Küsten, sowie das ungleichförmige Relief des Meeresbodens auf die Gestaltung der Strömungen ausüben. Den Einflus der Erdumdrehung darf man, wie der Berichterstatter meint, nach den Arbeiten von P. Hoffmann nicht mehr mit dem Verfasser als fast unwesentlich betrachten. — Die Zusammenstellung und Kritik der einzelnen Anschauungsweisen erfüllt den vom Verf. angestrebten Zweck; ein ganz vollständiges Bild jedoch gewährt sie nicht, indem z. B. die von Vossius, Baader, Blažek ausgegangenen, des geschichtlichen Interesses keineswegs entbehrenden Erklärungsversuche eine Stelle nicht gefunden haben. Gr.

D. Mannheimer. Die Kosmogonie bei den jüdischen Philosophen des Mittelalters von Saadjah bis Maimonides. Diss. Halle. 35 S. 8°.

Capitel 2.

Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

Doormann. Ueber Gesetz und Gesetzmässigkeit. Prog. Gymn. Brieg.

Doormann erörtert eingehend den Begriff der Gesetzmässigkeit und des Gesetzes historisch und kritisch auf allen Gebieten der Wissenschaft, wo er, vom Rechte aus übertragen, Anwendung gefunden hat. Er deckt die gefährlichen anthropomorphistischen Nebengedanken auf, die leicht mit dem Ausdruck auf dem Gebiete der Naturwissenschaft verbunden werden, bespricht die engere und weitere Fassung des Begriffes namentlich im Anschluss an Rümelin und Mill, verzichtet aber seinerseits darauf, den Begriff in eine Definition einzuzwängen. Der Begriffsbestimmung wohnt eine eigene Schwierigkeit inne, die in der Verschwommenheit der Grenzen der Anwendbarkeit und in der unklaren Vielseitigkeit liegt, die keine scharfen Gruppierungen gestattet. Was die mathematischen Sätze betrifft, so entscheidet sich Doormann nicht recht zwischen den Ansichten Mills, der sie als Gesetze betrachtet wissen will, und Rümelins, der für die Mathematik den Terminus entschieden ablehnt. Der Sprachgebrauch fordert die von Mill geforderte Verallgemeinerung nicht, sondern begnügt sich mit den Ausdrücken: Theoreme und Lehrsätze. Wo von mathematischen Gesetzen gesprochen wird, scheint mehr eine Regel oder eine imperativische Aufforderung als ein Gesetz zum Ausdruck zu kommen. Mi.

DIECKERT. Ueber das Verhältnis des Berkeley'schen Idealismus zur Kantischen Vernunftkritik. Pr. Gymn. Conitz.

Dieckert giebt in seiner Abhandlung eine Darlegung des Berkeley'schen Idealismus und der Kantischen Vernunftkritik, an die sich eine Vergleichung und Kritik beider Systeme anschliesst. Bei der Darstellung der Kantischen Vernunftkritik fällt auf, dass nicht der Gedankengang der ersten Auflage der Kritik der reinen Vernunft, sondern die Fragestellung der Prolegomena zu Grunde gelegt ist, und bei der Vergleichung beider Systeme vermisst Referent die Hervorhebung des Hauptunterschiedes derselben, dass Kant eine logische, Berkeley eine psychologische Untersuchung führt, beide also von einem ganz verschiedenen Ich-Begriff ausgehen, jener von der transcendentalen Einheit des Bewusstseins, dieser vom persönlichen Ich. Die Ansichten Dieckerts über die vollkommene Uebereinstimmung Kant's und Berkeley's in den materiellen Principien und die zur Kritik der Systeme im Anschlus an Ueberweg und Lange gegebenen, sich gegen den Idealismus wendenden Ideen dürften jedenfalls nur bei einem Teil der Leser Beistimmung finden. Mi.

F. CLAUSSEN. Kritische Darstellung der Lehren Berkeley's über Mathematik und Naturwissenschaften. Diss. Halle. 36 S. 8°.

BÖHRINGER. Kant's erkenntnistheoretischer Idealismus. Freiburg.

Böhringer entwickelt in sorgfältiger Analyse Kant's Erkenntnistheorie ohne Rücksicht auf die etwa in praktischer Beziehung sich daraus ergebenden Consequenzen. Der leitende, unbedingt richtige, übrigens schon von Riehl scharf betonte Gesichtspunkt der Darlegung ist die Fernhaltung des psychologischen Vorurteils. Kant's Erkenntnistheorie giebt keine Genesis der Vorstellungen im einzelnen Subjekte, sondern seine auf der Analyse des Denkobjektes beruhende Lehre muss als ein grund-

legender Teil aller Philosophie betrachtet werden. Von diesem Gesichtspunkt aus widerlegt Böhringer, dessen Schrift allerdings nur wenig Neues bringen kann, die Missverständnisse in der Beurteilung des Kantischen Apriori, in der Lehre von den synthetischen Urteilen, in der Deduktion der Kategorien, in der Auffassung des empirischen Realismus Kant's und in der Lehre vom Ding an sich. Die sich in den Zusammenhang der Kantischen Erkenntnistheorie vortrefflich hineinfindende Darlegung Böhringer's, die in der Polemik überall massvoll bleibt, ist eine empfehlenswerte Orientierung über den Kriticismus, die jedem gefallen wird, der in der Philosophie etwas ausser der englischen Psychologie anerkennt. Mi.

O. Riedel. Die Bedeutung des Dings an sich in der Kantischen Ethik. Pr. Gymn. Stolp.

Riedel verfolgt den Begriff des Dinges an sich durch die gesamte theoretische und praktische Philosophie Kant's in der kritischen Epoche. Das Ding an sich tritt bereits in der transcendentalen Aesthetik auf und wird hier durch den Begriff des Gegebenseins bestimmt; es ist steter Begleiter auf dem verschlungenen Pfade der transcendentalen Untersuchung und wird bei der Unterscheidung aller Gegenstände in Phaenomena und Noumena zum Grenzbegriff. In der Vorbereitung und Ausführung der praktischen Philosophie tritt es in den Vordergrund der Erörterung und verlangt schliesslich einen Platz in dem kritischen Systeme unter dem Begriffe eines Reichs der Zwecke. Mi.

H. Frerichs. Das Vorstellen und das Wirkliche. Pr. Realgymn. Eisenach.

Das Vorstellen ist uns unmittelbar gewiss, aber das Wesen des Vorstellens entzieht sich allen Erklärungsversuchen, und seine Beziehung auf ein Wirkliches ist ungewiss. Wir treten nie aus dem Kreise unserer Vorstellungen heraus, und die Ursache der Vorstellungen kann auch in etwas anderem, als einer

Wirklichkeit, möglicherweise in dem Vorstellen selbst enthalten sein. Das Sein eines Wirklichen lässt sich also nicht beweisen, und es ist denkbar, dass nichts als unser Vorstellen ist. Aber die Leugnung der Wirklichkeit und die Conception des reinen Idealismus, nach dem die Welt nichts als meine Vorstellung ist, lässt sich ebensowenig beweisen, wenn auch nicht widerlegen, und die Welt erscheint in dieser Annahme keineswegs einfacher erklärt, als in der naiven Weltauffassung. Vielmehr führt die Unwillkürlichkeit der Wahrnehmungen und die relative Uebereinstimmung der Urteile der Menschen viel natürlicher zur hypothetischen Annahme einer Wirklichkeit, und zwar eines Dualismus, nach dem mein Ich wirklich ist und ausser meinem Ich ein Wirkliches ist, zwischen denen eine Verknüpfung besteht. Begreiflichkeit ist freilich nicht Notwendigkeit. Will ich nicht begreifen, so kann ich bei der idealistischen Weltanschauung verbleiben. Aber die Hypothese einer wirklichen Welt stammt aus einem inneren Bedürfnis des Menschen und in der Praxis kommt man stets zur ursprünglichen Auffassung zurück. So die gewiss correcten, aber keineswegs neuen Ausführungen von Frerichs.

Mi.

S. Tolver Preston. On some apparent contradictions at the foundations of knowledge. Nature XXXVII. 221-222.

F. H. Collins. On some unapparent contradictions at the foundations of knowledge. Nature XXXVII. 294.

Erörterungen über Raum und Zeit, ob Ding oder Nichtding (entity or non-entity) mit Bezug auf Herbert Spencer's „First principles". Nach Hrn. T. P. ist Raum ein Nichtding, das bloss im Contrast zur raumerfüllenden Materie empfunden wird. Hr. C. bestreitet dies.

Lp.

F. Max Müller. Language-reason. Nature XXXVII. 324-325, 412-414.

St. G. Mivart. Reason and language. Nature XXXVII. 364-365, 462-463.

In Folge der Angriffe, welche Hr. St. G. Mivart gegen den ersten Aufsatz auf S. 323 desselben Bandes gerichtet hatte, rechtfertigt Hr. Max Müller seine dort ausgesprochenen Ansichten, indem er auf die näheren Ausführungen derselben in seinem Buche „Science of Thought" verweist. Der Zusammenhang dieser sprachphilosophischen Studien mit dem Jahrbuche erhellt aus den fundamentalen Betrachtungen, dass ratio = reason, reasoning = reckoning, dass ferner unser ganzes Denken nach einem Citate aus Hobbes in Addition und Subtraction bestehe, indem die affirmativen Sätze ein Addiren, die negativen ein Subtrahiren einer Vorstellung von einem Begriffe anzeigen. Lp.

J. E. Oliver. Elementary notes. Ann. of Math. IV. 186-193.

Der Gebrauch der mathematischen Zeichen wird besprochen, und der Verf. macht Vorschläge zu ausgedehnterer Benutzung einer allgemeinen und logisch-mathematischen Bezeichnung. So soll das Gleichheitszeichen = mit einem Punkte darüber $\doteq$ den Sinn haben „nähert sich dem Werte nach als Grenze", wobei die Variable dem Gleichheitszeichen als Index angehängt wird. Das Gleichheitszeichen mit einer Ziffer als Index soll einen Verweis auf die Begründung durch eine vorangehende Gleichung bedeuten, ein Komma vor einem Gleichheitszeichen soll eine neue Gleichungsfolge einleiten, z. B. $P =_1 Q \doteq_x R, =_{23} S$ ist zu lesen: $P = Q$ auf Grund von Gleichung (1) und $P = S$ wegen Gl. (2) und (3), $Q - R$ nähert sich der Grenze Null (oder Q/R der Einheit), wenn x seiner Grenze zustrebt; mithin $R \doteq S$. Ohne Komma würde $P \doteq S$ sein und $R = S$. Andere Vorschläge übergehen wir. Die so zu schaffende universale mathematische Zeichensprache, gewissermassen eine Pasilingua mathematica, ist ja bei den englisch schreibenden Mathematikern beliebt; obschon sie aussichtsvoller ist als die gleichartigen Bewegungen auf dem allgemein sprachlichen Gebiete, kann Ref. sich doch mit dieser Einführung der Begriffsschrift in die Mathematik nicht befreunden. Lp.

PIGTKIEWICZ. Algebra in der Logik. Pr. Gymn. Lemberg. (Polnisch.)

Inhalt: Kurze historische Einleitung in die formale Logik, Grundsätze und Operationen des Logikcalculs, Anwendung auf die Formen des Syllogismus, logische Gleichungen, Beispiele.

Dn.

E. GARAY. Los Matematicas fuero de la Lógica. Madrid. (1887.) 106 S. 4°.

H. RICKERT. Zur Lehre von der Definition. Diss. Strassburg. 66 S. 8°.

MICHAELIS. Stuart Mill's Zahlbegriff. Pr. Charlottenschule Berlin.

St. Mill, der empiristische Psychologe κατ' ἐξοχήν, dehnt seine skeptische Auffassung der logischen Grundbegriffe auch auf die Grundwahrheiten der Arithmetik aus. Auch diese Wissenschaft soll ausschliesslich aus der Erfahrung hervorgehen, der Weg der Induction der einzig zulässige sein. Im besondern wird also auch das Dasein reiner Zahlenbegriffe geleugnet. „Zehn muss zehn Erfahrungsobjecte, zehn Körper, zehn Töne oder zehn Pulsschläge oder Aehnliches bedeuten.“ Ueberhaupt soll ein den Definitionen entsprechender Gegenstand nicht existiren. Diese Ansicht vom Wesen der Arithmetik, die übrigens gegenwärtig wohl nur wenig Anhänger zählen dürfte, widerlegt der Verf. im Einzelnen durch philosophische Speculationen, indem er nachweist, wie der ursprünglich gesunde Subjectivismus bei Mill durch Uebertreibung zu Widersprüchen führt.

My.

R. DEDEKIND. Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig. Vieweg & Sohn.

In der neueren Zeit tritt das Bestreben mehrfach hervor, der Arithmetik eine festere Grundlage zu geben. Auch die vorliegende Schrift verfolgt diesen Zweck in einer eigenartigen

Weise, sie geht von vornherein von dem Princip aus, dass die Lehre von den ganzen Zahlen und ihren Verknüpfungen einen Teil der reinen Logik zu bilden habe, führt aber dasselbe weit eingehender und präciser durch, als dies bisher je geschehen sein dürfte. Der Standpunkt des Verfassers wird am besten mit seinen eigenen Worten gekennzeichnet: „Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlenwissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlenreich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen“.

Der Verfasser sieht bei seinen Darlegungen von specifisch mathematischen Kenntnissen völlig ab, er wendet sich demgemäss an jeden Gebildeten. Trotzdem lässt sich wohl nicht leugnen, dass er der Abstractionskraft des Lesers im Ganzen mehr zumutet, als irgend eine rein mathematische Schrift. Zum Teil liegt die Schwierigkeit des Verständnisses in der Form der Darstellung, die nach dem classischen Muster der Alten den ganzen Stoff in einer grossen Anzahl ganz allmählich fortschreitender Sätze bewältigen will. So gross daher die Deutlichkeit im Einzelnen ist, so ist doch andererseits, da hier jede geometrische Anschauung fehlt, eine grosse Ausdauer nöthig, um die Fortschritte der leitenden Gedanken im Ganzen übersehen zu können. Zum Teil aber ist es auch die grosse Allgemeinheit der Grundauffassung des Autors. Dieselben Grundlagen reichen, wie dem Referenten scheint, auch hin, um auch weit höhere Mannigfaltigkeiten, als die der Zahlen, geeignet zu ordnen. Naturgemäss würden sich dadurch, bei ausdrücklicher Beschränkung auf die gewöhnlichen Zahlen, manche Vereinfachungen ergeben.

Es kann demnach auch der Zweck dieser Zeilen nur sein, einige Grundzüge der Schrift deutlich hervorzuheben. Unter einem „Ding“ soll irgend ein Gegenstand unseres Denkens verstanden sein. Fasst man eine Reihe von Dingen unter irgend einem gemeinsamen Gesichtspunkt zusammen, so erscheinen sie

als die „Elemente“ eines „Ganzen“. Nach Aussonderung irgend welcher dieser Elemente verbleibt noch ein „Teil“ des Ganzen. Zwei derartige Inbegriffe an Dingen werden auf einander „bezogen“, indem ihre beiderseitigen Elemente ein- eindeutig einander zugeordnet werden; ist das ausnahmslos möglich, so besitzen beide Inbegriffe (Mengen) „gleiche Mächtigkeit“.

Ehe nun an die Aufgabe herangetreten wird, die Elemente eines Ganzen zu ordnen und die verschiedenen unter ihnen möglichen Verknüpfungsgesetze aufzusuchen, wird die Unterscheidung zwischen „unendlichen“ und „endlichen“ Mengen gelehrt. „Ein Inbegriff von Dingen ist unendlich, wenn er mit einem Teile seiner selbst gleiche Mächtigkeit besitzt, im andern Falle dagegen endlich“. Hier erscheint also der Begriff des Unendlichen als das Ursprüngliche, Unmittelbare, der des Endlichen als das Abgeleitete, die Beschränkung, der Gegensatz zum Unendlichen. Es erweist sich als nicht schwer, diese Auffassung einer endlichen Menge mit den üblichen, empirischen in Einklang zu bringen. Freilich ist jetzt Nichts mehr anschauliche Selbstverständlichkeit, sondern jede scheinbar triviale Aussage bedarf eines stricten Beweises.

Andererseits wird nunmehr die Definition des Unendlichen auf die Menge der natürlichen ganzen Zahlen angewandt. Dazu hat man nur die ganze Zahlenreihe um eine Einheit vorwärts zu schieben, so dass der Eins die Zwei, der Zwei die Drei etc. zugeordnet wird. Beide Reihen besitzen offenbar gleiche Mächtigkeit, trotzdem sie sich um das Element Eins unterscheiden. Das System der ganzen Zahlen ist also ein unendliches, da es mit einem Teile seiner selbst gleiche Mächtigkeit besitzt.

Umgekehrt lässt sich nur in diesem Sinne das Reich der ganzen Zahlen von untenauf begründen: man hat von einem unendlichen Inbegriff von Dingen auszugehen mit der besonderen Eigenschaft, dass Element für Element einem solchen Teile seiner selbst zugeordnet werden kann, der sich von dem ursprünglichen Ganzen nur durch Fehlen eines einzigen Elements unterscheidet. Dieses ausgezeichnete Element, die „Einheit“, geht durch die vorausgesetzte Zuordnung über in ein anderes, die

„Zwei“, dieses in die „Drei“ u. s. f. Um von dem dabei zu Grunde liegenden Begriff einer „kettenförmigen Anordnung“ zu den weiteren Verknüpfungen zwischen den Elementen übergehen zu können, wird jener Kettenbegriff zuvor einer Verallgemeinerung unterworfen, die immer da eintritt, wo ein ursprüngliches System auf einen Teil von sich u. s. w. „bezogen“ wird.

Für unsere Vorstellung allerdings sinken die gemeinhin Zahlen genannten Dinge vermöge der erwähnten Abstractionen zu blossen Schatten herab, dafür sind sie aber auch aller subjectiven Willkür entzogen, und, strengen rein logischen Regeln unterworfen, bieten sie für den Arithmetiker völligen Ersatz für jene populären Zahlen. Inwiefern freilich rückwärts die Uebertragung der durch blosse Denknotwendigkeit erzielten Resultate auf die empirische Welt möglich wird — auf diese, in die Psychologie hinübergreifende Frage lässt sich der Verfasser mit Absicht nicht ein. My.

Manley Hopkins. The cardinal numbers, with an introductory chapter on numbers generally. London. Sampson Low. 1887.

Anzeige in Nature XXXVIII. 27-28; hiernach offenbar das Werk eines Dilettanten. Lp.

R. Rühlmann. Philosophische Arbeit „Ueber die Zahl“. Diss. Kiel. 38 S. 8°.

L. de la Rive. Sur la composition des sentiments et la formation de la notion de l’espace. Genève. 99 S. 4°.

R. Bocksch. Zur Raumtheorie Hermann Lotze’s. Diss. Greifswald. 62 S. 8°.

P. du Bois-Reymond. Ueber die Unbegreiflichkeit der Fernkraft. Naturwiss. Rundschau. III. Nr. 14.

P. du Bois-Reymond will nachweisen, dass in der Fernkraft etwas mechanisch Unbegreifliches liegt, dass sie ein untrügliches Zeugnis ablege von einer Wirklichkeit, die unserer Erkenntnis entzogen ist. Zug und Druck sind zu Constructionsversuchen der Fernkraft nicht benutzt worden und scheinen auch dazu ganz ungeeignet. Die verschiedenen Versuche, die Fernkraft durch den Stoss der Aetherteilchen zu construiren, sind misslungen. Alle Versuche, unelastischen oder nicht vollkommen elastischen Stoss zu benutzen, würden zur Hypothese eines beständigen Verlustes an lebendiger Kraft führen. Suchen wir uns mit dem vollkommen elastischen Stoss zu behelfen, so kommt bei mathematischer Fassung des Problems gar keine Kraft heraus, und falls dennoch eine Construction gelingen sollte, müsste doch noch der elastische Stoss selbst erklärt werden, was wieder nur durch Fernkräfte gelingen könnte. Im günstigsten Falle würde also die Construction der Fernkraft nur durch Zurückführung auf andere Fernkräfte gelingen, womit nur eine Verschiebung des Problems erreicht wäre. Eine ausführlichere Darlegung des Problems verspricht der inzwischen verstorbene Verfasser in einem Buch über die Grundlagen der Erkenntnis in den exacten Wissenschaften zu geben. Mi.

OSTWALD. Die Energie und ihre Wandlungen. Leipzig. Engelmann.

Ostwald bespricht das Problem von der Natur und den Gesetzen der chemischen Verwandtschaft. Er constatirt, dass sich schon jetzt eine grosse Anzahl von guten Bestätigungen der auf Grundlage der Berthollet'schen Gedanken von Guldberg und Waage zu präcis mathematischer Form entwickelten Theorie verzeichnen lässt. Diesen Erfolg verdanken wir dem Verzicht auf die Fiction chemischer Kräfte. Mit der Einsicht, dass die chemischen Vorgänge durch Umwandelungen der persistirenden Energie bedingt sind, kam die rechte Erkenntnis der chemischen Verwandtschaft. Mi.

WRONSKY. Das Intensitätsgesetz und die Gleichartigkeit der analytischen Formen in der Lehre von der Energie. Frankfurt a. O. Harnecker.

Wronsky giebt eine leicht verständliche und sehr einfache Darlegung des Helm'schen Intensitätsgesetzes in fünf Abschnitten, die Ausdehnungsarbeit, die kinetische Energie, die potenzielle Energie, die Wärme, Allgemeines. Für eine beliebige Energieform gelten, falls die Intensität mit J, die Quantität mit M und die Capacitätsconstante mit c bezeichnet wird, die Gleichungen 1) $M = cJ$; 2) $E = \frac{1}{2}MJ$; 3) $E = \frac{1}{2}cJ^2$; 4) $E = \frac{M^2}{2c}$; 5) $dE = \frac{1}{2}dM(J+\pi)$; 6) $dE - dE_1 = A = \frac{1}{2}dM(J-J_1)$; 5') $dE = JdM$; 6') $dE - dE_1 = A = dM\,(J-J_1)$. Die Gültigkeit dieser Gleichungen reicht nicht weiter als die Voraussetzungen, dass entweder J konstant ist, oder dass zwischen J und M eine durch die lineare Gleichung $M = cJ$ ausdrückbare Beziehung besteht. Diese Fälle, für welche die Helm'sche Gleichung $dE = JdM$ auch auf endliche Grössenänderungen ausgedehnt werden darf, sind für die elementare Einführung die geeignetsten und auch für die Wärmeenergie anwendbar. Wronsky's Zweck, das Studium der Helm'schen Schrift: „Die Lehre von der Energie etc. Leipzig 1887“ zu erleichtern und zu fördern, ist vollständig erreicht. Mi.

FRERICHS. Zur modernen Naturbetrachtung. Norden H. Fischer Nachf.

Frerichs bekämpft in seiner Schrift einen einseitigen Materialismus als letzte befriedigende Weltanschauung. Er stellt sich ganz auf den Boden der modernen Naturwissenschaft, aber er ergänzt die naturwissenschaftlichen durch pantheistische Ideen. Die Schrift umfasst vier Abhandlungen. In der ersten, „Zur monistischen Naturerklärung“, verneint Frerichs die Frage, ob eine einheitliche Weltanschauung im Sinne der naturwissenschaftlichen Principien möglich sei. Die Naturwissenschaft hat aus dem Princip der Materie mit Hilfe der Atomistik, der Kant-

Laplace'schen Hypothese, der Descendenzlehre, der Physiologie u. s. w. eine monistische Weltanschauung zu gewinnen versucht, aber diese Anschauung leidet an den Thatsachen des geistigen Lebens Schiffbruch. Wie aus dem Nervenreiz Empfindung wird, weiss sie nicht zu erklären, und zur Materie muss das Bewustsein hinzugefügt werden. Auch muss zu der materiellen Welt ein schaffendes und erhaltendes Princip hinzugedacht werden. Aber die ganze Welt der Wahrnehmung ist nur ein subjectives Abbild einer vollkommneren Wirklichkeit und es mag, wo wir bei den Schranken unserer Erkenntnis mit einem Doppelten abschliessen, in Wirklichkeit eine Einheit bestehen, die wenigstens unser Gefühl fordert. In der zweiten Abhandlung, „Mechanismus und Zweckmässigkeit in der Natur", bekennt sich Frerichs zur Zahl derjenigen, die eine teleologische Naturanschauung nicht für völlig verwerflich halten. Mit dem Darwinismus ist bisher die höchste Stufe der mechanischen Naturerklärung erreicht, aber die mechanische Naturerklärung hat sich, indem sie die Teleologie völlig verdrängen wollte, eine unzulässige Verallgemeinerung zu Schulden kommen lassen. Sie hat in Wahrheit nur das Wie und nicht das Weshalb, nur das Einzelne und nicht das Ganze erklärt. Die Spanne Zeit, die wir zurückblickend verfolgen können, ist hierzu nicht ausreichend, und die wenigen Körper, die wir beobachten können, sind nichts gegen das Ganze der Materie. Ein inneres Bedürfnis treibt aber den Menschen dazu, die Natur als Ganzes aufzufassen, das Ganze als einen Plan anzusehen, nach dem sich das Geschehen entwickelt. Wir kommen freilich mit teleologischer Naturerklärung nicht weiter als Kant. Wir nehmen subjectiv eine Zweckmässigkeit an, aber wir können sie nicht unmittelbar aus der Natur schöpfen oder das objective Correlat für unsern Begriff nachweisen. Aber wie der Mensch, der sich an einen Stein stösst, an eine Wirklichkeit glaubt, so mag er auch, wenn er im Geiste immer wieder auf den Begriff des Zweckes stösst, glauben, dass auch diesem ein Wirkliches zugehöre. In der dritten Abhandlung: „Kampf und Entwickelung" sucht Frerichs zu beweisen, dass der nach Darwin im Reiche der Organismen überall bestehende Kampf und die

durch ihn bewirkte Entwickelung uns nicht zu einer pessimistischen Weltanschauung nötigt. Der Kampf, der in seinen niederen Stadien rücksichtlos und brutal ist, mildert sich auf höheren Stufen und zeitigt schliesslich Früchte, aus denen ihm seine eigenen Gegner erwachsen. Es ist nur ein Mittel für die Zwecke der Natur, und nicht nach dem Mittel, sondern nach dem Ziele der Entwickelung müssen wir unsere Weltanschauung bemessen. Die Entwickelung deutet nicht auf eine bloss zufällige Vereinigung toter Elemente, sondern auf ein höheres lebendiges Princip hin. Der ganze Nachdruck der Entwickelung liegt nicht auf dem Individuum, sondern auf der Gesamtheit. Man mag das letzte Ziel in einer alles beherrschenden Weltintelligenz sehen, und angesichts dieses Zieles kann eine pessimistische, durch die Forderungen des Individuums veranlasste, Auffassung nicht Stand halten. Wohinaus aber überhaupt das Ganze will, das bleibt uns freilich ein Räthsel. In der vierten Abhandlung „zur Ethik“ bespricht Frerichs die aufgestellten ethischen Principien. Er verwirft den Egoismus als Moralprincip, kritisirt die ethischen Ansichten Kant's, Schopenhauer's, Darwin's, und findet zuletzt, in dem auch diese Abhandlung pantheistisch ausklingt, durch einen Uebergang vom Wissen zum Glauben, in dem All-Einen, in Gott, den wahren metaphysischen Grund aller Moral. In der Liebe zu Gott wird die höchste Stufe der Sittlichkeit erreicht.

Mi.

FRERICHS. Die Hypothesen der Physik Norden. H. Fischer Nachf.

Frerichs giebt in seiner in zweiter Auflage erscheinenden Schrift ein klares Bild von der Entwickelung und dem gegenwärtigen Stande der Hypothesen, ohne die Grenzen unserer Erkenntnis zu verkennen und ohne die Möglichkeit weiterer Fortschritte zur einheitlichen Zusammenfassung der Hypothesen und zur Bildung einer Weltanschauung auf atomistischer Grundlage zu leugnen. Mi.

V. A. JULIUS. Wetten en hypothesen op het gebied der natuurkunde. Utrecht. Byleveld. 32 S.

Rede beim Antritt der Professur für Physik an der Universität zu Utrecht. Redner handelt über die Gesetze und Hypothesen auf dem Gebiet der Physik und bespricht dabei die wichtigsten Gesetze (von der Erhaltung der Energie) und Hypothesen (die von Newton und Huygens über das Licht, welchen die Maxwell'sche gefolgt ist). Mittels dieser Beispiele beabsichtigt er die Bedeutung der Gesetze und Hypothesen in das richtige Licht zu stellen. Er kommt zu dem Schluss, dass kein einziges Gesetz aus sich selbst im Stande ist, über den Mechanismus der Erscheinung aufzuklären, dass dies allein die Hypothesen thun können, jedoch nicht die, welche der Phantasie entspringen, sondern nur die, welche sich dem ernsten Forscher durch gründliches Studium der Thatsachen aufdrängen. G.

F. KERZ. Weitere Ausbildung der Laplace'schen Nebularhypothese. Ein Nachtrag. Leipzig u. Berlin. O. Spamer. VIII u. 127 S. gr. 8° nebst 3 Taf.

Die Hypothesen des Verfassers, welche nach seiner Meinung eine consequente Ergänzung der Laplace'schen Idee bilden, sind im Jahrbuche XVIII. 1886. 38 und XIX. 1887. 51 besprochen worden. Als Veranlassung zur gegenwärtigen Schrift giebt Hr. K. die Berichtigung eines Versehens seiner früheren Entwickelungen an, das kein Referent bemerkt habe; im übrigen wiederholt er aber dieselben Betrachtungen wie früher, also auch mit denselben Fehlern. Da er den Wunsch äussert, dass solche Fehler bezeichnet werden möchten, so seien drei fundamentale hier angezeigt:

1) Die Gesetze des Stosses und die der Erhaltung der Energie sind nicht beachtet worden. Auf S. 22 wird ganz äusserlich aus der Dimension der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}mv^2$ und derjenigen der Bewegungsgrösse mv vor dem Stosse geschlossen, dass nach dem Stosse die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}mv^2 : mv = \frac{1}{2}v$ übrig bleibe, und dass diese übrig bleibende Bewegung als Bewegungs-

grösse $\frac{1}{2}mv$ sich in Wärme verwandle. Bei der auf dieses falsche Resultat sich gründenden Rechnung sind dann die Gesetze der mechanischen Wärmetheorie über Temperaturänderung bei Ausdehnung von Gasen garnicht berücksichtigt. (Vergl. A. Ritter. Anwendungen der Mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme. Hannover, 1879).

2) Unzulässig ist die Behauptung, dass die feste Masse (von beiläufig einer Grösse von 500 Erdmassen) bei ihrem Zusammenstosse mit der davon unversehrt gebliebenen Sonnenmasse sich unabhängig von dieser zu einem Nebel auflöse, dass dieser Nebel die Gestalt eines nahezu homogenen Gasellipsoids annehmen und mit derselben Geschwindigkeit wie die durch den Stoss erst in Umdrehung gesetzte Sonne rotiren müsse. Dies kann offenbar nur geschehen, wenn man sich die schon geformte Gasmasse als starren Körper mit der Sonne fest verbunden denkt. Abgesehen von dieser Annahme muss aber auch unmittelbar nach der vom Verf. geforderten Auflösung der stossenden Masse in zusammenhanglose Molekeln jedes einzelne derselben eine elliptische Planetenbahn beschreiben, nicht, wie der Verf. seinem vorgefassten Gedanken zu Liebe fordert, zuerst um die Rotationsaxe gleichförmig rotiren, dann sich der Sonne im Verbindungsstrahle nach dem Sonnenmittelpunkte nähern, dann endlich eine Planetenbahn verfolgen. Von den so vom Verf. zuletzt geforderten Planetenbahnen der einzelnen Molekel muss — wenn man dem Verf. wieder bis dahin alles zugiebt, — wegen des Ausgangspunktes beim Stosse von der Sonnenoberfläche, die Mehrzahl die Sonnenoberfläche wieder schneiden, d. h. die meisten Teilchen fallen zur Sonne zurück.

3) Die Betrachtungen in No. X über die Attraction einer Nebularmasse sind falsch, insbesondere der Satz (S. 16): „An der Oberfläche wird sich also die (Nebular-) Kugel verdichten, und ihre Dichte nach innen hin abnehmen, bis sie nach und nach in die noch unverdichtete Nebularmasse übergeht.“ Bei keinem kosmischen Nebel ist ferner bisher ein fester Kern sicher entdeckt worden, obschon mit Begier danach ausgespäht ist. Die vom Verfasser bekämpfte Kant'sche Hypothese hat also die Er-

fahrung für sich, die von ihm aufgestellte wird durch keine Beobachtung gestützt. Lp.

A. Rysánek. Versuch einer dynamischen Erklärung der Gravitation. Exner Rep. XXIV. 90-114.

Ein neuer Versuch, die Aetherstosstheorie zweckentsprechend einzurichten. Der Verf. meint, die Klippe, an der die Vorgänger gescheitert sind, nämlich die Proportionalität der Gravitation mit der Masse, dadurch glücklich umschifft zu haben, dass er diesen zu erweisenden Satz in die Prämissen aufgenommen hat. „Um endlich auf das Gravitationsgesetz zu kommen, nahm ich meine Zuflucht zu der nicht unwahrscheinlichen Annahme, dass der Schweräther auf dem Wege durch die Himmelskörper einen Teil seiner Energie und zwar proportional der im Körper zurückgelegten Strecke und der daselbst vorhandenen Massendichte verliere. Letztere Annahme des Energieverlustes giebt das Gravitationsgesetz vollkommen wieder und kann als eine andere Ausdrucksweise desselben betrachtet werden.“ Lp.

H. F. Th. Beyda. Das Newton'sche Gravitationsgesetz. Lässt sich der Fall der Körper oder die Schwere derselben aus einer Anziehungskraft der Erdkörper erklären? Bonn. (Metzler. Stuttgart). 38 S. 8°.

Die neue Entdeckung steht auf S. 18: „Wo bleibt denn nun die Anziehungskraft und dazu bei den Weltkörpern die ihnen angedichtete Tangentialkraft? Warum kann dieses beides nicht die Schwungkraft des rotirenden Weltkörpers bewirken? Diese Kraft ist es, welche nach denselben Gesetzen in weiterer Entfernung abnimmt, wie es mit der Stärke des leuchtenden Lichtes der Fall ist; sie ersetzt die Anziehungskraft und vertritt auch zugleich die Tangentialkraft; sie nur ist in Wirklichkeit vorhanden, die beiden anderen lassen sich nimmer erweisen.“

Lp.

Piper. Ein mathematischer Beweis der Unsterblichkeit der Menschen. Lemgo. E. Ohle.

Nach einer Einleitung über Wahrscheinlichkeitsrechnung schliesst Piper folgendermassen: „Die Thatsache, dass ich gerade in der Gegenwart lebe, kann unter der Annahme, ich lebe nur eine endliche Zeit, nur aus dem Zufall mittels einer unendlich geringen Wahrscheinlichkeit hervorgegangen sein; ich muss also für diese Thatsache eine andere Erklärung suchen, die sie nicht mehr zufällig erscheinen lässt; es ist aber nur eine solche Erklärung möglich, nämlich die, dass die Dauer meines Daseins unendlich ist. Es ergiebt sich also mit zwingender Notwendigkeit, dass ich unsterblich bin.“ Ich kann auf diese Weise freilich nur meine Unsterblichkeit beweisen, da nur für mich meine gegenwärtige Existenz unter allen Thatsachen die am meisten ausgezeichnete ist. Nichts hindert jedoch jeden anderen Menschen, dieselbe Schlussfolgerung für sich zu machen. „Er ist daher ebenfalls unsterblich“. So geschrieben in Lemgo, ohne Angabe des Jahres der Entdeckung dieses Beweises. Mi.

P. Hampson. The Romance of Mathematics. London. Elliott Stock. (1886).

Der vollständige Titel ist: The Romance of Mathematics. Being the original researches of a lady professor of Girtham College in Polemical Science, with some account of the social properties of a conic; equations to brainwaves; social forces; and the laws of political motion. Anzeige in Nature XXXVIII. 28-29. Lp.

A. T. Schofield. Another world; or the fourth dimension. London. S. Sonnenschein.

Anzeige in Nature XXXVIII. 363.

B. Pädagogik.

P. Mansion. Sur le cours d'histoire des mathématiques de l'Université de Gand. Bibl. Math. (2) II. 33-35.

Seit 1884 liest Herr Mansion zu Gent wöchentlich eine Stunde über Geschichte der Mathematik. In diesen Vorlesungen, die für die Studenten an der Normalschule zu Gent obligatorisch sind, wird jährlich eine kurze Uebersicht über die Entwickelung der Mathematik gegeben, wobei aber zuweilen besondere Abschnitte etwas ausführlicher behandelt werden. So hat Herr Mansion 1884-1885 und 1885-1886 der Geschichte der Elementargeometrie grössere Aufmerksamkeit gewidmet, dagegen 1886-1887 und 1887-1888 die Geschichte der Infinitesimalrechnung eingehender vorgetragen. Er hat dabei den Mangel eines guten Handbuches der Geschichte der Mathematik und einer mathematisch-historischen Chrestomathie lebhaft empfunden, und hebt darum am Ende seiner Note die Notwendigkeit hervor, die Ausgabe solcher Arbeiten zu veranstalten. (Nachträglich sei bemerkt, dass diese Note das „Istituto Veneto“ veranlasst hat, einen Preis von 3000 Lire für ein Compendium der Geschichte der Mathematik und eine dazu gehörende Chrestomathie auszusetzen.)

E.

P. la Cour. Historisk Mathematik. Kjöbenhavn. Philipsens Forlag. VIII + 374 S.

Dieses Buch „Geschichtliche Mathematik“, gleichzeitig ein elementares Lehrbuch der Mathematik und eine Geschichte der elementaren Mathematik, ist als Einleitungsversuch für den ersten Unterricht bestimmt.

Der Grundgedanke des Verfassers ist, dass der Anfänger die Mathematik am besten fassen wird, wenn er die mathematischen Sätze in der Ordnung und mit den Beweisen ihrer geschichtlichen Entwickelung erlernt. Dieses kann natürlich nicht vollständig erreicht werden, aber in vielen Beziehungen ist doch der Verfasser seinem Ziele nahe gekommen.

Das Buch zeigt zuerst die verschiedenen Weisen, in welchen die ganzen Zahlen geschrieben und ausgedrückt werden können. Darnach werden die Brüche auf ähnliche Weise behandelt.

Der folgende Abschnitt enthält die Geometrie; natürlich wird vornemlich die Entwickelung der Geometrie bei den Griechen dargestellt. Es wird jedoch auch Rücksicht auf die wenigen Kenntnisse genommen, die man von der Geometrie der übrigen Völker des Alterthums hat. Unter den Geometern der Griechen treten Pythagoras und die Pythagoräer vorzugsweise hervor. Im letzten Abschnitt wird endlich die Buchstabenrechnung und die Lösung der Gleichungen ersten und zweiten Grades behandelt und in ihm werden hauptsächlich die Leistungen der Inder besprochen. Das Buch, welches der Verfasser als ein Elementarbuch für Anfänger geschrieben hat, passt nach der Ansicht des Referenten besser für solche, die, ohne die Geschichte der Mathematik gerade zu studiren, einen Ueberblick über die Geschichte der gesamten elementaren Mathematik zu erlangen wünschen.

V.

J. J. Milne. Companion to the weekly problem papers. London. Macmillan and Co. XXVIII + 340 S.

Dieses Buch steht auf einer weit höheren Stufe, als sein bescheidener Titel vermuten lässt. In den „Weekly problem papers" (London. Macmillan. 1885) liefert der Verf. eine Sammlung von Aufgaben über elementare, für Candidaten des mathematischen Faches passende Gegenstände und giebt Winke betreffs der Methoden; eingehende Lösungen dagegen bietet das Werk „Solutions of weekly problem papers" (Macmillan). Das vorliegende Buch wendet sich an dieselbe Klasse von Lesern; indessen wird die Aufmerksamkeit besonders auf Punkte gelenkt, welche entweder von früheren Schriftstellern mit Schweigen übergangen, oder nicht mit der Ausführlichkeit, welche sie verdienen, behandelt sind. Es besteht nämlich aus kleinen Abhandlungen über einzelne Themata und aus Uebungsaufgaben. Bei der Abfassung des Buches ist Hr. M. von verschiedenen Freunden unterstützt worden, welche Abteilungen, mit denen sie besonders ver-

traut waren, übernommen haben, und dadurch ist der Wert des Buches erhöht worden. Als einen Teil des Inhalts wollen wir anführen: Die algebraische und geometrische Lehre vom Grössten und Kleinsten; Hüllcurven, algebraisch und geometrisch; biangulare Coordinaten (von Hrn. Genese); neuere Geometrie (von Hrn. T. C. Simmons), ein besonders wertvoller Abschnitt. Zur Erklärung merken wir an, dass die „biangularen Coordinaten" eines Punktes *P* in einer Ebene die Cotangenten der Winkel an der Basis eines Dreiecks sind, dessen Basis die Verbindungslinie zweier festen Punkte der Ebene ist und dessen Seiten die Geraden sind, welche *P* mit den beiden Punkten verbinden. [Dieselben Coordinaten sind schon öfter gebraucht; vgl. Ritsert F. d. M. XV. 1883. 594 u. XVII. 1885. 690. Lp.]. Ausdrücke für die Cartesischen Coordinaten von *P* durch die biangularen Coordinaten werden leicht gefunden. Die Anwendungen auf die Gerade und die Kegelschnitte werden gegeben. Das Buch dürfte auch für andere als für diejenigen, an welche es sich zunächst richtet, von grossem Nutzen sein. Gbs. (Lp.)

G. Morera. L'insegnamento delle scienze matematiche nelle Università. Discorso. Annuario d. R. Univ. di Genova.

A. Gille. Herbart's Ansichten über den mathematischen Unterricht. Diss. Halle. 50 S. 8°.

On the teaching of arithmetic. Edinb. M. S. Proc. VI. 89-102.

Ein von einem Ausschusse der Edinburgher Mathematischen Gesellschaft verfasster Bericht über das Rechnen in der Theorie und Praxis. Er enthält Ansichten betreffs des zu lehrenden Stoffs und der besten Unterrichtsweisen unter den folgenden Rubriken: 1. Ausdrücke. 2. Masse und Constanten. 3. Methoden. 4. Berechnung. 5. Theorie. 6. Bindeglieder, oder Begriffe, die zur höheren Mathematik hinüberleiten. 7. Allgemeine Ratschläge. Gbs. (Lp.)

A. Lodge. The multiplication and division of concrete quantities. Nature XXXVIII. 281-283.

Ein Vortrag in der Association for the improvement of geometrical teaching über das Rechnen mit benannten Zahlen, insbesondere über Gleichungen zwischen ihnen. „Meine Anschauung betreffs der Zahlengleichungen ist die, dass die auftretenden Zahlen nur kurze Methoden zur Feststellung von Verhältnissen sind, und dass solche kurzen Methoden bei der Behandlung praktischer Beispiele ungemein nützlich sind, dem Lernenden aber zum Begreifen der grundlegenden Principien eines Gegenstandes nicht helfen." Lp.

J. Wolstenholme. Examples for practice in the use of seven figure logarithms. For the use of schools and colleges. London. Macmillan and Co. VI+57 S.

Eine sehr nützliche Sammlung von Beispielen für alle, die im Gebrauche der Logarithmen Genauigkeit und Gewandtheit zu erlangen wünschen. Die Resultate sind jeder Aufgabe beigefügt. Ref. hat eine beträchtliche Anzahl durchgerechnet und nur in einem Beispiele einen Fehler gefunden. Gbs. (Lp.)

H. Müller. Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals? Eine Betrachtung von H. Müller. Metz u. Diedenhofen. Scriba (1888). 8°. 16 S.

Verfasser beantwortet die aufgeworfene Frage mit entschiedenem Nein, da die heutige Schulgeometrie die Euklidischen Grundlagen verlassen habe; somit „hat die Reform jedenfalls in denjenigen Veränderungen volle Berechtigung, welche die Herstellung der Einheit zwischen den Grundlagen und dem Aufbau des Systems bezwecken". Tn.

A. H. BLUNT. Euclid's method, or the proper way to treat on geometry. Shepshed. Freeman.

Anzeige in Nature XXXVIII. 363.

L. HEINZE. Der Vorbereitungs-Unterricht in der Geometrie in Quinta. Pr. Kneiphöf. Gymn. Königsberg i. Pr. 26 S. 4°.

Der Verf. gestaltet seinen Unterricht im engsten Anschluss an den „Wortlaut" der preussischen Circularverfügung vom März 1882 und polemisirt namentlich, da diese Verfügung nur vom Zeichnen spricht, gegen das Vorzeigen körperlicher Modelle.

R. M.

O. SCHLÖMILCH. Zum Unterricht in der analytischen und der descriptiven Geometrie. Hoffm. Z. XIX. 241-246.

Um mit Schülern, welche die analytische Geometrie des Raumes nicht kennen, die ebenen Schnitte krummer Flächen untersuchen zu können, geht Verf. von den Constructionen der descriptiven Geometrie aus und wendet nachher die analytische Geometrie der Ebene auf jene Constructionen an. Als Beispiel werden Schnitte eines elliptischen Kegels und beliebiger Umdrehungsflächen ausgerechnet. Lg.

A. HUSMANN. Zur Einführung in die Physik. Pr. Gymn. Petrinum zu Brilon. 19 S.

„Wenn man den physikalischen Unterricht ohne weiteres mit den in den Lehrplänen für die höheren Schulen (1882) der Secunda zugewiesenen Disciplinen „Magnetismus, Electricität, Wärme, chemischer Cursus" beginnt, so wird man bald auf gewisse Schwierigkeiten stossen, die darin bestehen, dass man zur Erklärung der zu besprechenden Erscheinungen Begriffe heranziehen muss, welche dem Schüler noch nicht bekannt sind und deren Erläuterung nur auf breiterer Grundlage erfolgen kann." Im 2. Teil zeigt Verfasser als die hauptsächlichsten der vorer-

wähnten Begriffe den Luftdruck, das archimedische Princip und das specifische Gewicht und gelangt dann zur Aufstellung einer Disposition, die im wesentlichen mit dem (abgedruckten) Plan d'Études des Lycées in Frankreich übereinstimmt. Im 2. Teil wird dann die erste Hälfte des Stoffes ausführlich behandelt und zwar: I. Feste Körper § 1 Festigkeit, § 2 Elasticität. II. Flüssige Körper § 3 Fortpflanzung des Druckes, § 4 Gesetz der kommunicirenden Röhren, § 5 Bodendruck, § 6 Druck nach oben, § 7 Seitendruck, § 8 Archimedisches Princip.

Die zweite Hälfte (III. luftförmige Körper § 9 bis § 18, IV. Verhalten der drei Körperarten zu einander § 19 und 20) ist einem der folgenden Programme vorbehalten. — Referent führt seit langer Zeit nach ungefähr demselben Plan seine Schüler in die Physik ein und hat daher die vorliegende Arbeit mit Interesse gelesen. Nur ein Bedenken ist ihm aufgestossen: wie wird der Verfasser ohne eingehende Behandlung der Fundamentalbegriffe „Gewicht, Hebel und Wage“ fertig? Lg.

F. Ludwig. Weitere Kapitel zur mathematischen Botanik. Hoffm. Z. XIX. 321-338.

Im Anschluss an einen früheren Artikel in Hoffm. Z. XIV werden hier die Zellteilung und der gesetzmässige Aufbau der Bacillarienbänder, sowie das Vorkommen bestimmter Zahlen bei den Organen höherer Gewächse und das Vermehrungsgesetz des Fibonacci behandelt. Lg.

O. Kaesberg. Beiträge zur Geschichte des naturwissenschaftlichen Unterrichts in den Schulen Deutschlands von seinen ersten Anfängen an bis zum Beginne des neunzehnten Jahrhunderts. Diss. Leipzig. 63 S. 8°.

P. Wildfeuer. Ueber die Anfänge des physikalischen Unterrichts in der Volksschule. Diss. Leipzig. 26 S. 8°.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

E. ILLIGENS. Zur Weierstrass'-Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen. Math. Ann. XXXIII. 155-160.

G. CANTOR. Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz von Illigens. Math. Ann. XXXIII. 476.

Herr Weierstrass, wie Herr Cantor führen die irrationalen Zahlen in die Arithmetik ein, indem sie dieselben, zunächst rein formal, unbegrenzten Folgen von rationalen Zahlen (die gewissen Beschränkungen unterliegen) „zuordnen", und auf Grund geeigneter Definitionen des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins zeigen, wie mit diesen neuen Grössen gerechnet wird. Herr Illigens erhebt nun dagegen den Einwand, ob überhaupt die so eingeführten neuen „Zahlen" in irgend einer Weise eine Vielheit oder Quantität ausdrücken, „ob sie nicht vielmehr blosse Zeichen für das Gegebensein einer Zahlreihe sind, sodass Quantitätsbezeichnungen auf sie anzuwenden gar keinen Sinn habe", und meint, diese Fragen verneinen zu müssen. Er will selber keine neue Definition aufstellen, sondern will nur an dem Postulat festgehalten wissen, dass die irrationalen Zahlen eine Quantität be-

zeichnen müssen. Denn z. B. bei $x^2 = 3$ sei die rechte Seite der Ausdruck für eine Vielheit, also müsse auch die linke durch eine Vielheit ausgedrückt werden.

Herr Cantor giebt, wie natürlich, darin Herrn J. Recht, dass seine irrationalen Zahlen, ebenso wie die Weierstrass'schen keine concreten Grössen seien, und dass die Begriffe Gleich, Grösser und Kleiner nur in übertragenem Sinne aufzufassen sind. Andererseits könne man trotzdem mit Hülfe dieser abstracten Gedankendinge eigentliche concrete Grössen (z. B. Strecken) quantitativ genau bestimmen.

Herr Illigens verlangt in der That, wie dem Referenten scheint, das Unmögliche: er erkennt die Irrationalzahlen als verschieden von den rationalen an, und will doch aus dem Gebiete der letzteren nicht heraustreten. My.

B. Christoffel. Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen. Annali di Mat. (2) XV. 253-276.

Der Verfasser constatirt zunächst, dass eine gemeinsame arithmetische Eigenschaft der Irrationalzahlen vor ihm nicht bekannt gewesen sei, wodurch sich das Streben Mancher erklären lasse, den Irrationalzahlen eine selbstständige Existenz abzusprechen. Er giebt in dieser Arbeit thatsächlich eine solche Eigenschaft, ein merkwürdiges Periodicitätsgesetz, und zieht daraus die Folgerung, dass nicht nur die ganzen Zahlen, sondern auch die rationalen und irrationalen als Ergebnis ein und derselben Art von „echter“ Abzählung angesehen werden können.

Die Irrationalzahlen (j) lassen sich, im Gegensatze zu den rationalen, am einfachsten indirect dadurch definiren, dass es kein ganzes vielfaches nj von j giebt, das selbst eine ganze Zahl wäre. Dagegen lässt sich immer aus nj die grösste ganze Zahl $[nj] = G(n)$ absondern und dadurch nj zerlegen in die beiden Teile:

$$nj = [nj] + (nj) = G(n) + (nj).$$

Da es nur darauf ankommt, ob für irgend ein ganzzahliges n der Rest (nj) verschwinden kann, so kann man sich auf Zahlen

j zwischen 0 und 1 beschränken. Durch Combination der drei, den Factoren m, n, $m+n$ entsprechenden Zerlegungen kommt sofort:

$$G(m+n) - G(m) - G(n) = (mj) + (nj) - \{(m+n)j\} = g_{m,n},$$

wo $g_{m,n}$ nur gleich Null oder gleich Eins sein kann. Speciell für $m = 1$ wird:

$$G(n+1) - G(n) = g_{1,n} = g_n$$

und nach Addition der succ. für $n = 2, 3, \ldots n$ so entstehenden Gleichungen:

$$g_{m,n} = (g_m + g_{m+1} + \cdots + g_{m+n-1}) - (g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1}) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Das hierin liegende Gesetz ist die Grundlage der weiteren Entwickelungen. Aus der vorletzten Relation lässt sich bald die eigentliche Bedeutung der Alternative $g_n = 0$ oder 1 entnehmen: Im ersteren Falle findet beim Uebergange von (nj) zu $\{(n+1)j\}$ eine Zunahme, im letzteren dagegen eine Abnahme statt und umgekehrt. Es ist übersichtlicher, statt der Zeichen 0, 1 die Symbole c (crescendo!) und d (decrescendo!) zu schreiben. Man lässt nun die Zahl n, von Eins beginnend, beliebig wachsen, so ergiebt sich eine aus den Elementen $c = 0$, $d = 1$ in bestimmter Aufeinanderfolge gebildete Reihe:

$$C = g_1 g_2 g_3 \ldots,$$

welche „die Charakteristik von j“ heisst.

Schon ein Beispiel, etwa $j = \sqrt{2} - 1$, zeigt eine auffallende Periodicitätserscheinung der Charakteristik, es wird nämlich:

$$C = \overset{\mathrm{I}}{(cd)}\ \overset{\mathrm{II}}{\overbrace{\{(cd)(ccd)\}}}\ \underbrace{[\overset{\mathrm{II}}{\overbrace{\{(cd)(ccd)\}}}\ \overset{\mathrm{I}}{(cd)}\ \overset{\mathrm{II}}{\overbrace{\{(cd)(ccd)\}}}]}_{\mathrm{III}}$$

$$\underbrace{(\mathrm{III\ II\ III})}_{\mathrm{IV}}\ \underbrace{(\mathrm{IV\ III\ IV})}_{\mathrm{V}}\ \text{etc.}$$

Nun könnte man hier noch versucht sein, das Fortschreitungsgesetz der einzelnen Gruppen I, II, III, IV, V etc. auf Rechnung des einfachen Kettenbruchs zu setzen, in den sich $\sqrt{2} - 1$ bekanntlich (mit dem constanten Nenner 2) entwickeln lässt.

Die Charakteristik einer Zahl j ersetzt diese selbst, wie auch ihre ganze Restreihe (sogar in Bezug auf die numerische angenäherte Ausrechnung derselben) vollkommen. Wie schwierig indess eine derartige Rechnung selbst in den einfachsten Fällen bereits ausfällt, zeigt die Lösung der Aufgabe, eine Irrationalzahl j mit einer ganzen Zahl n zu multipliciren, i. e. aus der Charakteristik von j diejenige von nj, oder, was auf dasselbe hinauskommt, des Restes (nj) herzuleiten.

Das oben betonte „Grundgesetz" jeder Charakteristik: $g_{m,n} = 0$ oder 1, lässt die Charaktéristiken in zwei Arten trennen, eine, welche mit c beginnt, und in welcher niemals d auf d, und eine zweite, welche mit d beginnt, und in welcher niemals c auf c folgen kann. Diese „complementären" Charakteristiken gehören einfach zu complementären Zahlen j, d. h. solchen, deren Summe gleich Eins ist.

Der Verfasser geht nunmehr zur Aufstellung des eigentlichen Bildungsgesetzes jeder Charakteristik über.

Dasselbe stützt sich zuvörderst auf die, wiederum unmittelbar dem „Grundgesetze" zu entnehmende Doppel-Bemerkung, dass, wenn mit $s-1$ die Anzahl der c bezeichnet wird, mit denen die Charakteristik C beginnt, ($C = c^{s-1}d\ldots$, wo $s = 1, 2, \ldots$ sein kann,) einmal in C nirgendwo mehr als s Elemente c aufeinander folgen können, sodann, dass auf jedes d mindestens $s-1$mal c folgt. Mit anderen Worten: C ist aus irgend einer (unbegrenzten) Folge von Gruppen $c_1 = c^{s-1}d$ und $d_1 = c^s d$ zusammengesetzt. Dabei ist übrigens s nichts anderes als der erste Nenner der Kettenbruchentwickelung von j. Setzt man demgemäss $j = \frac{1}{s+j_1}$, so lässt sich ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen den Charakteristiken C von j und C_1 von j_1 ermitteln. Ersetzt man nämlich in C_1 jedes Element c durch die Gruppe c_1, und jedes Element d durch die Gruppe d_1, und setzt dem Ganzen noch die Gruppe c_1 einmal voran, so entsteht C selbst, oder in Zeichen:

$$C(c/d) = c_1\, C_1(c_1/d_1).$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Processes resultirt das

Bildungsgesetz von C: „Ist, in einen Kettenbruch entwickelt, die Irrationalzahl j

$$j = (s s_1 s_2 s_3 \ldots)$$

und bildet man der Reihe nach die Aggregate:

$$c_1 = c^{s-1} d,\ c_2 = c_1^{s_1 - 1} d_1,\ c_3 = c_2^{s_2 - 1} d_2,\ c_4 = c_3^{s_3 - 1} d_3,\ \ldots,$$
$$d_1 = c^s d,\quad d_2 = c_1^{s_1} d_1,\quad d_3 = c_2^{s_2} d_2,\ \ldots,$$

so hat man für die Charakteristik C von j:

$$C = c_1 c_2 c_3 c_4 \ldots \text{“}.$$

Mit geringen Modificationen lässt sich das Gesetz auf die Rationalzahlen übertragen. Die Entwickelung der Charakteristik C von den Irrationalen j hängt dann aufs Engste zusammen mit derjenigen der Charakteristiken der successiven rationalen Näherungswerte des Kettenbruchs j.

Das Eigentümliche des Gesetzes besteht in einer Art periodischer Einschachtelung der einzelnen Gruppen c_1, d_1, c_2, d_2, ...

Es mag dem Referenten gestattet sein, seiner eigenen Auffassung dieser unstreitig hervorragenden Arbeit mit einigen Worten Raum zu geben.

Zunächst scheint ihm nicht deutlich zu sein, wie der Verfasser eine eigentlich „arithmetische“ Eigenschaft der Irrationalzahlen definirt wissen will. Wenn darunter eine positive, mit alleiniger Hülfe der ganzen Zahlen auszudrückende Eigenschaft verstanden sein soll, so ist doch wohl z. B. der bekannte Satz, demzufolge jede Irrationalzahl zwischen 0 und 1 auf eine einzige Art in einen unbegrenzten Kettenbruch mit positiv ganzzahligen Nennern entwickelt werden kann und umg., sicher als eine „arithmetische“ Eigenschaft zu bezeichnen. In der That ist das Charakteristikengesetz des Verf. im Wesentlichen als eine Fortbildung des genannten Satzes anzusehen, die im besonderen das Verhältnis des Kettenbruchwertes zu den Werten seiner Näherungsbrüche in einer sehr prägnanten, neuen Art fixirt.

Der Referent betrachtet daher die Sätze des Verfassers mehr als einen wesentlichen Beitrag zur Theorie der Kettenbrüche, wie denn auch Aufgaben der Art: die Summe oder das Product zweier Kettenbrüche wieder als Kettenbruch darzustellen, auf seiner Grundlage der Lösung näher gerückt sind.

Auf alle Fälle wird in dem verwickelten Gebiete der Irrationalzahlen vor der Hand der subjectiven Auffassung noch ein ziemlicher Spielraum erlaubt sein. My.

L. Baur. Zur Theorie der Dedekind'schen Ideale.

Math. Ann. XXXII. 151-156.

Die im Titel genannte Theorie ist von den Herren Dedekind und Weber in einer bekannten Arbeit entwickelt worden (F. d. M. XIV. 1882. 352). Der Verfasser giebt derselben eine einfachere und concretere Gestalt in Verfolgung eines Gedankenganges, den H. Dedekind in dem Supplement XI der Dirichlet'schen Vorlesungen über Zahlentheorie angegeben hat. Man kann nämlich einen Modul $[\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n]$ in mannigfachster Weise umformen, ohne seinen Inhalt zu ändern. So z. B., wenn unter den α mehrere ganze rationale Functionen einer Veränderlichen vorkommen, ist es erlaubt, sie durch ihren grössten gemeinschaftlichen Teiler zu ersetzen. Darauf gründet sich der wichtige Hülfssatz: Bilden die n „ganzen“ Functionen $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ eine „Basis“ eines algebraischen „Körpers“, so kann eine von ihnen stets gleich 1 gesetzt werden. My.

K. Schwering. Untersuchungen über die Normen complexer Zahlen.

Acta Math. XI. 265-296.

Bei diesen Untersuchungen wird weniger Gewicht auf die Zusammenstellung der Factoren in gewisse Unterproducte, als auf die Reduction der Frage nach der Entwickelung von Producten conjugirter Factoren einer gewissen Gliederzahl auf solche mit geringerer Gliederzahl gelegt. Dabei treten als besonders wichtig die „Kummer'schen Kongruenzen“

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m \equiv 0 \qquad (\text{mod } \lambda)$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m \lesseqgtr \lambda$$

hervor, wobei die $x_1, \cdots x_m$ gesuchte positive ganze, die $a_1, \cdots a_m$ gegebene positive oder negative ganze Zahlen sind.

So lassen sich die Fragen nach der gesamten Gliederzahl

des entwickelten Ausdruckes

$$(a_1 + \cdots + a_m)\, N\, (a_1 \alpha + a_2 \alpha^\delta + \cdots + a_m \alpha^\mu),$$

nach der Zahl der Glieder desselben Ausdrucks, welche alle m Elemente enthalten, nach den Coefficienten des Products für $m = 3$ u. s. w. bestimmen. No.

C. A. Laisant. Constructions graphiques de nombres transcendants. Soc. Philom. Mém. 63-68.

Die einzelnen Glieder einer convergenten Potenzreihe einer complexen Variabeln z werden auf Grund des bekannten Verhältnisses je zweier aufeinanderfolgenden in der $z = x + iy$-Ebene mit bekannter Anwendung ähnlicher Dreiecke als Punkte dargestellt. In manchen Fällen wird dann die Convergenz der Reihe zu einer unmittelbar anschaulichen Tatsache, so bei der Exponential- und logarithmischen Reihe. Daran knüpfen sich wiederum graphische Lösungen bekannter Aufgaben, so z. B. (mit Hülfe der ersteren Reihe) den Winkel zu finden, dessen zugehöriger Bogen (vom Einheitskreise) eine gegebene Länge hat.

My.

L. Kronecker. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme. Berl. Ber. 429-438, 447-465, 557-578, 595-612, 983-1016.

Referat folgt im nächsten Bande nach Beendigung der Arbeit.

K. Hensel. Ueber die Darstellung der Zahlen eines Gattungsbereiches für einen beliebigen Primdivisor. Kronecker. CIII. 230-237.

Herr Hensel knüpft an seine frühere Arbeit (J. für Math. CI; F. d. M. XIX. 1887. 68) an, um die Frage zu entscheiden, ob es in dem Gattungssystem (G) mod. P stets ein Fundamentalsystem von k Zahlen giebt, welches durch conjugirte Functionen $w, w^p, \cdots w^{p^{k-1}}$ gebildet wird. Es zeigt sich, dass dies tatsächlich der Fall ist, und der Beweis liefert gleichzeitig ein brauch-

bares Verfahren zur Bestimmung der Fundamentalzahlen und lässt ferner auch ihre Anzahl finden. No.

F. Mertens. Ueber die Ermittelung des Teiles einer ganzen ganzzahligen Function einer Veränderlichen. Wien. Ber. XCVII. 618-621.

Die Arbeit schliesst sich an die bekannte Kronecker'sche Methode an (Festschrift. S. 11), scheint aber die bezüglichen Untersuchungen des Herrn Runge (J. f. Math. IC) nicht zu kennen. No.

F. Mertens. Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Wien. Ber. XCVII.

Der Beweis für die Existenz von Wurzeln algebraischer Gleichungen wird so geführt, dass eine Methode geliefert wird, durch die man rationale complexe Zahlen erhält, welche die Bedingungen eines Grenzprocesses erfüllen und für x eingesetzt der gegebenen ganzen Function Werte erteilen, deren Normen von vorgeschriebener Kleinheit sind. Um dies durchzuführen wird ein Wert w bestimmt, welcher eine gewisse Bedingung hinsichtlich des Moduls der gegebenen Function erfüllt; dadurch kann man mit Hülfe der Newton'schen Näherungsmethode rationale complexe Werte ableiten, welche der Function Werte mit rasch abnehmenden Normen erteilen. No.

A. Hurwitz. Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen. Math. Ann. XXXII. 290-308.

Der Herr Verf. fasst die hauptsächlichsten Resultate seiner Untersuchung in die Sätze zusammen: 1) Jede eindeutige Transformation eines algebraischen Gebildes in sich ist periodisch, d. h. bildet man von irgend einer Stelle P ausgehend die Reihe $P, P', P'', \cdots$, in welcher jede Stelle der unmittelbar vorhergehenden entspricht, so schliesst sich die Reihe, indem stets etwa die

$(n+1)^{te}$ Stelle $P^{(n)}$ mit der Ausgangsstelle P identisch ist. 2) Die Periode n einer eindeutigen Transformation eines algebraischen Gebildes in sich kann eine gewisse von dem Geschlecht p abhängende Grenze nicht überschreiten. Der grösste Wert, welchen n annehmen kann, ist nämlich $10(p-1)$. 3) Jedes algebraische Gebilde, welches eine eindeutige Transformation in sich von der Periode n besitzt, lässt sich durch eine Gleichung der Gestalt $F(s^n, z) = 0$ definiren und zwar so, dass zugleich die eindeutige Transformation durch die Formeln $s' = e^{\frac{2i\pi}{n}} s$, $z' = z$ angegeben wird. No.

F. J. van den Berg. Nogmaals over afgeleide wortelpunten. Nieuw Arch. XV. 100-164.

Fortsetzung der früheren Untersuchungen des Verfassers über denselben Gegenstand, nämlich über die abgeleiteten Wurzelpunkte (Siehe F. d. M. XVI. 1884. S. 76). Zunächst wird die Aufgabe von einem allgemeinen Gesichtspunkt aufgefasst, insofern das regelmässige Vieleck, auf welches die Wurzelpunkte sich beziehen, durch ein anderes ersetzt wird, welches in und um zwei Kreise beschrieben werden kann, und alsdann werden die Wurzelpunkte die Eckpunkte eines willkürlichen Vielecks, welches in und um zwei Kegelschnitte beschrieben werden kann. Ebenso wie bei der früheren Betrachtung beginnt Verfasser mit einigen statischen Eigenschaften in Bezug auf das Gleichgewicht von Kräften, welche an den Eckpunkten eines Vielecks angreifen. Von da kehrt er zu seinem Gegenstand mit dem Satz zurück, dass jeder Wurzelpunkt der Abgeleiteten einer Gleichung charakterisirt wird als ein solcher Punkt, an dem Kräfte, welche nach allen Wurzelpunkten der Gleichung selbst gerichtet und umgekehrt proportional den Abständen von diesen Punkten sind, einander das Gleichgewicht halten. Der wichtigste Satz, zu dem Verfasser gelangt, ist der folgende: Wenn die Wurzelpunkte einer Gleichung die Eckpunkte eines in und um einen Kegelschnitt beschriebenen Vielecks sind, und die Potenzen von je zwei aufeinander folgenden Wurzelpunkten sich wie die anliegen-

den Segmente verhalten, in welche ihre Seite durch den Berührungspunkt geteilt wird, so bestehen die Wurzelpunkte der abgeleiteten Gleichung, ausser den ursprünglichen Wurzelpunkten, aus den Brennpunkten der Kegelschnitte, welche, sei es den Seiten, sei es den Diagonalen derselben Ordnung des Vielecks eingeschrieben werden können; hierzu kommt für den Fall eines geraden Vielecks noch der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt seiner Hauptdiagonalen. In einer Nachschrift wird dieser Hauptsatz der Untersuchung nochmals erweitert und auf analytischem Wege durch Liniencoordinaten ausgedrückt. G.

F. J. van den Berg. De constructie-figuur Voor de oplossing van een stelsel lineaire vergelykingen, beschouerd als Configuratie. Amst. Versl. en Meded. (3) V. 267-288.

Die vorliegende Abhandlung schliesst sich an eine Arbeit von Hrn. J. de Vries über ebene Configurationen an. Hier werden sie für ein System linearer Gleichungen benutzt, ein Gegenstand, den Verfasser bereits früher behandelt hat (Siehe F. d. M. XIV. 1887. 89). Ausführliche Berechnungen zeigen sodann, wie die Construction der Wurzeln von einem System von Gleichungen durch Anwendung besonderer Configurationen vereinfacht werden kann. Zum Schluss werden auch einige Eigenschaften von Determinanten, die auf den Gegenstand Bezug haben, mitgeteilt. G.

C. Isenkrahe. Ueber die Anwendung iterirter Functionen zur Darstellung der Wurzeln algebraischer und transcendenter Gleichungen. Math. Ann. XXXI. 309-317.

Der Herr Verfasser legt die algebraische oder transcendente Gleichung in der Form $x = f(x)$ zu Grunde, geht von einem Werte x_0 aus, bildet $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... und findet, dass diese Iteration nur dann gegen einen festen Wert $\xi_a = f(\xi_a)$ convergirt, wenn $|f'(\xi_a)| < 1$ ist; die Convergenz dahin ist um

so schneller, je kleiner dieser Modul ist; ξ_a wird nur von Einer Seite erreicht, wenn $f'(\xi_a)$ positiv ist, dagegen nähern sich $x_n, x_{n+1}, \ldots$ von beiden Seiten, wenn $f'(\xi_a)$ negativ ist; die Iteration der Function $x = (f(x)-xf'(x)):(1-f'(x))$ führt je nach den verschiedenen Anfangswerten x_0 zu sämtlichen reellen und complexen Wurzeln der Gleichung; u. s. w. Durch diese interessanten Resultate sind die früheren Untersuchungen des Herrn K. E. Hoffmann und des Referenten (vgl. F. d. M. XII. 1880. 75; XIX. 1887. 75) zum Abschluss gebracht. No.

J. Dolbnia. Sur le critère de Galois concernant la résolubilité des équations algébriques par radicaux. Nouv. Ann. (3) VII. 467-485.

Einfache und klare Darlegung der bezüglichen Theoreme, welche von dem Abel'schen Satze über die Darstellung der Wurzeln auflösbarer Gleichungen ausgeht und durch einfache substitutionentheoretische Theoreme zum Ziele führt. No.

Ch. Hermite. Sur un mémoire de Laguerre, concernant les équations algébriques. Rom. Acc. Pont. d. N. L. Mem. III. 155-164.

Herr H. beweist den von Laguerre gegebenen, F. d. Math. 1880, S. 71 besprochenen Satz auf directem einfachen Wege und fügt einige wichtige Bemerkungen hinzu. No.

J. P. Söderberg. Démonstration du théorème fondamental de Galois dans la théorie de la résolution algébrique des équations. Acta Math. XI. 297-302.

Es wird die Existenz der „Galois'schen Gruppe" einer Gleichung abgeleitet. No.

F. Kühnen. Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 27. Grades, von welcher die Geraden auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung abhängen. Diss. Marburg. 31 S. 8°.

H. W. Lloyd Tanner. A graphic representation of the theorems of Sturm and Fourier. Mess. (2) XVIII. 95-99.

Der Verf. giebt eine Methode zur Erläuterung des Sturm'schen Satzes über die reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen; dieselbe vermittelt eine klare Vorstellung von der Art, wie die Verteilung der Zeichen von Wurzel zu Wurzel sich ändert. Die Werte von x, der Unbekannten in einer vorgelegten Gleichung, werden längs einer horizontalen Linie, der x-Axe verteilt. Oberhalb dieser Linie wird die Zeichenebene durch Parallelen zur x-Axe in Streifen zerlegt. Jeder der Sturm'schen Functionen wird ein Streifen zugeeignet, aufeinander folgende Functionen haben benachbarte Streifen. Die Function, deren Wurzeln aufzusuchen sind, erhält den obersten Streifen, und die anderen Functionen werden der Reihe nach darunter gestellt. Die Zeichnung wird nach rechts und links durch verticale Striche abgegrenzt, welche den betrachteten Grenzwerten von x entsprechen. Der jeder Function zugehörige Streifen wird durch vertical aufwärts gezogene Linien von den Punkten der x-Axe aus weiter eingeteilt, welche die reellen Wurzeln der Function bedeuten. In jedem so erhaltenen Flächenstücke ist das Zeichen der Function bestimmt, in den Nachbarstücken eines Streifens sind die Zeichen entgegengesetzt (falls die entsprechende Function nicht zufällig gleiche Wurzeln hat). Wenn jeder Streifen nach dieser Weise bezeichnet ist, so werden diejenigen verticalen und horizontalen Striche, welche Flächen von entgegengesetzten Zeichen trennen, dicker ausgezogen. Diese dicken Striche bilden eine Anzahl zusammenhängender gebrochener Linien, welche der Verf. Wechsellinien (change-lines) nennt. Es wird gezeigt, dass jede Wechsellinie den einen Endpunkt an der linken Grenze, den anderen entweder an der oberen oder rechten hat. Dies ist nun

der Sturm'sche Satz; denn die Anzahl der Wechsellinien, welche eine Verticale treffen, ist die Anzahl der Zeichenwechsel in dem Systeme Sturm'scher Functionen für den entsprechenden Wert von x.

Der Verf. betrachtet auch die Anwendung dieses Diagramms auf den Fourier'schen Satz, und er bestimmt die Anzahl vollständiger Sturm'scher Diagramme, welche zu einem Polynom gegebenen Grades gehören. Der Zusammenhang des Diagramms mit Resultanten und Discriminanten wird ebenfalls angegeben.

Glr. (Lp.)

HAURE. Sur le théorème et les fonctions de Sturm. J. de Math. spéc. (3) II. 28-35, 51-57, 76-80.

Auszug aus den Kronecker'schen Untersuchungen. No.

Correspondance. Nouv. Ann. (3) VII. 302-303.

Ein Abonnent macht auf einige Ungenauigkeiten aufmerksam, die sich in dem Aufsatze von J. Collin: Sur le théorème de Sturm, Nouv. Ann. (3) VI. 266; (F. d. M. XIX. 1887, 70) finden. No.

AUG. POULAIN. Théorèmes sur les équations algébriques. J. de Math. spéc. (3) II. 80-83, 99-101, 123-127, 145-150, 169-172, 193-196, 217-220.

Herr Poulain beschäftigt sich mit der von Newton gegebenen Regel: Die Anzahl der imaginären Wurzeln von

$$a_0x^n+n.a_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2}+\cdots+na_{n-1}x+a_n=0$$

ist entweder gleich der Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe

$$a_0^2,\ a_1^2-a_0a_2,\ a_2^2-a_1a_3,\ a_3^2-a_2a_4,\ \ldots,\ a_{n-1}^2-a_{n-2}a_n,\ a_n^2$$

oder um eine gerade Zahl grösser. Er beweist dieselbe für $n=3, 4, 5$ und liefert einige Erweiterungen, die darauf hinauslaufen, dass die Regel auch dann noch gilt, wenn die Coefficienten mit gewissen Zahlen-Factoren der Reihe nach multiplicirt werden. No.

AUG. POULAIN. Théorèmes sur les équations algébriques et les fonctions quadratiques de Campbell. C. R. CVI. 470-473.

Die in der eben besprochenen Arbeit abgeleiteten Resultate werden ohne Beweis mitgeteilt. No.

E. LAMPE. Solution of question 7341. Ed. Times XLVIII. 106-107.

Die Lösung der Gleichungen (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 76):

$$yz(y+z-x) = a,\quad zx(z+x-y) = b,\quad xy(x+y-z) = c$$

kommt zurück auf die der kubischen Gleichung (wo $p = xyz$):

$$4p^3-(bc+ca+ab)p-abc = 0.$$

Ist $2bc = ab+ac$, so sind die drei reellen Werte von x einander gleich und unabhängig von p, nämlich $\sqrt[3]{\frac{1}{2}(b+c)}$. Lp.

FR. HOFMANN. Sur l'existence de trois racines réelles de l'équation qui détermine les axes principaux d'un cône. Nouv. Ann. (3) VII. 90-97.

Die Existenz der ersten reellen Wurzel wird aus dem ungeraden Grade der Gleichung geschlossen; die beiden anderen folgen dann durch eine einfach geometrische Construction. No.

F. HOFMANN. La solution géométriques de l'équation du quatrième degré. Nouv. Ann. (3) VII. 120-133.

Die Wurzeln der Gleichung

$$a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4 = 0$$

seien $x:y = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$; diese können als 4 Gerade gedeutet werden, welche die Parabel $y^2-x = 0$ ausser im Nullpunkt in 4 Punkten schneiden. Die Schar der Kegelschnitte durch dieselben ist

$$a_0x^2+4a_1xy+\mu y^2+(6a_2-\mu)x+4a_3y+a_4 = 0.$$

Durch die Lösung einer Gleichung dritten Grades kann μ so bestimmt werden, dass der Kegelschnitt in ein Geraden-Paar zerfällt. Der weitere Weg zur Lösung der Gleichung vierten Grades ist dann ersichtlich. No.

J. J. Sylvester and J. Hammond. On Hamilton's numbers. Part II. Lond. Phil. Trans. CLXXIX. 65-72.

Fortsetzung einer früheren Arbeit (s. F. d. M. XIX. 1887. 80). Der (weitergezählte) § 4 hat den besonderen Titel: Fortführung der asymptotischen Entwickelung für Hypotenusenzahlen auf eine unendliche Anzahl von Gliedern. Berichtigt wird die Entwickelungsform, welche im dritten Abschnitte angenommen war für $p-q$, die Hälfte irgend einer Hypotenusenzahl, nach Potenzen von $q-r$, der Hälfte der vorangehenden, und das gewonnene Endergebnis ist:

$$p-q = (q-r)^2+\frac{4}{3}(q-r)^{\frac{3}{2}}+\frac{11}{8}(q-r)+\frac{80}{81}(q-r)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{11}{45}(q-r)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2^3}{3^3}(q-r)^{\frac{1}{8}}+\frac{2^4}{3^4}(q-r)^{\frac{1}{16}}+\frac{2^5}{3^5}(q-r)^{\frac{1}{32}}+\cdots\right\},$$

d. h. hinter vier unregelmässigen Gliedern folgt ein regelmässiger Teil, der aus einem Factor $\frac{11}{45}(q-r)^{\frac{1}{2}}$ und aus einer Reihe besteht, deren allgemeines Glied $\frac{2^n}{3^n}(q-r)^{(\frac{1}{2})^n}$ ist.

Cly. (Lp.)

F. Brioschi. Sopra una trasformazione delle equazioni del quinto grado. Annali di Mat. (2) XVI. 181-189.

Ist $f(x_1, x_2)$ eine binäre Form fünften Grades, für welche $l = \frac{1}{2}(ff)_4$ sei, so besitzt sie drei Covarianten p, q, r dritter Ordnung der Grade 3, 5, 9. Man hat

$$p = -\tfrac{1}{2}(fl)_2, \quad q = (lp), \quad m = \tfrac{1}{2}(pp)_2, \quad r = (mp).$$

Ferner besitzt f 3 Invarianten der Grade 4, 8, 12

$$A = \tfrac{1}{2}(ll)_2, \quad B = (lm)_2, \quad C = \tfrac{1}{2}(mm)_2.$$

Bezeichnet man mit Δ die Discriminante von

$$f(x) = a_0 x^5 + 5a_1 x^4 + 10a_2 x^3 + \cdots + a_5 = 0,$$

so ist $\Delta = 16(A^2 - 144B)$.

Hermite hat die Gleichung fünften Grades durch

$$y = \frac{p(x)}{f'(x)}$$

transformirt. Hier geschieht die Transformation durch

$$y = 10\,\frac{q(x)}{f'(x)}.$$

Es entsteht

$$y^5 - 10By^3 + 40Cy^2 + 5(\tfrac{1}{5}AC + 5B^2)y + 4(\tfrac{1}{5}AB^2 + \tfrac{1}{5}A^2C - 54BC) = 0.$$

Setzt man

$$z = \frac{4\sqrt{5}}{\Delta^{\frac{1}{4}}}(12y + A),$$

so hat man die bekannten fünfwertigen Kronecker'schen Functionen. Setzt man

$$y = \tfrac{1}{3}\frac{A}{z^2+3}, \qquad J = -\frac{1}{3^6}\frac{A^3}{c},$$

so entsteht für $B = 0$

$$z^5 + 10z^3 + 45z + t = 0;\ t = -24\sqrt{3}\sqrt{J-1}.$$

Es werden die charakteristischen Eigenschaften der Formen festgestellt, für welche $B = 0$ ist. No.

F. Brioschi. Principii di una teoria sulla trasformazione delle equazioni algebriche. Annali di Mat. (2) XVI. 329-334.

Wie im vorherbesprochenen Aufsatze schon angedeutet ist, will Herr Brioschi die Theorie der Transformationen auf die der Formen gründen. Er geht von dem Hermite'sche Satze aus: „Sei $f(x,y)$ eine Form der Ordnung n und $\psi(x,y)$ eine ihrer Covarianten der Ordnung $(n-2)$, dann sind die Coefficienten der durch $y = \psi(x,1) : f'_x(x,1)$ transformirten Gleichung $f(x,1) = 0$ sämtlich Invarianten von $f(x,y)$." Hieran knüpft der Verfasser die von ihm selbst gegebenen Sätze: Ist x_r eine Wurzel von $f(x) = 0$ und $f(x) = (x - x_r)\varphi(x)$, dann lässt sich jede Cova-

riante von $f(x)$ der Ordnung m und des Grades p, in welcher statt x gesetzt wird x_r, als ganze rationale Function der Covarianten der Ordnung $m+p$ und des Grades p von $\varphi(x)$ darstellen, und jede Invariante des Grades p durch Covarianten der Ordnung p und des Grades p von $\varphi(x)$. Es wird, um diese Sätze anzuwenden, eine Methode abgeleitet, um für $x = x_r$ die Werte der Covarianten und die der Invarianten von $f(x)$ als Functionen der Covarianten und der Invarianten von $\varphi(x)$ zu bestimmen. Als Beispiel zu der aufgestellten Theorie wird der Fall $n = 6$ behandelt. No.

F. Brioschi. La forma normale delle equazioni del sesto grado. Rom. Acc. S. Rend. (4) IV. 301-305, 485-489.

Als Normalform einer Gleichung $u(x) = 0$ sechsten Grades wird diejenige bezeichnet, in welcher $u(x) = 0$ durch die Substitution

$$t_r = \frac{4ac-3b^2}{a}$$

übergeht, wobei $x_r (r = 1, \dots 6)$ die Wurzeln von $u(x) = 0$ und

$$a = \frac{1}{6} u'(x_r), \quad b = \frac{1}{5.6} u''(x_r), \quad c = \frac{1}{4.5.6} u'''(x_r)$$

bedeuten. In der ersten Note werden die Coefficienten der Normalform bestimmt, indem die transformirte Gleichung als Resultante zweier anderer aufgefasst wird; in der zweiten werden die Werte der Wurzeln $t_1, \dots t_6$ der transformirten Gleichung untersucht. No.

H. Maschke. La risoluzione della equazione di sesto grado.

F. Brioschi. Osservazioni sulla precedente comunicazione. Rom. Acc. S. Rend. (4) IV. 181-184.

Beide Mitteilungen führen die allgemeine Gleichung sechsten Grades auf die Form

$$x^6 + \alpha y^4 + \beta y^3 + \frac{\alpha^2}{4} y^2 + \gamma y + \delta = 0$$

zurück, welche in der Arbeit des Herrn Maschke (Ueber die lineare Gruppe der Borchardt'schen Moduln. Math. Ann. XXX. F. d. M. XIX. 1887. 140) gefunden wurde. Die sechs Wurzeln $y_1 \dots y_6$ erscheinen ausgedrückt durch die l. c. gegebenen Functionen φ, ψ von vier Grössen $z_1, \dots z_4$, welche als ϑ-Functionen definirt sind, die zu einer binären Form sechster Ordnung gehören, deren Invarianten durch α, β, γ, δ dargestellt werden.

No.

F. Brioschi. Sur l'équation du sixième degré. Acta Math. XII. 83-101.

Diese Arbeit bringt die ausführliche Darlegung der in der eben besprochenen Note des Herrn Brioschi gegebenen Andeutungen. Der Herr Verfasser geht von den Invarianten einer binären Form sechsten Grades aus, bespricht die Jacobi'sche, die Cayley'sche und die Malfatti'sche Resolvente, transformirt die allgemeine Gleichung sechsten Grades in ihre Normalform (siehe oben!), und zeigt, wie dieselbe mit Hülfe hyperelliptischer Functionen aufgelöst werden kann. No.

F. Wilshaus. Ueber die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen achten Grades. Diss. Marburg. 40 S. 8°.

Halphen. Correspondance. Nouv. Ann. (3) VII. 204.

Es seien die Polynome A_n bestimmt durch

$$A_n = x^2 A_{n-2} - (2n-1) A_{n-1}; \qquad A_1 = x - 1.$$

Dann liefert $y = A_n e^x . x^{-n}$ die Lösung der Riccati'schen Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx} = \left(\frac{n(n+1)}{x^2} + 1\right) y.$$

$A_{2n+1} = 0$ hat eine, $A_{2n} = 0$ hat keine reelle Wurzel. Es wird eine Bestimmung der Discriminate von A_n, sowie die symmetrische Function $\Pi(x_\alpha + x_\beta)$ gegeben. No.

M. d'Ocagne. Sur les équations algébriques à racines toutes réelles. C. R. CVI. 731-732.

Unter K_m^p werden die Zahlen verstanden, welche den Bedingungen

$$K_m^1 = 1, \quad K_m^m = 1, \quad K_m^p = pK_{m-1}^p + K_{m-1}^{p-1}$$

genügen, unter φ_{m+1} das Polynom

$$\varphi_{m+1} = K_{m+1}^1 + K_{m+1}^2 x + \cdots + K_{m+1}^{m+1} x^m.$$

Ist dann $Z = 0$ eine Gleichung des Grades p mit nur reellen Wurzeln, dann hat auch

$$\varphi_{m+1} Z + \frac{\varphi'_{m+1}}{1} xZ' + \frac{\varphi''_{m+1}}{1.2} x^2 Z'' + \cdots = 0$$

bei beliebigem m nur reelle Wurzeln. No.

G. Fouret. Sur une source d'équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles. C. R. CVI. 1135-1139.

G. Fouret. Sur certains types d'équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles. C. R. CVI. 1220-1222.

Hat die Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

nur reelle Wurzeln, so hat die Gleichung

$$a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x) = 0,$$

in der $f^{(n)}(x)$ ein Polynom vom Grade $n+k$ bedeutet, mindestens n reelle Wurzeln; besitzt sie dann mehr, so ist die Differenz eine gerade Zahl.

In der zweiten Note bemerkt Herr Fouret, dass der Satz im Wesentlichen schon von Hermite gegeben worden ist, und führt ein anderes Theorem an, mittels dessen man aus zwei Gleichungen, die beide nur reelle Wurzeln besitzen eine dritte von derselben Eigenschaft ableiten kann. No.

Ch. B. Solution de la question d'algèbre proposée pour l'admission à l'École Normale supérieure en 1888. Nouv. Ann. (3) VII. 314-317.

Befriedigt das Polynom $f(x)$ identisch die Gleichung

$$nf(x) = (x-a)f'(x)+bf''(x),$$

dann sollen die Coefficienten von $f(x)$, nach Potenzen von $(x-a)$ geordnet, bestimmt werden; die Bedingungen der Realität der Wurzeln sollen gesucht werden und gezeigt werden, dass die Wurzeln zwischen $a-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}|b|}$ und $a+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}|b|}$ liegen.

No.

N. Madsen. Rakkendviklinger af Rödderne i Ligningen $x^n+ax+b=0$. Zeuthen Tidss. (5) VI. 33-39.

Der Verfasser zeigt, wie man mittels der Reihenentwickelungen von Lagrange und Laplace immer alle Wurzeln der Gleichung $x^n+ax+b=0$ in convergente Reihen entwickeln kann. Er giebt in jedem Falle den Ausdruck des allgemeinen Gliedes der Reihe.

V.

D. Amanzio. Intorno ad una funzione isobarica. Atti dell' Accademia Pontaniana. XVII. 85-107.

Diese Arbeit kann als ein Beitrag zu den Untersuchungen über die transcendenten Gleichungen besonderer Art bezeichnet werden. Der Verfasser geht von der Betrachtung einer gewissen (isobarischen) Function $f(p,s)$ aus, welche auf die folgende Weise erklärt wird: Seien $a_1, a_2 \dots, a_n, p$ beliebige gegebene Grössen; s eine ganze Zahl; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ eine Auflösung der diophantischen Gleichung

$$\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n = s;$$

dann ist $f(p,s)$ gleich der Summe aller Grössen von folgendem Typus:

$$(p+s)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-1}\frac{a_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\frac{a_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!}\cdots\frac{a_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!};$$

dass alle Glieder von $f(p,s)$ dasselbe Gewicht s haben, ist aus dieser Definition ersichtlich. Die in Rede stehende Function besitzt noch viele andere wichtige Eigenschaften; man hat z. B.

$$\sum_{i=0}^{i=s} f(p,s-i)f(p',i) = f(p+p',s),$$

und die unendliche Reihe

$$1+f(p,1)x+f(p,2)x^2+\cdots$$

ist die p^{te} Potenz der anderen

$$1+f(1,1)x+f(1,2)x^2+\cdots$$

Aber das Interessanteste an ihr ist ihr Auftreten bei der Auflösung der Gleichung

$$a_1 z+a_2 z^2+\cdots+a_n z^n=\log\frac{z}{x}.$$

Man kann nämlich beweisen, dass sie, falls die Reihe

$$(1)\qquad x+f(p,1)x^2+f(p,2)x^3+\cdots$$

convergent ist, eine Wurzel jener Gleichung darstellt; allgemeiner würde die Reihe

$$x+\frac{1}{k}f(p,1)x^2+\frac{1}{k^2}f(p,2)x^3+\cdots,$$

unter der Voraussetzung der Convergenz, eine Wurzel der Gleichung

$$a_1 z+a_2 z^2+\cdots+a_n z^n=\frac{1}{k}\log\frac{z}{x}$$

darstellen.

Die Bestimmung der Convergenzbedingungen der Reihe (1) und die Erforschung der besonderen Gleichung $az^n=\log\frac{z}{x}$ bilden den Schluss der Arbeit. La.

Ch. Hermite, A. R. Johnson, D. Edwardes. Solutions of question 9072. Ed. Times. XLVIII. 21-22.

Die Gleichung

$$e^{2x}=\frac{(x+a+1)^2+1}{(x+a-1)^2+1},$$

in der a eine reelle Constante bedeutet, hat nur eine einzige reelle Wurzel, von demselben Vorzeichen wie a, von absoluter Grösse $< l(1+\sqrt{2})$. Lp.

C. W. Baur. Symmetrische und cyklische Behandlung einer algebraischen Frage. Böklen Mitt. II. 181-186.

Zwischen drei Unbekannten bestehen zwei lineare Gleichungen; die Werte der Unbekannten werden durch cyklische Ausdrücke der Coefficienten dargestellt. — Anwendung auf den Schnitt einer centrischen Fläche zweiten Grades mit einer Kugel.

No.

D. M. Sensenig. Numbers symbolized. An elementary algebra. New York. 315 S.

E. A. Bowser. College algebra. With numerous examples. New York.

E. A. Bowser. Academic algebra. With numerous examples. New-York.

P. André. Exercices d'algèbre, problèmes et théorèmes. Énoncés et solutions développées des questions proposées dans les cours d'algèbre no. 4 et no. 3 ainsi que dans l'algèbre de l'enseignement spécial. 4e éd. Paris. 480 S.

J. Schumacher. Zur Theorie der quadratischen Gleichungen. Schweinfurt. 57 S. 8°.

G. Z. Reggio. Complementi d'algebra per gli allievi degli Istituti Tecnici. Torino. Paravia.

Recension von P. Cassani in Ven. At. Riv. (3) I. 122-123

F. Gambardella. Lezioni di algebra complementare. Livorno. Giusti.

Capitel 2.
Theorie der Formen.

E. B. Elliott. On pure ternary reciprocants, and functions allied to them. Lond. M. S. Proc. XIX. 6-23.

Der Verfasser hat in früheren Arbeiten gezeigt, dass die reinen ternären Reciprokanten solche homogene und isobare Functionen der Differentialquotienten einer Function z nach den beiden unabhängigen Veränderlichen x, y sind, welche identisch verschwinden, wenn man gewisse Differentiationsprocesse auf dieselben anwendet. Für diese Differentiationsprocesse (annihilators) Ω_1, Ω_2, V_1, V_2 werden die Beziehungen

$$\Omega_1 V_1 - V_1 \Omega_1 = 0,$$
$$\Omega_2 V_2 - V_2 \Omega_2 = 0,$$
$$\Omega_2 V_1 - V_1 \Omega_2 = V_2,$$
$$\Omega_1 V_2 - V_2 \Omega_1 = V_1$$

abgeleitet und aus diesen Beziehungen folgen dann eine Reihe von Sätzen über ternäre reciprokante Bildungen und insbesondere über die Erzeugung solcher Bildungen aus Semiinvarianten gewisser binärer Formen. Ht.

E. B. Elliott. On cyclicants, or ternary reciprocants and allied functions. Lond. M. S. Proc. XIX. 377-405.

An Stelle der Ausdrücke „ternäre Reciprokante" und „reine ternäre Reciprokante" braucht der Verfasser die Ausdrücke „Cyklikante" und „reine Cyklikante". Die Formen

$$(z_{20}, z_{11}, z_{02})(-z_{01}, z_{10})^2, \quad (z_{30}, z_{21}, z_{12}, z_{03})(-z_{01}, z_{10})^3, \ldots,$$

wo allgemein

$$z_{rs} = \frac{1}{r!\,s!}\,\frac{d^{r+s}z}{dx^r dy^s}$$

bedeutet, nennt der Verfasser „cyklikogenitive Formen zweiter, dritter etc. Ordnung". Eine Semiinvariante der cyklikogenitiven

Formen, welche überdies der Differentialgleichung

$$V_1 \equiv \Sigma \left\{ \Sigma(r z_{rs} z_{m+1-r,n-s}) \frac{d}{dz_{mn}} \right\} = 0$$

genügt, heisst eine Semicyklikante und eine Covariante der cyklikogenitiven Formen, deren Leitglied eine Semicyklikante ist, heisst eine Cocyklikante. Von diesen reciprokanten Bildungen gelten die beiden folgenden Sätze: I. Eine reine Cyklikante reproducirt sich bis auf einen nur von den ersten Ableitungen und von den Substitutionscoefficienten l, m, n, p, l', m', n', p', l'', m'', n'', p'' abhängigen Factor, wenn man die Veränderlichen der linearen Transformation

$$\begin{aligned} x &= lX + mY + nZ + p, \\ y &= l'X + m'Y + n'Z + p', \\ z &= l''X + m''Y + n''Z + p'' \end{aligned}$$

unterwirft. II. Eine reine Semicyklikante (beziehungsweise Cocyklikante) bleibt ungeändert bei Anwendung der specielleren Transformation

$$\begin{aligned} x &= lX + mY + nZ + p, \\ y &= l'X + m'Y + n'Z + p', \\ z &= n''Z + p''. \end{aligned}$$

Es folgen Anwendungen auf die Integration von solchen Differentialgleichungen, welche man erhält, wenn man reine Cyklikanten, Semicyklikanten oder Cocyklikanten gleich Null setzt.

Ht.

A. Berry. Simultaneous reciprocants. Quart. J. XXIII. 260-288.

Die Arbeit beschäftigt sich mit denjenigen Functionen, welche zu den gewöhnlichen Reciprokanten in der Beziehung stehen, wie die Simultaninvarianten zweier binären Grundformen zu den Invarianten einer einzelnen Grundform. Legen wir nämlich zwei Paare von Veränderlichen x, y und x', y' zu Grunde und transformiren dieselben durch die nämliche (orthogonale, lineare oder lineargebrochene) Substitution, so wird eine simultane Reciprokante von x, y und x', y' definirt als eine ganze

und rationale Function von

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\quad x',\ y',\ \frac{dy'}{dx'},\ \frac{d^2y'}{dx'^2},\ \ldots,$$

welche nach Ausführung jener simultanen Transformation, abgesehen von einem Factor, ungeändert bleibt. Der Verfasser stellt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, damit eine Function jener Grössen eine simultane Reciprokante ist, und geht dann auf die Beziehungen dieser Theorie zu der Theorie der simultanen Invarianten binärer Grundformen ein. Die angewandten Methoden sowie die gefundenen Resultate entsprechen den bekannten Sätzen der Theorie der gewöhnlichen Reciprokanten.

Ht.

P. A. MacMahon. The algebra of multi-linear partial differential operators. Lond. M. S. Proc. XIX. 112-128.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der Untersuchungen des Verfassers über die Differentiationsprocesse $(\mu,\ \nu;\ m,\ n)$ (vergl. F. d. M. XIX. 1887. 94). Die successive Anwendung zweier solcher Processe P und Q wird mit $(P)\,(Q)$ bezeichnet (äussere Multiplication); dieser Process $(P)\,(Q)$ lässt sich zusammensetzen aus den beiden folgenden einfacheren Processen: nämlich aus der symbolischen (inneren) Multiplication von P und Q, welche mit (PQ) bezeichnet wird, und zweitens aus der sogenannten symbolischen Addition von P und Q, welche mit $(P+Q)$ bezeichnet wird. Die Bedeutung der beiden letzteren Processe ist aus der Identität

$$(P)(Q) = (PQ)+(P+Q)$$

ersichtlich. Es werden die entsprechenden Formeln für drei und mehr Processe aufgestellt. Die in diesem Gebiete herrschenden Rechnungsgesetze weisen eine Beziehung auf zu der Berechnung der symmetrischen Functionen von beliebig vielen Grössen $\alpha,\ \beta,\ \ldots.$ Man erkennt diese Beziehung, wenn man die bekannte Formel

$$\Sigma\alpha^l\Sigma\alpha^m = \Sigma\alpha^l\beta^m+\Sigma\alpha^{l+m}$$

oder bei Benutzung der in der Theorie der symmetrischen Func-

tionen üblichen Symbolik

$$(l)(m) = (lm) + (l+m)$$

mit der obigen Formel für die Processe P und Q vergleicht.

Ht.

A. Capelli. Ricerca delle operazioni invariantive fra più serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie. Napoli Rend. (2) II. 45-46.

Capelli. Una leggi di reciprocità per le operazioni invariantive fra due serie di variabili s^{rie}. Napoli Rend. (2) II. 189-194.

In der ersten Note setzt der Verfasser seine früheren Untersuchungen (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 92, u. XIX. 1887. 107 u. 108) über die Differentiationsprocesse von der Gestalt

$$D_{xy} = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots + x_\mu \frac{\partial}{\partial y_\mu}$$

fort und dehnt die früher für zwei Reihen von Veränderlichen gefundenen Sätze auf beliebig viele Reihen von Veränderlichen aus. Es wird angegeben, wie man aus Differentiationsprocessen von der Gestalt

$$\Sigma(x_{i_1} y_{i_2} \dots u_{i_k}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial y_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial u_{i_k}} \right)$$

solche Operationen zusammensetzen kann, welche mit jedem anderen Operationsprocesse, also insbesondere mit $D_{xy}, \dots, D_{xu}, \dots$ vertauschbar sind.

In der zweiten Note kommt der Verfasser wieder auf den Fall von zwei Veränderlichenreihen zurück und betrachtet insbesondere solche aus D_{xx}, D_{xy}, D_{yx}, D_{yy} zusammengesetzte Operationen, in denen jedes Glied den Factor D_{xy} im Ganzen ebensooft als den Factor D_{yx} enthält. Von einer solchen Operation wird gezeigt, dass sie ihren Wert nicht ändert, wenn man überall in D_{xy} und D_{yx} die Indices x, y mit einander vertauscht und gleichzeitig in jedem Gliede die Reihenfolge der Differentiationsprocesse umkehrt. So ist beispielsweise

$$D_{xy}^3 D_{yy}^2 D_{yx}^7 D_{xx}^5 D_{xy}^4 = D_{yx}^4 D_{xx}^5 D_{xy}^7 D_{yy}^2 D_{yx}^3.$$

Ht.

A. Capelli. Ricerca delle operazioni invariantive fra più serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie. Atti della Reale Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli (2) I. 17 S.

Diese Arbeit hängt mit den früheren Aufsätzen des Verfassers: Sopra la permutabilità delle operazioni invariantive (Nap. Rend. XXV. 134-141; F. d. M. XVIII. 1886. 92) und: Osservazioni sopra le relazioni che possono aver luogo identicamente fra le operazioni invariantive (Nap. Rend. (2) I. 110-15; F. d. M. XIX. 1887. 107-8) zusammen, sowie auch, wenn gleich doch nicht so eng, mit: Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche (Rom. Acc. L. Mem. (3) XII. 529 598) und: Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen (Math. Ann. XXIX. 331-338; F. d. M. XIX. 1887. 151). Sie beschäftigt sich mit der Bestimmung der allgemeinsten invarianten Operation, welche mit jeder anderen Operation von derselben Beschaffenheit vertauschbar ist, jedoch mit der Beschränkung, dass jeder Term der zu untersuchenden Operation höchstens eine einzige Derivation in Bezug auf jede Reihe von Variabeln enthalten soll. Sind die n Variabelnreihen:

$$x = x_1, x_2, \dots, x_\mu;\quad y = y_1, y_2, \dots, y_\mu; \dots;\quad u = u_1, u_2, \dots, u_\mu$$

gegeben, bezeichnet J eine ganze rationale Function mit constanten Coefficienten, und setzt man:

$$D_{pq} = q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \dots + q_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu},$$

so ist:

$$\Delta = J(D_{xx}, D_{xy}, D_{yx}, D_{xz}, \dots)$$

die allgemeinste invariante Operation, und es handelt sich nur noch darum, die Form von J derart zu bestimmen, dass Δ den anfangs gestellten Bedingungen genügt. Dazu setzen wir:

$$H_{xy\dots u} = \begin{vmatrix} D_{\xi x}, & D_{\xi y}, & \dots, & D_{\xi u}, \\ D_{\eta x}, & D_{\eta y}, & \dots, & D_{\eta u}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{\omega x}, & D_{\omega y}, & \dots, & D_{\omega u}, \end{vmatrix} D_{x\xi}\, D_{y\eta} \dots D_{u\omega},$$

wo:

$$\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu;\ \eta = \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu;\ \ldots;\ \omega = \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$$

Hülfsveränderliche sind, und die Entwickelung der Determinante derart geschehen soll, dass in jedem Gliede die Factoren nach derselben Aufeinanderfolge der Colonnen, denen sie angehören, geordnet sind. Die Operation $H_{xy\ldots u} = H_n$ ist vertauschbar, so auch die Operation:

$$H_{n-1} = H_{yz\ldots u} + H_{xz\ldots u} + \cdots$$

d. i. die Summe der Operationen H bei welcher jedesmal eine Variable weggelassen wird; und dieselbe Eigenschaft kommt den auf analoge Weise definirten Operationen

$$H_{n-2}, H_{n-3}, \ldots, H_2, H_1 = D_{xx} + D_{yy} + \cdots + D_{uu}$$

zu. Die Operationen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sind linear unabhängig, und die allgemeinste Operation von der verlangten Beschaffenheit ist:

$$Q = \alpha_0 + \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \cdots + \alpha_n H_n,$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ willkürliche Constanten sind.

Man kann aber Q unter zwei andere Formen setzen.

Ist

$$H_n(\varrho) = \begin{vmatrix} D_{xx}+\varrho & D_{xy} & \ldots & D_{xu} \\ D_{yx} & D_{yy}+\varrho & \ldots & D_{yu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{ux} & D_{uy} & & D_{uu}+\varrho \end{vmatrix},$$

so wird bewiesen, dass $H_n(\varrho)$ für jeden Wert von ϱ eine vertauschbare Operation ist, und wenn man:

$$H_n(\varrho) = \varrho^n + \varrho^{n-1}K_1 + \varrho^{n-2}K_2 + \cdots + K_n$$

setzt, wo $K_n = H_n(0) = H_n$, so sind $K_1, K_2, \ldots, K_n$ vertauschbare, linear unabhängige Operationen, woraus folgt, dass $H_1, H_2, \ldots, H_n$ durch dieselben linear ausgedrückt werden können. Andererseits kann jede $H_n(\varrho)$ durch $1, H_n(0), H_n(1), \ldots, H_n(n-1)$ mit Hülfe der Lagrange'schen Interpolationsformel ausgedrückt werden. Folglich kann die allgemeinste Operation Q auf die Form einer linearen Function, entweder von $H_1, H_2, \ldots, H_n$, oder von $K_1, K_2, \ldots, K_n$, oder endlich von $H_n(0), H_n(1), \ldots, H_n(n-1)$ gebracht werden.

Betrachten wir zum Beispiel die Cayley'sche Operation:

$$\Omega = \Sigma \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial z_3} \cdots \frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Es ist $p = n$; Ω ist bekanntlich vertauschbar mit jeder Operation D_{pq}, wo p und q verschieden sind, und:

$$Q_h = (xy \dots u)^h \Omega^h,$$

wo h irgend eine ganze Zahl ist, ist vertauschbar mit jeder Operation D_{pp} oder D_{pq}. Man findet:

$$Q_h = H_n(-h+1).\ H_n(-h+2).\ \cdots.\ H_n(-1).\ H_n(0);$$

benutzt man aber die Formel:

$$[H_n(\varrho + h)]^k = (xy \dots u)^{-h} [H_n(\varrho)]^k (xy \dots u)^h,$$

woraus folgt:

$$H_n(\varrho + h).\ H_n(\varrho + h - 1). \dots .\ H_n(\varrho + h - i)$$
$$= (xy \dots u)^{-h} H_n(\varrho).\ H_n(\varrho - 1). \dots .\ H_n(\varrho - i)\,(xy \dots u)^h,$$

so ergiebt sich:

$$H_n(1).\,H_n(2). \dots .\,H_n(h) = (xy \dots u)^{-h} Q_h (xy \dots u)^h = \Omega^h (xy \dots u)^h,$$

oder:

$$\Omega^h f = \frac{H_n(-h+1).\ H_n(-h). \dots .\,H_n(-2).\ H_n(-1).\ H_n(0) f}{(xy \dots u)^h}$$

$= H_n(1).\ H_n(2) \dots H_n(h) \left[\frac{f}{(xy \dots u)^h}\right]$, wo f eine beliebige Function bezeichnet. Vi.

A. R. Forsyth. Invariants, covariants and quotient-derivatives associated with linear differential equations. Lond. Phil. Trans. CLXXIX. 377-489.

Die Arbeit behandelt ein „System" (engl. „set") von Invarianten und Covarianten linearer Differentialgleichungen (oder auch Formen) einer allgemeinen Ordnung. Das System wird als vollständig nachgewiesen, d. h. es wird gezeigt, dass jede Covarianten-Function von gleichem Typus als eine Function der Glieder des Systems ausgedrückt werden kann, wobei die einzigen zur Bildung des Ausdrucks erforderlichen Operationen rein

algebraisch sind, die Differentiation also nicht einschliessen. Die Transformationen, denen die Differentialgleichungen unterworfen werden, sollen nach Voraussetzung die allgemeinsten sein, welche mit der Erhaltung ihrer Ordnung und ihres linearen Charakters verträglich sind; sie ergeben sich somit als eine lineare Transformation der abhängigen Veränderlichen und eine beliebige Transformation der unabhängigen. Die Covarianten-Eigenschaft der betrachteten Functionen besteht in der Bedingung, dass, wenn für die transformirte Gleichung dieselben Functionen gebildet werden, sie denen für die ursprüngliche Gleichung gleich sind, abgesehen von einem Factor $(dz/dx)^{\mu}$, wo z und x bezw. die neue und die ursprüngliche unabhängige Veränderliche bedeuten.

Den grösseren Teil der Abhandlung bilden Untersuchungen über die Formen der Functionen, über ihre Unabhängigkeit und über Methoden zu ihrer Bildung. Tabellen für die Functionen sind nicht berechnet worden; meistenteils werden die Ausdrücke für die Functionen in ihren Formen als mit der Differentialgleichung associirt gegeben, wenn diese in einer impliciten allgemeinen kanonischen Form angenommen ist, und nur in vereinzelten Fällen werden die Functionen in Verbindung mit einer expliciten allgemeinen Form gegeben. Der erste Abschnitt ist eine historische Einleitung, in welcher Verweisungen auf frühere Autoren gegeben werden: Cockle, Laguerre, Brioschi, Malet, Halphen; insbesondere werden einige der von Halphen in seiner bekannten Abhandlung und in einem sich anschliessenden Aufsatze mitgeteilten Resultate erörtert.

Die in den acht Abschnitten der Arbeit abgehandelten Gegenstände sollen in aller Kürze aufgezählt werden. 1. Geschichte. 2. Fundamentale Invarianten. 3. Abgeleitete Invarianten. 4. Associirte Veränderliche. 5. Identische und gemischte Concomitanten. 6. Anwendung auf Differentialgleichungen zweiter, dritter und vierter Ordnung. 7. Quotienten-Ableitungen. 8. Das in den Abschnitten 2, 3 und 5 erhaltene System von Concomitanten ist algebraisch vollständig.

Es erscheint zweckmässig, auf die bemerkenswerte Gestalt der im zweiten Abschnitt betrachteten Invarianten θ hinzuweisen.

Diese werden zunächst für eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von folgender Form berechnet:

$$\frac{d^4u}{dz^4} + 6P_2\frac{d^2u}{dz^2} + 4P_3\frac{du}{dz} + P_4u = 0,$$

in der das zweite Glied fehlt, und der allgemeine Ausdruck besteht erstens aus einer Anzahl linearer Functionen der Coefficienten P und Ableitungen in Bezug auf z und zweitens aus Gliedern zweiter und höherer Ordnung in diesen selben Grössen; jedoch besteht die Eigentümlichkeit, dass alle diese Glieder zweiter und höherer Ordnung den Factor P_2 enthalten und darum verschwinden, sobald $P_2 = 0$ ist, mit anderen Worten für die kanonische Form

$$\frac{d^4u}{dz^4} + 4P_3\frac{du}{dz} + P_4u = 0,$$

in der das zweite und das dritte Glied fehlen, eine Form, auf welche die allgemeine Gleichung durch eine simultane passende Vertauschung der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen zurückgeführt werden kann. In Bezug auf diese kanonische Form betrachtet, sind die fraglichen Invarianten also lineare Invarianten.

Die im vierten Abschnitte eingeführten associirten Veränderlichen sind die Werte von Determinanten, welche aus den particulären Lösungen u_1, u_2, u_3, ... der Differentialgleichung und aus den Ableitungen dieser Grössen nach z gebildet sind. So sind die associirten Veränderlichen erster Klasse die aus der Matrize

$$\begin{vmatrix} u_1', & u_2', & u_3', & \dots \\ u_1, & u_2, & u_3, & \dots \end{vmatrix}$$

gebildeten Determinanten, die der zweiten Klasse aus der Matrize

$$\begin{vmatrix} u_1'', & u_2'', & u_3'', & \dots \\ u_1', & u_2', & u_3', & \dots \\ u_1, & u_2, & u_3, & \dots \end{vmatrix}$$

u. s. w., und im fünften Abschnitte finden wir die allgemeine Folgerung, dass das Aggregat geeigneter, mit einer Differential-

form oder -Gleichung associirten Concomitanten aus drei Klassen besteht:

A. Invarianten, welche Functionen der Coefficienten der Form oder Gleichung sind.

B. Identische Covarianten, welche 1) Functionen der abhängigen Variable und ihrer Ableitungen sind (die, wofern sie von hinreichend hoher Ordnung sind, sich in gemischte Covarianten verwandeln, wenn sie mit der Differentialgleichung associirt werden), und 2) Functionen der associirten abhängigen Variabeln und ihrer Ableitungen; aber jede Function, welche mehr als eine abhängige Variable enthält, ist zusammengesetzt.

C. Gemischte Covarianten, welche Functionen der abhängigen, ursprünglichen und associirten Variabeln sind (aber nicht mehr als eine abhängige Variable enthalten) und ausserdem von den Invarianten und ihren Ableitungen.

Sobald das vollständige System nicht zusammengesetzter Invarianten und das vollständige System nicht zusammengesetzter identischer Covarianten in jeder der abhängigen Variabeln beibehalten werden, so bestehen die unabhängigen nicht zusammengesetzten gemischten Covarianten nur aus den Jacobi'schen Determinanten erster Ordnung von irgend einer Invariante und jeder der unabhängigen Variabeln der Reihe nach.

Cly. (Lp.)

A. R. Forsyth. A class of functional invariants. Lond. R. S. Proc. XLIII. 431-433.

Auszug aus einer in den Phil. Trans. für 1889 später veröffentlichten Abhandlung. Cly. (Lp.)

A. R. Forsyth. Homographic invariants and quotient derivatives. Mess. (2) XVII. 154-192.

Die in dieser Abhandlung niedergelegten Untersuchungen sind zu dem Zwecke unternommen worden, die Beziehung aufzufinden, in welcher eine Functionsklasse, die sogenannten Quotienten-Ableitungen, zu den Reciprocanten stehen. Diese

Quotienten-Ableitungen haben ausser anderen Eigenschaften die, covariant zu sein für eine homographische Transformation der abhängigen und der unabhängigen Veränderlichen bei gleichzeitiger Anwendung derselben, und daher auch bei getrennter. Aus ihren Gestalten ergiebt sich jedoch offenbar, dass ihr Bestand nicht die vollständige Schar solcher Functionen ausmacht; somit war es des Verfassers erstes Ziel, diese vollständigen Scharen für jede der Combinationen der homographischen Transformation zu erhalten. Functionen von den in dieser Arbeit betrachteten Arten hat zuerst Hr. Rogers angegeben (Lond. M. S. Proc. XVII. 220-231, F. d. M. XVIII. 1886. 90); dieser hat jedoch, abgesehen von dem Falle der ersten Art, seine Forschung auf die Herleitung der partiellen Differentialgleichungen beschränkt, denen die Functionen genügen, weil die Ableitung homographischer Reciprocanten sein Gegenstand war.

Der einfachste Weg zur Gewinnung der Quotienten-Ableitungen ist der folgende. Man betrachte beispielsweise eine Gleichung dritter Ordnung $\frac{d^3u}{dx^3} = 0$, deren Stammgleichung $u = A + Bx + Cx^2$ ist; ferner sei y der Quotient zweier verschiedenen Lösungen u_1 und u_2 dieser Gleichung, sodass $yu_1 = u_2$. Da nun die Ableitungen von u von der dritten Ordnung an verschwinden, so ist:

$$\begin{aligned} u_1 y''' + 3y'' u_1' + 3y' u_1'' &= 0, \\ u_1 y^{IV} + 4y''' u_1' + 6y'' u_1'' &= 0, \\ u_1 y^{V} + 5y^{IV} u_1' + 10y''' u_1'' &= 0, \end{aligned}$$

mithin ergiebt sich durch Elimination von u_1, u_1', u_1'' (wenn man noch untere Indices als Differentiationszeichen benutzt):

$$[y, x]_3 = \begin{vmatrix} y_3 & 3y_2 & 3y_1 \\ y_4 & 4y_3 & 6y_2 \\ y_5 & 5y_4 & 10y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

eine Differentialgleichung fünfter Ordnung; ihre Stammgleichung ist:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2}{D + Ex + Fx^2}.$$

Die Function $[y, x]$ heisst die kubische Quotienten-Ableitung. Die Gleichung zweiter Ordnung $d^2u/dx^2 = 0$ führt ebenso auf den wohlbekannten Schwarz'schen Differentialausdruck

$$[y, x]_2 = \begin{vmatrix} y_2 & 2y_1 \\ y_3 & 3y_2 \end{vmatrix};$$

die Gleichung vierter Ordnung $d^4u/dx^4 = 0$ führt auf eine ebenso gebildete Quotienten-Ableitung vierter Ordnung:

$$[y, x]_4 = \begin{vmatrix} y_4 & 4y_3 & 6y_2 & 4y_1 \\ y_5 & 5y_4 & 10y_3 & 10y_2 \\ y_6 & 6y_5 & 15y_4 & 20y_3 \\ y_7 & 7y_6 & 21y_5 & 35y_4 \end{vmatrix},$$

u. s. w. Die Eigenschaft der homographischen Invarianz wird durch die Gleichung gegeben:

$$\left[\frac{ay+b}{cy+d}, \frac{ex+f}{gx+h}\right]_n = \frac{(ad-bc)^n}{(eh-fg)^{n^2}} \frac{(gx+h)^{2n^2}}{(cy+d)^{2n}} [y, x]_n.$$

Noch viele andere Eigenschaften der Functionen werden ebenfalls ermittelt. Glr. (Lp.)

J. Deruyts. Sur la différentiation mutuelle des fonctions invariantes. Belg. Bull. (3) XVI. 207-215.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 149-150.

Folgerungen aus der folgenden Bemerkung, die zwar sehr einfach ist, aber dennoch nicht gemacht zu sein scheint. Es sei I eine derartige Invariantenform, dass

$$I(Q', Q'', \ldots) = \delta^\lambda I(q', q'', \ldots)$$

ist; dann folgt mit Notwendigkeit:

$$I(P', P'', \ldots) = \delta^\lambda I(p', p'', \ldots),$$

wenn die P mit Hülfe der p sich ebenso ausdrücken lassen wie die Q mittels der q. Der Ausdruck $I(p', p'', \ldots)$ besitzt die Invarianteneigenschaft, wenn sich die in den p enthaltenen Grössen als ganze Functionen von Grössen ausdrücken lassen, welche den in q enthaltenen analog sind, und wenn ausserdem die Grössen P, abgesehen von einer Potenz von δ, dadurch er-

halten werden, dass man in den p die Grössen q durch ihre transformirten Q ersetzt. Mn. (Lp.)

J. Deruyts. Sur quelques propriétés des transformations linéaires. Belg. Bull. (3) XVI. 576-589.

Verallgemeinerung der Ergebnisse aus der obigen Abhandlung. Mn. (Lp.)

S. Lie. Die Begriffe Gruppe und Invariante. Newcomb. Am. J. XI. 182-186.

Die Arbeit richtet sich gegen einen Brief von Halphen, welcher in einer Abhandlung von Sylvester (American Journal IX) abgedruckt ist. In diesem Briefe betrachtet Halphen eine Schar von algebraischen Transformationen

$$x'_k = f_k(x_1, \dots, x_n;\, a_1, \dots, a_r) \qquad (k = 1,2,\dots,n)$$

mit r Parametern $a_1, \dots, a_r$ zwischen den Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ und $x'_1, \dots, x'_n$ und fragt nach allgemeinen Kriterien dafür, ob eine solche Schar von Transformationen Invarianten besitzt. Nach der Definition von Halphen bestimmen jene Transformationen eine Gruppe, wenn sich aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x'_k &= f_k(x_1, \dots, x_n;\, a_1, \dots, a_r) \\ x''_k &= f_k(x_1, \dots, x_n;\, b_1, \dots, b_r) \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

durch Elimination der Grössen x_k Relationen von der Gestalt

$$x''_k = f_k(x'_1, \dots, x'_n;\, A_1, \dots, A_r) \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ergeben. Der Verfasser hält diese Definition für unzureichend; er führt ferner aus, dass Halphen im Laufe seines Briefes verschiedene Annahmen macht, welche wirkliche Beschränkungen des ursprünglich aufgestellten Problems sind, und dass er selbst das so beschränkte Problem nicht völlig erledigt. Insbesondere wendet sich der Verfasser gegen die Behauptung von Halphen, dass ein System von Transformationsgleichungen der obigen Art, aus welchem sich durch Elimination der Parameter $a_1, \dots, a_r$ genau $n-r$ Relationen zwischen den x_k und x'_k ergeben, nur

dann genau $n-r$ unabhängige Invarianten besitzt, wenn es in seinem Sinne eine Gruppe bestimmt. Ein sehr einfaches Beispiel lehrt die Unrichtigkeit dieser Behauptung. Die Transformation

$$x_1' = x_1 + a, \quad x_2' = -x_2$$

erfüllt nämlich jene gestellten Bedingungen und doch bestimmt dieselbe, wie man leicht einsieht, keineswegs in dem Halphen'schen Sinne eine Gruppe. Ht.

P. Mansion. Sur la définition des invariants et covariants. Brux. S. sc. XII A. 47-49.

Wenn eine Function $F(1)$ der Coefficienten und Variabeln eines Stammsystems algebraischer Formen immer zugleich mit derselben Function $F(2)$ der neuen Coefficienten und der neuen Variabeln des transformirten Systems dieser algebraischen Formen Null ist, so ist $F(2) = T.F(1)$, wobei T eine Potenz der Transformations-Determinante bedeutet. Mn. (Lp.)

L. Maurer. Ueber allgemeinere Invarianten-Systeme. Münch. Ber. 103-150.

Nehmen wir an, die rationale homogene Function $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von n Veränderlichen werde durch die umkehrbare lineare Substitution

$$y_\lambda = \sum a_{\lambda\mu} x_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

in sich selbst transformirt, so führt die unter Vermittelung jener Substitutionsformeln für alle Werte von $x_1, x_2, \dots, x_n$ identisch erfüllte Gleichung

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

zu einem System S von algebraischen Gleichungen, denen die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ genügen müssen. Durch diese Gleichungen S ist eine Anzahl von irreduciblen algebraischen Gebilden definirt und der Verfasser zeigt, dass es unter diesen Gebilden stets eines und nur eines giebt, dem das Wertsystem

$$a_{\lambda\mu} = 0\,(\lambda \lesseqgtr \mu), \quad a_{\lambda\lambda} = 1$$

angehört, d. h. unter dessen Substitutionen die identische Substitution vorkommt. Die durch dieses irreducible algebraische Gebilde bestimmte Substitutionengruppe kommt bei der vorliegenden Untersuchung allein in Betracht. Indem der Verfasser jene Identität $f(x) = f(y)$ in Differentialgleichungen umsetzt und dabei auf die Untersuchung von vollständigen Systemen linear unabhängiger Differentialgleichungen — wie sie in der von Lie begründeten Theorie der Transformationsgruppen eine Hauptrolle spielen — geführt wird, zeigt es sich, dass eine, m unabhängige Parameter enthaltende Substitution stets aus m sogenannten „elementaren" d. h. solchen Substitutionen zusammengesetzt werden kann, deren Coefficienten nur von einem Parameter abhängen. Die Untersuchung einer solchen elementaren Substitution wird mit Hülfe der Weierstrass'schen Theorie der Elementarteiler durchgeführt, indem der Verfasser dieselbe auf die „Fundamentaldeterminante"

$$\begin{vmatrix} c_{11}-r, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n}, \\ c_{21}, & c_{22}-r, & \ldots, & c_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{nn}-r \end{vmatrix}$$

anwendet, wo $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn}$ gewisse durch die Zusammensetzung der Gruppe bestimmte Zahlen sind. Es ergiebt sich nun, dass die Coefficienten der elementaren Substitution in zwei Fällen als rationale Functionen eines Parameters darstellbar sind: nämlich dann, wenn entweder jene Fundamentaldeterminante gleich r^n ist, oder wenn sie nur Elementarteiler erster Ordnung hat, und wenn ausserdem die Werte von r, für welche sie verschwindet, sämtlich ganze Zahlen sind. Die diesen beiden Fällen entsprechenden Coefficientensysteme $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn}$ werden „von der ersten und zweiten Art" genannt. Es gelingt dann auf Grund der Eigenschaft der Substitution, vermöge welcher dieselbe $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in sich überführt, den Nachweis zu führen, dass auf die beiden erwähnten Fälle jeder andere Fall zurückkommt. Das schliessliche Ergebnis ist der folgende Satz: Wird eine homogene und rationale Function f der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch eine lineare Substitution, von deren Coef-

ficienten m verfügbar bleiben, in sich selbst transformirt, so genügt sie m linear unabhängigen partiellen Differentialgleichungen von der Gestalt

$$\sum_\lambda \sum_\mu c^i_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

deren Coefficienten $c^i_{\lambda\mu}$ von der ersten oder von der zweiten Art sind. Und umgekehrt, genügt die homogene Function f genau m und nicht mehr Differentialgleichungen der angegebenen Art, so wird sie durch eine lineare Substitution, deren Coefficienten sich als rationale Functionen von m unabhängig veränderlichen Parametern darstellen lassen, in sich selbst transformirt. Endlich geht der Verfasser noch auf das Problem der Zusammensetzung zweier Substitutionen ein und beweist, dass die zusammengesetzte Substitution dadurch entsteht, dass man für die Parameter gewisse algebraische Functionen der Parameter der beiden ursprünglichen Substitutionen einsetzt. Der Verfasser spricht die Behauptung aus, es liesse sich beweisen, dass bei geeigneter Wahl des Parametersystems diese Functionen rational sind.

Ht.

F. Klein. Ueber irrationale Covarianten. Gött. N. 191-194.

Der Verfasser weist auf die allgemeine Aufgabe hin, bei einer in irrationaler canonischer Gestalt zu Grunde gelegten Form innerhalb des durch diese canonische Gestalt gegebenen Rationalitätsbereiches Covarianten zu suchen und erläutert diese Problemstellung an dem Beispiele der ternären Form vierter Ordnung. Diese Form lässt sich bekanntlich erstens in die Gestalt

$$f = \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_3^2$$

bringen, wo φ_1, φ_2, φ_3 quadratische Formen sind, und zweitens in die Gestalt einer vierreihigen symmetrischen Determinante

$$f = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}, \qquad (a_{ik} = a_{ki}),$$

wo a_{11}, a_{12}, ..., a_{44} lineare Formen bedeuten.

Was die erstere Darstellung anlangt, so bleibt dieselbe bis

auf einen Factor ungeändert, wenn man für φ_1, φ_2, φ_3 Ausdrücke folgender Art setzt:

$$\varphi_1' = \lambda^2\varphi_1,$$
$$\varphi_2' = \lambda\mu(\varphi_2+[\mu_1 x_1+\mu_2 x_2+\mu_3 x_3]\varphi_1),$$
$$\varphi_3' = \mu^2(\varphi_3+2[\mu_1 x_1+\mu_2 x_2+\mu_3 x_3]\varphi_2+[\mu_1 x_1+\mu_2 x_2+\mu_3 x_3]^2\varphi_1),$$

wo λ, μ, μ_1, μ_2, μ_3 irgend welche Constante bedeuten. Dementsprechend sind als Covarianten der in der ersteren canonischen Gestalt zu Grunde gelegten Form f diejenigen und nur diejenigen simultanen Covarianten der drei quadratischen Formen φ_1, φ_2, φ_3 anzusehen, welche bei den erwähnten Umsetzungen ungeändert bleiben und im Uebrigen in den Coefficienten dieser Formen φ_1, φ_2, φ_3 rational sind.

Die zweite canonische Gestalt der biquadratischen Grundform f bleibt ungeändert, wenn man die Vertikalreihen der Determinante irgendwie linear combinirt und hierauf, entsprechend dem symmetrischen Charakter der Determinante, die nämlichen linearen Combinationen der Horizontalreihen einführt. Um demnach Covarianten der in der zweiten canonischen Gestalt zu Grunde gelegten Form f zu erhalten, bilden wir solche Covarianten der 10 ternären Linearformen a_{ik}, welche bei jenen Combinationen ungeändert bleiben, und diese Covarianten ihrerseits sind, wie man leicht erkennt, nichts anderes als die von ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 freien Covarianten der ternär-linearen und quaternär-quadratischen Grundform

$$F = \Sigma_{i,k}\, a_{ik}\xi_i\xi_k = a_x\alpha_\xi^2 = b_x\beta_\xi^2 = \cdots.$$

Es ist somit beispielsweise $a_x b_x c_x d_x(\alpha\beta\gamma\delta)^2$ in symbolischer Schreibart eine Covariante von der gesuchten Beschaffenheit.

Ht.

A. R. Forsyth. The differential equations satisfied by concomitants of quantics. Lond. M. S. Proc. XIX. 24-46.

In der Invariantentheorie der Formen von n Veränderlichen ist es, wie schon Clebsch hervorgehoben hat, notwendig, die Unterdeterminanten der aus n Veränderlichenreihen gebildeten Determinante ebenfalls als selbständige Veränderliche einzuführen.

Dieser Forderung entsprechend stellt der Verfasser zunächst einige Relationen zwischen jenen Unterdeterminanten auf; **diese** Relationen ergeben sich durch Anwendung eines von Sylvester herrührenden Determinantensatzes und sind von der Gestalt $\Theta\Phi = \Sigma\Theta_{m,p}\,\Phi_{p,m}$, wo Θ, Φ, $\Theta_{m,p}$, $\Phi_{p,m}$ geeignet ausgewählte Unterdeterminanten von der nämlichen Reihenzahl bedeuten. Die weiteren Abschnitte der Arbeit beschäftigen sich mit der Aufstellung der Differentialgleichungen, denen die Invarianten einer Grundform genügen. Die dabei befolgte Methode läuft auf die Anwendung des Princips der infinitesimalen Transformation hinaus: der Verfasser nimmt die lineare Transformation in der Gestalt

$$x_r = l_{r1}X_1 + l_{r2}X_2 + \cdots + l_{rn}X_n \qquad (l_{rr} = 1,\ r = 1, 2, \ldots, n)$$

an und berechnet dann die Aenderungen, welche in Folge dieser Transformation die Veränderlichen d. h. jene Unterdeterminanten und die Coefficienten der vorgelegten Grundform erleiden, wobei er nur die in den Substitutionscoefficienten $l_{rs} (r \lessgtr s)$ linearen Zusatzglieder berücksichtigt. Beispielsweise ergeben sich für die Invarianten Φ der quaternären Form

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)^n = (\ldots,\ a_{qrst},\ \ldots)(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^n$$

die folgenden Differentialgleichungen:

$$\Sigma\Sigma\Sigma r a_{q+1,r-1,s,t}\frac{\partial\Phi}{\partial a_{qrst}} = x_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + p_{24}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{14}} - p_{23}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{31}} - u_1\frac{\partial\Phi}{\partial u_2},$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma s a_{q+1,r,s-1,t}\frac{\partial\Phi}{\partial a_{qrst}} = x_3\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + p_{34}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{14}} - p_{23}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}} - u_1\frac{\partial\Phi}{\partial u_3},$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma t a_{q+1,r,s,t-1}\frac{\partial\Phi}{\partial a_{qrst}} = x_4\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + p_{31}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{31}} - p_{24}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}} - u_1\frac{\partial\Phi}{\partial u_4},$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma q a_{q-1,r+1,s,t}\frac{\partial\Phi}{\partial a_{qrst}} = x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + p_{14}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{24}} - p_{31}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{23}} - u_2\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma q a_{q-1,r,s+1,t}\frac{\partial\Phi}{\partial a_{qrst}} = x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + p_{14}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{34}} - p_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{23}} - u_3\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma q a_{q-1,r,s,t+1}\frac{\partial\Phi}{\partial a_{qrst}} = x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_4} + p_{31}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{34}} - p_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{24}} - u_4\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},$$

wo die Veränderlichen p die Liniencoordinaten und die Veränderlichen u die Ebenencoordinaten bedeuten. Ht.

A. Voss. Ueber einen Satz aus der Theorie der Formen. Münch. Ber. 15-20.

Die Note enthält einen Beweis für den folgenden von Gordan herrührenden Satz: Wenn $F = (a_x b_y c_z \dots)^r$ in symbolischer Schreibweise eine Form der p Veränderlichenreihen

$$x_1, x_2, \dots, x_p; \quad y_1, y_2, \dots, y_p; \quad z_1, z_2, \dots, z_p$$

darstellt, und wenn dann F als wirklichen Factor die r^{te} Potenz der Determinante $(xyz\dots)$ enthält, so ist der symbolische Ausdruck des anderen Factors von F gleich der r^{ten} Potenz der Determinante $(abc\dots)$, multiplicirt mit einer numerischen Constanten. Zugleich ergiebt sich eine Erweiterung dieses Satzes auf solche Formen, deren symbolischer Ausdruck von der Gestalt $F = (a^1_{x_1} a^2_{x_2} \dots)^{r_a} (b^1_{y_1} b^2_{y_2} \dots)^{r_b} (c^1_{z_1} c^2_{z_2} \dots)^{r_c} \dots$ ist. Ht.

F. Mertens. Invariante Gebilde von Nullsystemen. Wien. Ber. XCVII. 519-537.

Denkt man sich in dem Ausdrucke

$$(a, xy) = a_{14}(xy)_{23} + a_{24}(xy)_{31} + a_{34}(xy)_{12} + \cdots + a_{12}(xy)_{34}$$

die Substitution

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i X_1 + \eta_i X_2 + \zeta_i X_3 + \vartheta_i X_4 \\ y_i &= \xi_i Y_1 + \eta_i Y_2 + \zeta_i Y_3 + \vartheta_i Y_4 \\ i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

ausgeführt, so geht derselbe in den Ausdruck

$$(a, \xi\vartheta)(XY)_{14} + (a, \eta\vartheta)(XY)_{24} + (a, \zeta\vartheta)(XY)_{34} + \cdots + (a, \xi\eta)(XY)_{12}$$

über. Der Verfasser versteht nun unter einem invarianten Gebilde Θ des Nullsystems (a, xy) oder, was auf dasselbe hinauskommt, des linearen Complexes

$$(a, p) = a_{14}\, p_{23} + a_{24}\, p_{31} + a_{34}\, p_{12} + \cdots + a_{12}\, p_{34}$$

eine ganze Function der Grössen $a_{14}, a_{24}, a_{34}, \dots, a_{12}$, der Ebenencoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4, und der Punctcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, welche einer Identität von der Gestalt

$$(\xi\eta\zeta\vartheta)^r\, \Theta = G$$

genügt, wo G in ganzer Weise von den Coefficienten

$$(a,\xi\vartheta), (a,\eta\vartheta), (a,\zeta\vartheta), \ldots (a,\xi\eta)$$

des transformirten Nullsystems und von den Ausdrücken

$$u_\xi, u_\eta, u_\zeta, u_\vartheta, (x\eta\zeta\vartheta), (\xi x\zeta\vartheta), (\xi\eta x\vartheta), (\xi\eta\zeta x)$$

und zwar nur von diesen Ausdrücken abhängt. Legt man fünf Nullsysteme a, b, c, d, e zu Grunde, so erhält man folgende invarianten Gebilde: zunächst die 15 „Nullsysteminvarianten" (a,a), (a,b), (a,c), ... (d,e), (e,e), ferner die aus Punctcoordinaten allein, sowie die aus Ebenencoordinaten allein gebildeten Determinanten $(xx'x''x''')$, ..., $(uu'u''u''')$, ... und schliesslich die „Punctebeneninvarianten"

$$u_x, u'_x, \ldots, u'_x, u'_{x'}, \ldots$$
$$(a\cdot x)_1 x'_1 + (a\cdot x)_2 x'_2 + (a\cdot x)_3 x'_3 + (a\cdot x)_4 x'_4, \ldots$$
$$(a\cdot u)_1 u'_1 + (a\cdot u)_2 u'_2 + (a\cdot u)_3 u'_3 + (a\cdot u)_4 u'_4, \ldots$$
$$(a\cdot b\cdot u)_1 x_1 + \cdots + (a\cdot b\cdot u)_4 x_4, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot u)_1 u'_1 + \cdots + (a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot u)_4 u'_4, \ldots,$$

wo $(a\cdot x)_1$, $(a\cdot x)_2$, $(a\cdot x)_3$, $(a\cdot x)_4$ die Coordinaten der Nullebene des Punctes x; $(a\cdot u)_1$, $(a\cdot u)_2$, $(a\cdot u)_3$, $(a\cdot u)_4$. die Coordinanten des Nullpunctes der Ebene u in dem Nullsystem a bedeuten und in entsprechender Weise die weiteren Bezeichnungen zu verstehen sind. Es folgt der Nachweis dafür, dass jedes invariante Gebilde Θ mit beliebig vielen Reihen von Punct- und Ebenencoordinanten als ganze und rationale Function der eben aufgezählten Invarianten darstellbar ist. Sind sechs Nullsysteme a, b, c, d, e, f gegeben, so erhält man das volle Invariantensystem, wenn man auf die vorigen Invarianten alle möglichen Aggregate der Operationen

$$\left(f\frac{\partial}{\partial a}\right) = f_{14}\frac{\partial}{\partial a_{14}} + f_{24}\frac{\partial}{\partial a_{24}} + \cdots + f_{12}\frac{\partial}{\partial a_{12}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left(f\frac{\partial}{\partial e}\right) = f_{14}\frac{\partial}{\partial e_{14}} + f_{24}\frac{\partial}{\partial e_{24}} + \cdots + f_{12}\frac{\partial}{\partial e_{12}}$$

anwendet und ausserdem die Invariante

$$(abcdef) = \begin{vmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{23} & b_{31} & b_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{23} & f_{31} & f_{12} \end{vmatrix}$$

hinzufügt. Sind mehr als sechs Nullsysteme gegeben, so lassen sich die invarianten Gebilde derselben als Summen von Gebilden darstellen, welche mittelst der den obigen entsprechenden Operationen aus invarianten Gebilden von sechs Nullsystemen abgeleitet sind. Zum Schlusse werden einige besondere Fälle hervorgehoben; so ist z. B. für drei Nullsysteme, drei Ebenen und drei Punkte das vollständige System invarianter Gebilde aus 72 Formen zusammengesetzt. Ht.

D. Hilbert. Zur Theorie der algebraischen Gebilde. Gött. Nachr. 450-457.

Der Verfasser eröffnet hiermit eine Reihe von Noten, welche auf hervorragende Punkte in der Theorie der algebraischen Gebilde, insbesondere auf die Fragen nach der Endlichkeit von zugehörigen Invariantensystemen, sowie auf den Zusammenhang zwischen den charakteristischen Zahlen eines solchen Gebildes (Ordnung, Geschlecht, Rang etc.) ein neues Licht zu werfen geeignet sind. Als Grundlage dient der Satz, dass ein jedes Individuum einer unendlichen Reihe von Formen (von n Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_n$) sich linear und ganz aus einer endlichen Anzahl von ihnen componiren lässt, mittels Coefficienten α, die selbst wiederum Formen der x sind, mit dem wesentlichen Zusatze, dass der Rationalitäts- (resp. Integritäts-) Bereich für die Coefficienten der α der nämliche ist, wie der für die Coefficienten der vorgelegten Formen. Der Satz ist auf mehrere Reihen solcher Formen ausdehnbar.

Der Beweis wird von n auf $n+1$ geführt.

Darauf stützt sich der Nachweis des allgemeinen Satzes, dass ein beliebiges System von Grundformen mit beliebig vielen Veränderlichen (und Reihen von Veränderlichen) ein „endliches"

Invariantensystem besitzt. Die unendliche Zahl von Invarianten lässt sich nämlich leicht in einer solchen Reihe anordnen, auf die der obige Satz angewandt werden kann. Die Coefficienten α können selbst wiederum in Invarianten übergeführt werden durch Verallgemeinerung des bekannten (Clebsch'schen) Processes $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\partial\beta_1}$ (wo α_1 α_2, β_1, β_2 die Coefficienten der linearen Substitution sind). Damit ist aber der Satz bewiesen.

Daraus lassen sich weitere, algebraische wie geometrische Consequenzen ziehen. So z. B. der Satz, dass ein endliches System von Invarianten nur eine endliche Zahl von irreducibeln „Syzygien“ besitzt, und ähnliche. My.

D. Hilbert. Ueber die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen. Math. Ann. XXXIII. 223-226.

Denkt man sich eine binäre Form f als Product ihrer Linearfactoren $\alpha_i x + \beta_i y$, so ist eine Invariante von f eine ganze Function der Determinanten $(\alpha\beta)$ von gewissen vorgeschriebenen Eigenschaften. Der Nachweis der Endlichkeit des Invariantensystems von f reducirt sich auf zwei bekannte einfachere Hülfssätze von ähnlichem Charakter, einmal, dass ein System von linearen und homogenen diophantischen Gleichungen eine endliche Anzahl positiver Lösungen besitzt, durch die jede weitere Lösung ausdrückbar ist, sodann, dass irgend eine ganzzahlige Potenz einer algebraischen Grösse ω sich aus einer endlichen Anzahl solcher Potenzen zusammensetzen lässt. Die Zusammensetzung ist beidemal eine lineare mit rationalen Coefficienten. My.

D. Hilbert. Ueber binäre Formen mit vorgeschriebener Discriminante. Math. Ann. XXXI. 482-492.

D. Hilbert. Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Functionaldeterminante. Math. Ann. XXXIII. 227-236.

Beide Arbeiten sind weitere Ausführungen von Noten, die zuerst in den Leipz. Berichten erschienen, und über die im Wesentlichen bereits im XIX Bande dieser Zeitschrift berichtet worden ist. My.

R. Wulfinghoff. Invariantenrechnung. Pr. Leibniz-Gymn. Berlin.

Die Arbeit hat den Zweck, für die Berechnung der zwischen den Invarianten und Covarianten einer binären Grundform stattfindenden Relationen eine Methode anzugeben, welche auch in complicirteren Fällen brauchbar ist. Indem der Verfasser von dem allgemeinen symbolischen Ausdrucke für die Invariante ausgeht, gelangt er auf rechnendem Wege zu dem Satze, dass jede Covariante C_p^λ gleich einer ganzen Function gewisser Covarianten F_0, F_2, F_{21}, F_4, F_{41}, ... niedrigsten Grades ist, dividirt durch eine geeignete Potenz der Grundform F_0, und zwar ist

$$F_0^{p-\lambda} C_p^\lambda = \Sigma q F_0^\alpha F_2^x F_{21}^y F_4^z F_{41}^u \cdots,$$

wo die Exponenten den beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z+5u+\cdots &= p \\ \alpha+2x+3y+2z+3u+\cdots &= p \end{aligned}$$

genügen. Für die Rechnung mit Covarianten genügt es bekanntlich, die Leitglieder (d. h. die Coefficienten der höchsten Potenzen einer Veränderlichen) allein zu berücksichtigen und die Methode des Verfassers kommt nun darauf hinaus, in dem obigen Ansatze auf der rechten Seite die Zahlencoefficienten q so zu bestimmen, dass die Summe durch eine möglichst hohe Potenz des ersten Coefficienten a_0 von F_0 teilbar wird. Auf diesem Wege drückt der Verfasser mehrere Invarianten und Covarianten der binären Formen 3ter, 4ter und 5ter Ordnung als Functionen jener elementaren Covarianten F_0, F_2, F_{21}, F_4, F_{41} aus. Mit Hülfe dieser Ausdrücke wird insbesondere eine Reihe von weiteren Relationen zwischen den Invarianten und Covarianten der binären Grundform 5ter Ordnung hergeleitet. Ht.

E. Pascal. Sopra un' applicazione del metodo per esprimere una forma invariantiva di una binaria cubica mediante quelle del sistema completo. Napoli Rend. (2) II. 67-72.

Die Resultante R einer binären Form n^{ter} Ordnung

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n$$

und der cubischen Form $\varphi = p_x q_x r_x$ ist, als Function der Coefficienten der Linearfactoren p_x, q_x, r_x ausgedrückt, gleich

$$(pa)^n (qb)^n (rc)^n.$$

Durch Umformung ergiebt sich hieraus ein Ausdruck von der Gestalt

$$R = \sum^{\lambda,\mu,\nu} c_{\lambda\mu\nu}((A_{\lambda\mu\nu}, f)_{n-\mu}, f)_{n-\mu}, f))_n,$$

wo $c_{\lambda\mu\nu}$ gewisse Zahlencoefficienten und $A_{\lambda\mu\nu}$ gewisse Covarianten der cubischen Form φ allein, also ganze Functionen der vier fundamentalen invarianten Gebilde φ, Δ, Q, R sind. Die Anwendung auf den besonderen Fall $n = 4$ liefert eine Resultante einer biquadratischen und cubischen Form in der Gestalt

$$R = (J, f^2)_8 - \frac{36}{7}(K, H)_4 + \frac{162}{35} Rj + \frac{27}{10}(\Delta^2, f)_4 i,$$

wo

$$J = (\varphi^4, f)_4 - \frac{72}{11}(\varphi^2 \Delta, f)_4 + \frac{36}{5}(\varphi Q, f) + \frac{27}{7}\Delta^2 f$$

$$K = (\varphi^2 \Delta, f)_4 + 3(\varphi Q, f)_4 - \frac{9}{7}(\Delta^2, f)_4$$

$$H = (f, f)_2, \quad i = (f, f)_4, \quad j = (f, H)_4$$

gesetzt ist. Ht.

E. Pascal. Sopra alcune forme invariantive del sistema di due binarie biquadratiche. Napoli Rend. (2) II. 402-409.

E. Pascal. Sopra certi covarianti simultanei dei sistemi di due quartiche e di due quintiche. Annali di Mat. (2) XVI. 85-99.

Die beiden Arbeiten beschäftigen sich mit der Auswertung besonderer von Gordan in die Theorie zweier binären Formen von gleicher Ordnung eingeführten Covarianten. Setzen wir

$$F = \frac{f_x^n \varphi_y^n - \varphi_x^n f_y^n}{(xy)} = r_{1x}^{n-1} s_{1x}^{n-1} = r_{2x}^{n-1} s_{2y}^{n-1} = \dots,$$

wo f und φ binäre Formen von der n^{ten} Ordnung sind, so führt das Problem der Darstellung der Resultante $R = \overset{i,k}{\Pi}(r_i r_k)(s_i s_k)$ auf eine Reihe von Covarianten der folgenden Gestalt:

$$\Theta = \overset{i,k}{\Pi}(r_i r_k)(s_i s_k) r_{ix} s_{ix} \qquad (i,k = 0,1,2,\dots,n-2),$$

$$\Phi = \overset{ik}{\Pi}(r_i r_k)(s_i s_k) r_{ix} r_{iy} s_{ix} s_{iy} \qquad (i,k = 0,1,2,\dots,n-3),$$

. . . .

Diese Covarianten werden in den Fällen $n = 4$ und $n = 5$ auf Ueberschiebungen der Grundformen f und φ zurückgeführt und dann durch die fundamentalen Invarianten ausgedrückt. Jene Covarianten liefern zugleich Kriterien für die Existenz mehrerer gemeinsamer Linearfactoren. So gelten für den Fall zweier biquadratischen Grundformen f und φ, wenn

$$\varrho = 4(f,\varphi)_1, \quad \sigma = \frac{16}{9}(f,\varphi)_3, \quad g = (\varrho,\varrho)_4 + \frac{3}{5}(\varrho,\sigma)_2 - \frac{9}{25}\sigma^2,$$

$$\Phi_2 = (\varrho,\varrho)_6 - \tfrac{3}{10}(\sigma,\sigma)_2, \quad \Theta = -(\varrho,g)_2 - \tfrac{3}{10}\varrho g + \tfrac{1}{8}\varrho$$

gesetzt wird, die folgenden Thatsachen: $\Theta = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f = 0$ und $\varphi = 0$ zwei gemeinsame Wurzeln besitzen und $\Theta = 0$, $\Phi_2 = 0$ sind die Bedingungen für die Existenz dreier gemeinsamer Linearfactoren jener Grundformen. Ht.

E. Pascal. Su di un teorema sul calcolo simbolico nella teoria delle forme binarie. Batt. G. XXVI. 33-38.

E. Pascal. Aggiunte alla nota intitolata: sopra un teorema sul calcolo simbolico nella teoria delle forme binarie. Batt. G. XXVI. 102-103.

E. Pascal. Sopra un teorema fondamentale nella teoria del calcolo simbolico delle forme binarie. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV. 119-124.

Die erste Note enthält einen neuen Beweis des Gordan'schen Satzes, dass im binären Formengebiete jeder symbolische Ausdruck, welcher identisch verschwindet, in Teile zerlegt werden kann, von denen jeder einzelne einen Factor vom Typus

$$(ab)(cd)+(ac)(db)+(ad)(bc)$$

enthält. Die zweite Note fügt eine auf die Anzahl dieser Teile bezügliche Bemerkung hinzu, und in der dritten Note wird der Satz auf Formen von n Veränderlichen erweitert. Bezeichnen wir mit $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ beziehungsweise die Reihen von Coefficienten und Variablen derart, dass die linearen Grundformen von der Gestalt

$$a_{1x_1} = a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\cdots+a_{1n}x_{1n}$$

anzunehmen sind, so verschwinden identisch die folgenden invarianten Ausdrücke

$$\sum_i(-1)^{ni}(a_{i+1}a_{i+2}\dots a_{i-1})(a_i b_1 b_2 \dots b_{n-1}),$$
$$\sum_i(-1)^{ni}(a_{i+1}a_{i+2}\dots a_{i-1})\,a_{ix},$$
$$(a_1 a_2 \dots a_n)(x_1 x_2 \dots x_n)-(a_{1x_1}a_{2x_2}\dots a_{nx_n}),$$
$$\sum_i(-1)^{ni}(x_{i+1}x_{i+2}\dots x_{i-1})\,a_{x_i},$$
$$\sum_i(-1)^{ni}(x_{i+1}x_{i+2}\dots x_{i-1})(x_i y_1 y_2 \dots y_{n-1}).$$
$$(i=1,2,\dots,n+1)$$

Der Verfasser beweist nun, dass jeder andere aus n-reihigen Determinanten und Linearfactoren gebildete Ausdruck, welcher identisch gleich Null ist, stets in Teile zerlegt werden kann, von denen jeder einen Ausdruck von obigem Typus als Factor enthält. Der Beweis wird zunächst für $n+1$ Reihen von Coefficienten und eine Reihe von Veränderlichen geführt und dann mittels einer von Capelli herrührenden Verallgemeinerung der bekannten Gordan'schen Reihenentwickelung symbolischer Ausdrücke auf den allgemeinen Fall ausgedehnt. Ht.

E. Pascal. Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche. Rom. Acc. L. Mem. (4) V. 375-387.

G. Battaglini, E. Betti. Relazione. Daselbst. 374.

Beweis des folgenden, in einer früheren Note (Sopra un teorema fondamentale nella teoria del calcolo simbolico delle forme binarie, Rom. Acc. L. Rend. (4) IV. 119-124; vgl. den vorigen Bericht) ausgesprochenen Satzes: Ist eine irreductible (d. h. in Factoren von derselben Beschaffenheit nicht zerlegbare), nach jeder Coefficienten- und Variabelnreihe homogene invariante Bildung Π identisch gleich Null, so kann sie auf eine Summe von Ausdrücken zurückgeführt werden, deren jeder mindestens eine aus lauter Elementen von Π bestehende Null-Identität als Factor enthält. Als Null-Identitäten werden die fünf folgenden bekannten Relationen bezeichnet:

$$\sum_a \pm (a_1 a_2 \ldots a_n)(a_{n+1} b_1 b_2 \ldots b_{n-1}) = 0,$$

$$\sum_a \pm (a_1 a_2 \ldots a_n)\, a_{n+1,x} = 0,$$

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)(x_1 x_2 \ldots x_n) - \sum_a \pm a_{1x_1} a_{2x_2} \ldots a_{nx_n} = 0,$$

$$\sum_x \pm (x_1 x_2 \ldots x_n)\, a_{x_{n+1}} = 0,$$

$$\sum_x \pm (x_1 x_2 \ldots x_n)(x_{n+1} y_1 y_2 \ldots y_{n-1}) = 0.$$

Hier bedeutet $\sum_a \pm$ (bezw. $\sum_x \pm$) die Summe aller Ausdrücke, welche aus dem niedergeschriebenen entstehen, wenn man die Symbole a (bezw. x) auf jede mögliche Weise vertauscht, und das Plus- oder Minuszeichen nimmt, jenachdem die betreffende Permutation aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Transpositionen besteht.

Der Satz wurde schon, wie der Verfasser angiebt, für $n = 2$ von Gordan (Vorlesungen über Invariantentheorie II. S. 132), für $n = 3$ von Study (Ueber ternäre lineare Formen, Math. Ann. XXX. 120-126; Bericht in F. d. M. XIX. 1887. 129-130) bewiesen. Vi.

R. Perrin. Sur l'identité des péninvariants des formes binaires avec certaines fonctions des dérivées unilatérales de ces formes. S. M. F. Bull. XVI. 82-100.

Der Verfasser knüpft an eine Arbeit des Referenten (vgl. F. d. M. Bd. XVII. 1885. 84) an und beweist von neuem den dort aufgestellten Satz, dass jede Invariante und Covariante einer binären Form f gleich einer ganzen und rationalen Function der Form f und der einseitigen, d. h. in Bezug auf eine Veränderliche allein genommenen Differentialquotienten f_1, f_2, f_3, ... von f ist. Um diesen Ausdruck in den einseitigen Differentialquotienten zu erhalten, hat man nur nötig, in dem Leitgliede der vorgelegten Covariante statt der Coefficienten der binären Form die entsprechenden, mit gewissen Zahlenfactoren multiplicirten Differentialquotienten von f einzusetzen, und in Folge dieses Umstandes lässt sich der Satz auf die Aufgabe anwenden, die ganzen und rationalen Integrale gewisser Differentialgleichungen zu finden, deren linke Seite die Veränderliche selbst nicht explicite enthält. Der Verfasser betrachtet ferner sogenannte „Semicovarianten", d. h. solche Functionen der einseitigen Differentialquotienten, welche nicht, wie die Invarianten, schon nach einmaliger, sondern erst nach mehrmaliger Anwendung des Differentiationsprocesses

$$f_1 \frac{d}{df} + f_2 \frac{d}{df_1} + \cdots$$

identisch Null ergeben. Schliesslich dehnt der Verfasser die Untersuchung auf Formen mit mehr Veränderlichen aus, wobei er auf diejenigen Sätze eingeht, über welche bereits in diesem Jahrbuche Bd. XIX. 132 referirt worden ist. Es folgen als Beispiele einige Darstellungen von Invarianten ternärer Formen als Function von den nach zwei Veränderlichen genommenen (zweiseitigen) Differentialquotienten. Ht.

E. Cesaro. Calcul des sous-invariants. Nouv. Ann. (3) VII. 464-467.

D'Ocagne hat bemerkt, dass, wenn man a_0 als Function einer Veränderlichen ξ betrachtet, deren successive Differentialquotienten a_1, a_2, a_3, ... sind, der Ausdruck

$$\varphi_p = a_0^p \frac{d^p l a_0}{d\xi^p}$$

eine Semiinvariante der binären Form

$$f = a_0 x_n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$$

wird. Der Verfasser beschäftigt sich mit der wirklichen Berechnung dieser Semiinvarianten φ_p und der zwischen denselben und den fundamentalen Semiinvarianten

$$a_0,\ a_0 a_2 - a_1^2,\ a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3,\ \ldots$$

bestehenden Relationen. Ht.

M. d'Ocagne. Sur les systèmes de péninvariants principaux d'une forme binaire. S. M. F. Bull. XVI. 183-187.

Mit Hülfe der Semiinvarianten

$$\varphi_p = a_0^p \frac{d^p l a_0}{d\xi^p} \qquad (p = 2, 3, \ldots, n)$$

lässt sich jede andere Semiinvariante der nämlichen binären Grundform rational darstellen, so dass im Nenner nur eine Potenz von a_0 auftritt. (Vgl. das vorige Referat.) Ht.

M. d'Ocagne. Note sur les systèmes de péninvariants principaux des formes binaires. Brux. S. sc. XII B. 185-189.

Zusatz zu einer im vorangehenden Bande erschienenen Note (F. d. M. XIX. 1887. 119). Der Verf. weist nach, wie man in der Hälfte der Fälle manche Haupt-Semiinvarianten der Formen durch einander ausdrücken kann. Hr. Cesáro hat die Aufgabe für die anderen Fälle gelöst. Mn. (Lp.)

J. Deruyts. Sur les semi-invariants de formes binaires. Liège Mém. (2) XV. Note I 11 S., Note II 8 S.

Zusätze zu früheren Arbeiten. Mn.

J. Petersen. Om binäre Formers Kovarianter. Zeuthen Tidss. (5) VI. 152-186.

Dieser kleine Aufsatz bildet eine Fortsetzung von zwei Auf-

sätzen in Zeuthen's Tidss. aus den Jahrgängen 1880-1881, welche von den Covarianten der binären Formen handeln. Der Coefficient des ersten Gliedes einer Covariante wird eine Halbinvariante genannt, durch welche bekanntlich die Covariante bestimmt ist.

Werden in einer solchen Halbinvariante $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (die Coefficienten einer binären Form n^{ter} Ordnung) durch $0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ersetzt, so erhält man eine Halbinvariante einer binären Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Werden nun auf diese Weise alle die den Halbinvarianten A einer Form n^{ter} Ordnung entsprechenden Halbinvarianten A einer Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gebildet, so bilden sie nicht das vollständige System der Halbinvarianten einer Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Es ist aber leicht zu zeigen, dass, wenn alle A' als ganze Functionen einer endlichen Anzahl unter ihnen dargestellt werden können, dasselbe mit den A stattfindet.

Der Verfasser zeigt darnach, wie einfach die Endlichkeit bei dem zu einer binären Form dritter oder vierter Ordnung gehörenden Formensystem bewiesen werden kann. V.

STROH. Ueber einen Satz der Formentheorie. Math. Ann. XXXI. 441-443.

Der Verfasser beweist den Cayley'schen Satz über die Anzahl der zu einer binären Form f gehörigen linear unabhängigen Covarianten vom Grade g in den Coefficienten von f und vom Gewichte p, auf Grund der Gordan'schen Theorie, wie folgt: Zunächst sind die aus g verschiedenen binären Formen

$$f_1 = a_x^n,\ f_2 = b_x^n,\ \ldots,\ f_g = h_x^n$$

und aus einer weiteren Form φ_x^m gebildeten Covarianten

$$A_i = (\varphi a)^{\lambda_1}(\varphi b)^{\lambda_2}\ldots(\varphi h)^{\lambda_g} a_x^{n-\lambda_1} b_x^{n-\lambda_2}\ldots h_x^{n-\lambda_g}\varphi_x^{m-\Sigma\lambda}$$

$$p = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_g = \Sigma\lambda$$

von einander linear unabhängig, wie man erkennt, wenn man alle Formen als Potenzen linearer Formen specialisirt. Aus den Formen A_i werden diejenigen Formen ausgewählt, für welche $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_g$ ist. Bildet man dann aus jeder solchen Form

und den aus ihr durch Permutation der f hervorgehenden Formen die Summe, so entsteht ein System von symmetrischen Covarianten, welche ebenfalls linear von einander unabhängig sind und auch unabhängig bleiben, wenn man nachträglich die Formen f einander gleichsetzt. Indem nun der Verfasser andererseits die so erhaltenen Covarianten als Summen von Ueberschiebungen der Covarianten von f über φ auffasst, gelingt schliesslich der Nachweis, dass es unter allen Covarianten g^{ten} Grades von f, deren Gewicht p nicht übersteigt, genau N_p linear unabhängige giebt, wo N_p eben jene Zahl der ganzzahligen Lösungen von

$$p = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_g, \quad \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_g$$

bedeutet. Die Differenz $N_p - N_{p-1}$ ist folglich die Zahl der linear unabhängigen Covarianten vom Grade g und dem Gewichte p, und da die Zahl N_p dieselbe ist wie die Zahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots + g\mu_g &= p, \\ \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_g &= n, \end{aligned}$$

so ist die Uebereinstimmung mit dem Cayley'schen Satz offenbar. Ht.

Stroh. Ueber die asyzygetischen Covarianten dritten Grades einer binären Form. Math. Ann. XXXI. 444-454.

Ordnet man die sämtlichen aus drei binären Formen $f_1 = a_x^{n_1}$, $f_2 = b_x^{n_2}$, $f_3 = c_x^{n_3}$ zu bildenden einfachen Ueberschiebungen vom Gewichte g in drei Gruppen

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad ((f_1, f_2)_{\alpha_1}, f_3)_{\beta_1}, \quad ((f_1, f_2)_{\alpha_1 - 1}, f_3)_{\beta_1 + 1}, \ldots, \\ &\text{II.} \quad ((f_2, f_3)_{\alpha_2}, f_1)_{\beta_2}, \quad ((f_2, f_3)_{\alpha_2 - 1}, f_1)_{\beta_2 + 1}, \ldots, \\ &\text{III.} \quad ((f_3, f_1)_{\alpha_3}, f_2)_{\beta_3}, \quad ((f_3, f_1)_{\alpha_3 - 1}, f_2)_{\beta_3 + 1}, \ldots, \end{aligned}$$

so sind die Formen jeder Gruppe unter sich linear unabhängig. Dagegen zwischen den Formen der verschiedenen Gruppen bestehen Relationen von der Gestalt

$$(-1)^{k_2} \sum_{i=0}^{k_1} a_i^{(1)} ((f_1, f_2)_{g-i}, f_3)_i + (-1)^{k_3} \sum_{i=0}^{k_2} a_i^{(2)} ((f_2, f_3)_{g-i}, f_1)_i$$
$$+ (-1)^{k_1} \sum_{i=0}^{k_3} a_i^{(3)} ((f_3, f_1)_{g-i}, f_2)_i = 0, \qquad (k_1 + k_2 + k_3 = g - 1),$$

wo $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, $a_i^{(3)}$ Zahlencoefficienten bedeuten. Auf Grund dieser Relationen zeigt der Verfasser, dass man aus jenen drei Gruppen $\gamma+1$ linear unabhängige Formen derart auswählen kann, dass sich jede andere Form durch diese linear ausdrücken lässt. Dabei bedeutet γ die Zahl $g-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3$, wo $\varepsilon_i = g-n_i$ statt negativ stets Null zu nehmen ist. Indem der Verfasser diese Ergebnisse auf den Fall dreier gleichen Formen f anwendet, erhält derselbe folgenden Satz: Unter den Covarianten dritten Grades $((f, f)_{2\alpha}, f)_\beta$ sind alle diejenigen, für welche

$$\alpha \overline{\gtrless} \beta - 3\left[\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

linear unabhängig, und alle übrigen sind durch sie linear ausdrückbar. Die Zahl jener Formen ist für ein gerades ε gleich

$$\left[\frac{\gamma+2}{2}\right]-\left[\frac{\gamma+2}{3}\right]$$

und für ein ungerades ε gleich

$$\left[\frac{\gamma-1}{2}\right]-\left[\frac{\gamma-1}{3}\right],$$

wo [ ] eine ganzzahlige Abrundung anzeigt. Zum Schlusse wird gezeigt, wie der letztere Satz so erweitert werden kann, dass er auch für Covarianten von höherem Grade anwendbar ist.

Ht.

Stroh. Ueber eine fundamentale Eigenschaft des Ueberschiebungsprocesses und deren Verwertung in der Theorie der binären Formen. Math. Ann. XXXIII. 61-108.

Wird die Ueberschiebung zweier binären Formen f und φ nicht als Process, sondern als eine Verknüpfung aufgefasst, so unterliegt diese Verknüpfungsart folgenden Gesetzen: I. dem distributiven Gesetze, welches sich in der Formel

$$(f \pm \varphi, \psi)_\lambda = (f, \psi)_\lambda \pm (\varphi, \psi)_\lambda$$

ausspricht; II. dem commutativen Gesetze (in erweiterter Fassung)

$$(f, \varphi)_\lambda = (-1)^\lambda (\varphi, f)_\lambda;$$

III. dem associativen Gesetze, d. h. es gilt die Formel

$$((f, \varphi)_{\alpha_3}, \psi)_{\alpha_1+\alpha_2} = \sum^{\lambda} c_\lambda (f, (\varphi, \psi)_{\alpha_1-\gamma+\lambda})_{\alpha_2+\alpha_3+\gamma-\lambda},$$

welche aussagt, dass in jeder Ueberschiebung, die aus drei Formen f, φ, ψ gebildet werden kann, die Art der Zusammenfassung der drei Formen gleichgültig ist, wenn nur an Stelle einer Ueberschiebung ein Aggregat der anders gebildeten Ueberschiebungen gesetzt wird. Auf der Anwendung der letzten Formel, in welcher c_λ gewisse Zahlencoefficienten bedeuten, beruht im wesentlichen die weitere Untersuchung. Was zunächst den Fall von drei binären Formen f_1, f_2, f_3 anbetrifft, so lassen sich diese nur auf folgende drei Arten zu Ueberschiebungen zusammenfassen

$$((f_1, f_2)_\lambda, f_3)_\mu, \; ((f_1, f_3)_\lambda, f_2)_\mu, \; ((f_2, f_3)_\lambda, f_1)_\mu.$$

Die Summe $\lambda + \mu = g$ heisst das „Gewicht" der Ueberschiebung, und alle Ueberschiebungen von gleicher Zusammenfassung der Formen und von gleichem Gewichte werden in ihrer Gesamtheit eine „Gruppe" genannt. Beispielsweise giebt es für das Gewicht 3 die folgenden drei Gruppen

$$((f_1,f_2)_3,f_3)_0, \quad ((f_1,f_2)_2,f_3)_1, \quad ((f_1,f_2)_1,f_3)_2, \quad ((f_1,f_2)_0,f_3)_3,$$
$$((f_1,f_3)_3,f_2)_0, \quad ((f_1,f_3)_2,f_2)_1, \quad ((f_1,f_3)_1,f_2)_2, \quad ((f_1,f_3)_0,f_2)_3,$$
$$((f_2,f_3)_3,f_1)_0, \quad ((f_2,f_3)_2,f_1)_1, \quad ((f_2,f_3)_1,f_1)_2, \quad ((f_2,f_3)_0,f_1)_3.$$

Was den Zusammenhang zwischen jenen Formen anbetrifft, so folgt ohne Schwierigkeit der Satz: Die Ueberschiebungen jeder zu drei Formen gehörigen Gruppe sind unter sich linear unabhängig, und jede Ueberschiebung einer Gruppe kann durch diejenigen jeder anderen zugehörigen Gruppe linear ausgedrückt werden. Genau der entsprechende Satz gilt für beliebig viele Formen f_1, f_2, ..., f_ϱ. Auch die Anzahl der Formen einer Gruppe wird bestimmt; sie ist nur von dem Gewichte g und von den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_\varrho$ jener Formen abhängig, also für alle zusammengehörigen Gruppen die nämliche und ergiebt sich als der Coefficient von x^g in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{(1-x^{n_1+1})(1-x^{n_2+1}) \ldots (1-x^{n_\varrho+1})}{(1-x)^{\varrho-1}}.$$

Bisher wurden nur sogenannte „einfache" Ueberschiebungen betrachtet, d. h. solche, in denen jede Form f nur einmal vorkommt. Indem der Verfasser mehrere Formen f einander gleichsetzt, ergeben sich entsprechende Sätze für sogenannte „mehr-

fache" Ueberschiebungen, in denen jede Form wiederholt auftritt. Aus diesen Entwickelungen, in denen insbesondere auch auf die Theorie der Sylvester'schen Syzyganten eingegangen wird, seien folgende beiden Sätze erwähnt: Zu jeder invarianten Form K einer binären Form f von höherem als dem 3ten Grade in den Coefficienten gehört eine Syzygante, welche das Glied Kf^2 enthält. Zu jeder invarianten Form A 3ten Grades, welche nicht Functionaldeterminante ist, gehört eine Syzygante, die den Term Af^3 enthält. Als Beispiel für die entwickelte Methode giebt der Verfasser das volle System der irreduciblen Syzyganten für die 23 Invarianten und Covarianten einer binären Form 5ter Ordnung. Die Zahl der Syzyganten dieses Systems ist 18.

Ht.

G. Torelli. Della trasformazione cubica di una forma binaria cubica. Atti d. Acc. Pontaniana. Napoli. XVIII. 215-225.

Zufolge eines bekannten Satzes, den Clebsch in seiner Abhandlung ausgesprochen hat: „Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen" (Gött. Abh. XV), kann jede kubische Transformation einer binären Form dritter Ordnung durch eine lineare Transformation ersetzt werden. Unter Anwendung dieser Betrachtung unternimmt Hr. Torelli die Ausführung der Transformation

$$(1)\quad y_1 b_x^3 - y_2 a_x^3 = 0$$

an der Form c_x^3. Zu diesem Zwecke ersetzt er sie durch die lineare Transformation

$$(2)\quad y_1 \beta_x - y_2 \alpha_x = 0,$$

wo

$$\alpha_x = (aK)^2(\Delta c)^2 c_x - (cK)^2(\Delta a)^2 a_x,$$
$$\beta_x = (bK)^2(\Delta c)^2 c_x - (cK)^2(\Delta b)^2 b_x$$

und Δ_x^2, K_x^3 die fundamentalen Covarianten der Form

$$\theta_x^3 = (bc)(ca)(ab)a_x b_x c_x$$

sind. Er zeigt, dass die Anwendung der Transformation (2) auf die gegebene Form das Resultat ergiebt, auf welches die Trans-

formation (1) führt, multiplicirt mit $\frac{2^3}{3^3} YP^3$, wo $Y = (cK)^3$ und P die Discriminante der Form θ_x^3 ist. (S. das folgende Referat.)

La. (Lp.)

G. Torelli. Della trasformazione cubica. Atti d. Acc. Pontaniana. XVIII und Palermo Rend. II. 165-171.

Bildet man aus den drei binären kubischen Formen a_x^3, b_x^3, c_x^3 die kubische simultane Covariante $\theta_x^3 = (ab)(bc)(ca)a_x b_x c_x$ und bezeichnet dann die quadratische und die kubische Covariante von θ_x^3 beziehungsweise mit Δ_x^2, K_x^3, so besteht die Identität

$$\alpha_x b_x^3 - \beta_x a_x^3 = \gamma_x c_x^3,$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha_x &= (aK)^3(\Delta c)^2 c_x - (cK)^3(\Delta a)^2 a_x, \\ \beta_x &= (bK)^3(\Delta c)^2 c_x - (cK)^3(\Delta b)^2 b_x, \\ \gamma_x &= (aK)^3(\Delta b)^2 b_x - (bK)^3(\Delta a)^2 a_x \end{aligned}$$

zu setzen ist. Aus dieser Identität folgt, dass die durch Elimination von x_1, x_2 aus den Gleichungen

$$c_x^3 = 0 \text{ und } y_1 b_x^3 - y_2 a_x^3$$

sich ergebende Resultante l_y^3 sich von der Resultante λ_y^3 der Gleichungen

$$c_x^3 = 0 \text{ und } y_1 \beta_x - y_2 \alpha_x = 0$$

nur um einen constanten Factor unterscheidet. Stellt man sich daher die Aufgabe, die binäre kubische Form c_x^3 der kubischen Transformation $\frac{y_1}{y_2} = \frac{a_x^3}{b_x^3}$ zu unterwerfen, so ist offenbar, dass es zur Lösung dieser Aufgabe nur der Ausführung der linearen Transformation $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha_x}{\beta_x}$ bedarf. (S. das vorangehende Referat.)

Ht.

G. Pittarelli. Sulle forme appartenenti all' ottaedro. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV. 509-513.

Zwischen der Oktaederform F (d. h. der Covariante 6ter Ordnung einer allgemeinen binären Form 4ter Ordnung), ihren

Covarianten $H = (F,F)_2$, $T = (F,H)_1$ und der Invariante $A = (F,F)_6$ besteht die Relation

$$36\,T^2 + 18\,H^3 + A\,F^4 = 0.$$

Setzt man nun

$$\xi_1 = -H,\ \xi_2 = \left(\frac{A}{18}\right)^{\frac{1}{3}} F^{\frac{4}{3}},$$

so wird

$$2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{A}{18}\right)^{\frac{1}{6}} T F^{\frac{2}{3}} = \sqrt{(\xi_1^3 - \xi_2^3)\xi_2}$$

und

$$(\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1) = 8\left(\frac{A}{18}\right)^{\frac{1}{3}} F^{\frac{1}{3}}\, T(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1),$$

d. h. das Differential $\frac{(x\,dx)}{\sqrt[3]{F}}$ wird durch jene Transformation in das elliptische Differential $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{8\left(\frac{A}{18}\right)^{\frac{1}{6}}}\,\frac{(\xi\,d\xi)}{\sqrt{(\xi_1^3 - \xi_2^3)\xi_2}}$ mit verschwindender Invariante g_2 übergeführt.

Setzt man zweitens

$$\xi_1 = H^{\frac{3}{4}},\quad \xi_2 = -\left(\frac{A}{18}\right)^{\frac{1}{4}} F,$$

so wird

$$2^{\frac{1}{2}}\,T = \sqrt{\xi_2^4 - \xi_1^4}$$

und

$$\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1 = -\frac{6\left(\frac{A}{18}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{-1}}\,H^{-\frac{1}{4}}\,T(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1),$$

d. h. das Differential $\frac{(x\,dx)}{\sqrt[4]{H}}$ wird durch jene Transformation in das elliptische Differential

$$-\frac{2^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{-1}}{6\left(\frac{A}{18}\right)^{\frac{1}{4}}}\,\frac{(\xi\,d\xi)}{\sqrt{\xi_2^4 - \xi_1^4}}$$

mit verschwindender Invariante g_3 übergeführt. Ht.

G. Pittarelli. Intorno alla trasformazione del differenziale ellittico effettuata per mezzo della rappresentazione tipica delle forme binarie di 3° e 4° grado. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV. 703-705.

Von Herrn Brioschi stammt eine Vereinfachung her in der Ableitung der von Herrn Hermite angegebenen Transformation des elliptischen Integrals erster Gattung in die typische Normalform $\frac{dz}{\sqrt{z^3-\frac{1}{4}iz-\frac{1}{4}j}}$. Die bez. Substitution war vom vierten Grade in der ursprünglichen Variabeln x. Der Verf. ersetzt dieselbe durch eine nur lineare, mit Anwendung von Polarenprocessen.

My.

R. Russell. Geometry of the quartic. Lond. M. S. Proc. XIX. 56-67.

Die vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung werden als Punkte in der Ebene der complexen Zahlen gedeutet und aus der Lage dieser Punkte mittelst geometrischer Construction die Wurzelpunkte der Hesse'schen Covariante und der Covariante 6ter Ordnung abgleitet. Beispielsweise sind die sechs Wurzelpunkte der letzteren Covariante durch folgende Eigenschaft bestimmt: Wenn man von einem dieser sechs Punkte das aus den vier Wurzelpunkten der vorgelegten Gleichung gebildete Viereck mittelst reciproker Radien transformirt, so verwandelt sich dasselbe in ein Parallelogramm.

Ht.

G. Maisano. Die Steiner'sche Covariante der binären Form 6ter Ordnung. Math. Ann. XXXI. 493-506.

Die Steiner'sche Covariante S einer binären Form 6ter Ordnung f wird mittelst symbolischer Rechnung durch die fundamentalen Invarianten und Covarianten der Grundform f ausgedrückt. Der Verfasser findet überdies, dass ebenso wie S auch die Covariante $15m-4Al$, gleich Null gesetzt, die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines dreifachen

Linearfactors der Grundform liefert. Wegen der Bedeutung von S, m, A, l vgl. das folgende Referat. Ht.

E. D'OVIDIO. Il covariante Steineriano di una forma binaria del 6° ordine. Torino Atti XXIV. 164-176.

Unter der Steiner'schen Covariante S der binären Form 6ter Ordnung f versteht der Verfasser die Discriminante der Polare $a_z^5 a_x$, wobei diese als binäre Form von z allein aufgefasst wird. Die Steiner'sche Covariante ist daher von der 8ten Ordnung und mit Benutzung des bekannten Ausdruckes für die Discriminante einer binären Form 5ter Ordnung ergiebt sich durch symbolische Rechnung der Wert

$$3^3 S = -3^2 5^3 \varDelta^2 - 2.3^3.5^2 Ak\varDelta - 3^3.5.A^2k^2$$
$$-(2^3.3A^2 + 2^4.3^2 B)fl + 2^3.A^3 H + 2^4.3^3 Afm + 2^6.3^2 fu,$$

wo

$$H = (f,f)_2,\ k = (f,f)_4,\ A = (f,f)_6,\ \varDelta = (k,k)_2,\ B = (k,k)_4,$$
$$l = (f,k)_4,\ m = (k,l)_2,\ n = (k,m)_2$$

zu setzen ist. Der Ausdruck stimmt mit demjenigen überein, welchen Maisano (vgl. das vorige Referat) gefunden hat. Das identische Verschwinden von S ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Form f einen dreifachen Linearfactor enthält. Ausserdem berechnet der Verfasser in entsprechender Weise die Discriminante der Polare $a_x^4 a_z^2$ sowie die Discriminante $a_z^3 a_x^3$; es ergeben sich für diese Discriminanten die Werte

$$(\tfrac{1}{6} Af - p)^2 - \tfrac{1}{6} k^3 \text{ und } \tfrac{1}{18} Af^2 - \tfrac{1}{8} fp - \tfrac{1}{2} Hk,$$

wo $p = (f,k)_2$ zu setzen ist. Das identische Verschwinden des ersteren dieser beiden Ausdrücke giebt die Bedingung für das Auftreten eines vierfachen Linearfactors in f, und das Verschwinden des zweiten Ausdruckes ist die Bedingung für das Auftreten eines fünffachen Factors. Ht.

P. GORDAN. Die Discriminante der Form 7ten Grades $f = a_x^7$. Math. Ann. XXXI. 566-600.

Der Verfasser drückt mit Hülfe symbolischer Rechnung die Discriminante der binären Form $a_x^7 = b_x^7 = \dots$ als ganze rationale Function der fundamentalen Invarianten dieser Grundform aus. Der dabei befolgte Gedankengang wird in der Einleitung vom Verfasser selbst kurz skizzirt und entspricht der Methode, deren sich der Verfasser früher bei den Formen 4[ter], 5[ter] und 6[ter] Ordnung bedient hat. Ist α_x ein Doppelfactor von a_x^7, so bestehen die beiden Gleichungen

$$(a\alpha)^6 a_1 = 0, \quad (a\alpha)^6 a_2 = 0,$$

welche in den Coefficienten von α_x vom Grade sechs sind. Aus diesen lassen sich nach Bézout und Cayley sechs Gleichungen vom Grade fünf in α herstellen, welche man aus

$$(a\alpha)^6 (ab) b_x^6 = 0$$

erhält, wenn man die linke Seite durch α_x dividirt. Diese sechs Gleichungen werden durch Ueberschiebungen so mit einander combinirt, dass sich mittelst Division von α_x Gleichungen 4[ten] Grades in den Coefficienten von α_x ergeben. So fortfahrend, gelangt der Verfasser schliesslich zu quadratischen Gleichungen, aus denen die Elimination der Coefficienten von α_x möglich ist. Es ergiebt sich auf diese Weise die Endgleichung

$$-\frac{972}{5} c_1 + A\left\{\frac{8569}{150} A^2 + \frac{2768}{5} A\gamma_{01} - \frac{10653}{4}\gamma_{02} + \frac{1488}{5}\gamma_{03}\right\}$$
$$+\frac{3627}{2}\gamma_{11} - \frac{20505}{2}\gamma_{12} - \frac{7425}{2}\gamma_{22} + 2430\gamma_{23} + 162\gamma_{33} = 0.$$

Hierin ist, wenn man

$$(f,f)_4 = k,\ (f,f)_6 = i,\ (k,f)_5 = r,\ (k,k)_4 = l,$$
$$(f,i^2)_4 = \varrho,\ (k,i^2)_4 = u,\ (l,i)_2 = v,\ 3(r,r)_2 = \tau$$

setzt,

$$c_1 = (\varrho,(\varrho,i))_2,\quad A = (i,i)_2,$$
$$\gamma_{01} = (i,u)_2,\ \gamma_{02} = (i,v)_2,\ \gamma_{03} = (i,\tau)_2,$$
$$\gamma_{11} = (u,u)_2,\ \gamma_{12} = (u,v)_2,\ \gamma_{22} = (v,v)_2,$$
$$\gamma_{13} = (u,\tau)_2,\ \gamma_{23} = (v,\tau)_2,\ \gamma_{33} = (\tau,\tau)_2.$$

Die linke Seite der obigen Endgleichung ist vom Grade 12 in den Coefficienten der Grundform f, und da sie, wie der Verfasser

mit Hülfe der speciellen Form $x_1^7+7x_1^5x_2^2-7x_1^2x_2^5+x_2^7$ zeigt, nicht identisch verschwindet, so ist sie die verlangte Discriminante.
Ht.

---

v. Gall. Das vollständige Formensystem der binären Form 7ter Ordnung. Math. Ann. XXXI. 318-336.

Das von Gordan aufgestellte volle System der invarianten Formen für die binäre Grundform 7ter Ordnung $f=a_x^7$ enthält mehrere Invarianten und Covarianten, welche reducibel sind, d. h. durch niedere Bildungen ganz und rational dargestellt werden können. Der Verfasser zählt die von Gordan aufgestellten Formen, nach dem Grade in den Coefficienten der Grundform f geordnet, auf und giebt bei jedem Grade die möglichen Reductionen an. Das schliesslich erhaltene volle Invariantensystem besteht aus 33 Invarianten, deren Grade in den Coefficienten bis zur Zahl 30 ansteigen, und aus 120 Covarianten, unter denen die Covariante $T_x^{13}=(f,(f,f)_2)_1$ diejenige von der höchsten Ordnung in den Veränderlichen ist. Ht.

---

v. Gall. Die irreduciblen Syzyganten zweier simultanen kubischen Formen. Math. Ann. XXXI. 424-440.

Das volle Invariantensystem zweier kubischen Grundformen a_x^3 und α_x^3 besteht aus 26 Formen. Für diese Formen stellt der Verfasser eine grosse Zahl von irreduciblen Syzygien auf, d. h. von Identitäten, welche nicht durch lineare Combination aus Identitäten niederer Grade erhalten werden können. Die linken Seiten der gefundenen Syzygien (die sogenannten Syzyganten) enthalten sämtlich Glieder von der Gestalt G_iG_k, wo G_i und G_k zwei Formen des Systems sind, und aus diesem Umstande folgt notwendig ihre Irreducibilität. Bei der Rechnung leisten die beiden Processe $\partial=\Sigma a_i\frac{\partial}{\partial\alpha_i}$ und $\delta=\Sigma\alpha_i\frac{\partial}{\partial a_i}$ gute Dienste, indem ihre Anwendung auf bekannte Identitäten zu neuen Identitäten führt. Ht.

---

v. Gall. Die Syzyganten zweier simultanen binären biquadratischen Formen. Math. Ann. XXXIII. 197-222.

Unter den 28 invarianten Formen des vollen Systems zweier binären biquadratischen Formen a_x^4 und α_x^4 giebt es 15 Covarianten C_2 und C_4 von der 2ten und 4ten Ordnung in den Veränderlichen. Der Verfasser stellt zunächst die Ueberschiebungen

$$(C_2, C_2')_1,\ (C_2, C_4)_1 \quad \text{und} \quad (C_4, C_4')_1$$

als Functionen jener 28 Formen dar, wobei sich die Rechnung durch geeignete Anwendung der Processe

$$d = \Sigma a_i \frac{d}{da_i},\ \delta = \Sigma \varDelta_i \frac{d}{da_i}\ (\varDelta = (ab)^2 a_x^2 b_x^2)$$

ausserordentlich vereinfacht. Nach Berechnung dieser Functionaldeterminanten geben die bekannten allgemeinen Identitäten, wie z. B. die Identität

$$(\varphi, \psi)_1 \chi + (\psi, \chi)_1 \varphi + (\chi, \varphi)_1 \psi = 0,$$

die Mittel an die Hand, für jene 28 invarianten Formen Syzyganten zu berechnen. Doch behält der Verfasser die Aufstellung des vollen Systems der irreducibIen Syzyganten — und diese Aufgabe bildet in der That bei derartigen Untersuchungen notwendig den Mittelpunkt des Interesses — einer späteren Veröffentlichung vor. Ht.

L. Schendel. Verschiedene Darstellungen der Resultante zweier binären Formen. Schlömilch Z. XXXIII. 1-13, 65-77.

Die Arbeit untersucht die Resultante zweier binären Formen mittelst einer besonderen combinatorisch-symbolischen Methode, welche vom Verfasser bereits wiederholt in früheren Arbeiten (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 135) angewandt worden ist. Ht.

E. d'Ovidio. Sopra alcuni invarianti di due forme binarie degli ordini 5 e 2 o 5 e 3 e in particulare sul risultante di esse. Memorie d. Soc. ital. delle Scienze (detta dei XL). IV.

E. d'Ovidio. Sopra alcuni invarianti di due forme binarie degli ordini 5 e 4 e sul risultante di esse. Rom. Acc. L. Mem. (4) IV. 607-622.

Eine wichtige Aufgabe bei der Untersuchung der Invarianten eines Paares binärer Formen ist die, den Ausdruck ihrer Resultante als Function der fundamentalen Invarianten des Paares zu finden. Dieselbe wird von Hrn. d'Ovidio in den beiden zu besprechenden Arbeiten für die Fälle gelöst, in denen die eine der Formen (f) vom fünften, die andere (φ) vom zweiten, dritten oder vierten Grade ist. Zu diesem Behufe fängt er mit der Untersuchung der Invarianten an, durch welche die Resultante auszudrücken ist (ihre Grade in den Coefficienten der gegebenen Formen ermittelt man aus der Betrachtung der Grade der Resultante); hierauf kann er den gesuchten Ausdruck mit unbestimmten Zahlcoefficienten hinschreiben, deren Werte durch besondere Annahmen über die Formen f, φ bestimmt werden. Folgendes sind die auf diesem Wege erreichten Ergebnisse:

1. Die beiden gegebenen Formen seien

$$f = a_x^5 = b_x^5 = \dots, \quad \varphi = \alpha_x^2 = \beta_x^2 = \dots,$$

$\varDelta$ die Discriminante von φ, und indem man unter $I_{m\mu}$ oder $I'_{m\mu}$ u. s. w. eine Invariante m^{ten} Grades in den Coefficienten von f, μ^{ten} Grades in denen von φ versteht, setze man

$$I_{21} = (ab)^4(a\alpha)(b\alpha), \quad I_{23} = (ab)^2(a\alpha)^2(b\beta)^2(a\gamma)(b\gamma),$$
$$I_{25} = (a\alpha)^2(a\beta)^2(b\gamma)^2(b\delta)^2(a\varepsilon)(b\varepsilon).$$

Dann kann man als Resultante von f und φ die Function

$$4\varDelta^2 I_{21} - 6\varDelta I_{23} + I_{25}$$

nehmen.

2. Sei $f = a_x^5 = b_x^5 = \dots$, $\varphi = \alpha_x^3 = \beta_x^3 = \dots$; man nenne die Hessiana $\varDelta = \varDelta_x^4 = \varDelta_x'^4 = \dots$, P die Invariante von φ. Ausserdem setzen wir

$$i = (ab)^4 a_x b_x,$$
$$I_{31} = -(ab)^4(ac)(bc)(c\alpha)^3,$$
$$I_{13} = (a\alpha)^3(a\beta)(a\gamma)(\beta\gamma)^2,$$
$$I_{22} = (ab)^4(a\alpha)(b\beta)(\alpha\beta)^2; \quad I'_{22} = (ab)^2(a\alpha)^3(b\beta)^3,$$
$$I_{35} = (a\alpha)^3(b\beta)^3(c\gamma)^3(a\delta)^2(b\varepsilon)^2(c\delta)(c\varepsilon); I'_{35} = (a\alpha)(i\alpha)^2(a\varDelta)^2(a\varDelta')^2;$$
$$I''_{35} = (ac)^2(a\alpha)^3(b\beta)^3(b\gamma)^2(c\gamma)(c\varDelta)^2.$$

Dann ist der gesuchte Ausdruck der Resultante:

$$162 P I_{31} + 2 I_{11}(81 I_{22} - 125 I'_{22}) + 8 I_{35} + 243 I'_{35} + 108 I''_{35}.$$

3. Endlich sei $f = a_x^5 = b_x^5 = \ldots$, $\varphi = \alpha_x^4 = \beta_x^4 = \ldots$ Die beiden Invarianten von φ seien ι und η, ihre beiden Covarianten $X = X_x^4 = X'^4_x = \ldots$, $\theta = \theta_x^6 = \theta'^6_x = \ldots$ Ferner setze man

$$H = H_x^6 = H'^6_x = (ab)^2 a_x^3 b_x^3,$$
$$i = i_x^2 = i'^2_x = (ab)^4 a_x b_x,$$
$$l = l_x^5 = (ia) i_x a_x^4;\quad T = T_x^9 = (aH) a_x^4 H_x^5,$$
$$A = (ab)^4 (cd)^4 (ac)(bd),$$
$$I_{41} = (ab)^4 (cd)^4 (a\alpha)(b\alpha)(c\alpha)(d\alpha);\quad I'_{41} = (Hi)^2 (H\alpha)^4,$$
$$I_{42} = (iX)^2 (i'X)^2;\ I'_{42} = (Hi)^2 (HX)^4;\ I''_{42} = -(ai)^2 (a\alpha)^3 (b\alpha)(b\beta)^4;$$
$$I'''_{42} = (H\alpha)^4 (H\beta)^2 (i\beta)^2,$$
$$I'_{43} = (H\alpha)^4 (H\beta)^2 (i\beta)^2;\quad I''_{43} = (HH')^2 (H\alpha)^4 (H'X)^4;$$
$$I'''_{43} = (H\alpha)^4 (HX)^2 (iX)^2;\quad I^{IV}_{43} = (HX)^4 (H\alpha)^2 (i\alpha)^2,$$
$$I_{45} = (a\alpha)^4 (b\beta)^4 (c\gamma)^4 (d\delta)^4 (a\varepsilon)(b\varepsilon)(c\varepsilon)(d\varepsilon),$$
$$I'_{45} = (aX)^4 (bX')^4 (a\alpha)(b\alpha)(i\alpha)^2,$$
$$I''_{45} = (H\alpha)^2 (H'\alpha)^2 (HX)^4 (H'X')^4,$$
$$I'''_{45} = (a\alpha)^4 (b\beta)^4 (H\gamma)^4 (aX)(bX)(HX)^2,$$
$$I^{IV}_{45} = (aX)^2 (lX)^2 (a\theta)^3 (l\theta)^3,$$
$$I^{V}_{45} = (a\theta)^5 (T\theta)(T\alpha)^4 (T\beta)^4.$$

Als Resultante der beiden Formen f, φ können wir dann die folgende Function nehmen:

$$\left(I_{45} + \frac{23.32}{9} I'_{45} + 16.7 I''_{45} - 4.9 I'''_{45} + \frac{32.5}{3} I^{IV}_{45} + 16.11 I^{V}_{45}\right)$$
$$+\left(-\frac{4.7.31}{27.5} I_{43} + \frac{5.23}{3} I'_{43} - \frac{4.6271}{9.7} I''_{43} + \frac{2^8.11.47}{9.5.7} I'''_{43}\right)\iota$$
$$+\left(-\frac{4.3259}{9.25.7} I_{42} - \frac{4.13^2.239}{27.5.7} I'_{42} + \frac{4.31733}{27.5.7} I''_{42} - \frac{3.13.167}{5.7} I'''_{42}\right)\eta$$
$$+\left(\frac{61.3491}{27.25.7} I_{41} + \frac{2.5.17.37}{81} I'_{41}\right)\iota^2$$
$$+ \frac{8821}{9.5.7} A\iota\eta.$$

Inbetreff der anderen vom Verfasser im Laufe der Untersuchung aufgestellten Resultate verweisen wir auf die Abhandlungen selbst. La. (Lp.)

A. R. Forsyth. Systems of reduced simultaneous ternary forms equivalent to a given ternary form, which involves several sets of variables. Quart. J. XXIII. 102-138.

Wenn es sich um die Untersuchung und Aufstellung von Invarianten eines Systems von ternären Grundformen handelt, welche mehrere Reihen der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 sowie der contragredienten Veränderlichen u_1, u_2, u_3 enthalten, so kann dieses Grundformensystem nach einem bekannten Satze von Clebsch stets ersetzt werden durch ein System von Formen, welche nicht mehr als eine einzige Reihe von Veränderlichen jeder Art enthalten. Die Gesamtzahl der unabhängigen Coefficienten der Formen des letzteren Systems muss notwendig übereinstimmen mit der Zahl der unabhängigen Coefficienten des ursprünglichen Formensystems. So besitzt beispielsweise die Form $r_x s_x$ neun Coefficienten und das äquivalente System besteht aus der Form $r_x s_x$ mit sechs Coefficienten und der Form (rsu) mit drei Coefficienten. Unter den Formen des äquivalenten Systems können auch Formen auftreten, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial u_3} = 0$$

genügen, ein Umstand, in Folge dessen, wie man sieht, die Zahl der $\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(m+1)(m+2)$ willkürlichen Coefficienten der Form $r_x^n u_a^m$ sich um $\frac{1}{4}n(n+1)m(m+1)$ vermindert. So besteht für die Function $r_x^2 s_y$ mit 18 Coefficienten das äquivalente System aus der Form $r_x^2 s_x$ mit 10 Coefficienten und der jener Differentialgleichung genügenden Form $r_x(rsu)$ mit $9-1=8$ Coefficienten. In derselben Weise werden für die Formen

$$r_x s_y t_z,\ r_x s_y u_a,\ r_x^2 s_y,\ r_x^2 s_y^2,\ \dots,\ r_x s_y t_z u_a v_b w_c$$

die äquivalenten „reducirten“ Systeme aufgestellt und bezüglich der Zahl der in den einzelnen Formen auftretenden unabhängigen Coefficienten untersucht. Ht.

———

F. DINGELDEY. Die Concomitanten der ternären kubischen Formen, insbesondere der Form $x_1x_3^2-4x_2^3+g_2x_1^2x_2+g_3x_1^3$. Math. Ann. XXXI. 157-176.

Nachdem der Verfasser der Uebersicht halber eine vergleichende Zusammenstellung der verschiedenen in den Arbeiten von Aronhold, Cayley, Clebsch, Gordan und Gundelfinger angewandten Bezeichnungen für die invarianten Formen der ternären kubischen Form gegeben hat, werden sämtliche 34 invarianten Formen (Invarianten, Covarianten, Contravarianten und Zwischenformen) der kanonischen Form $f = x_1 x_3^2 - 4x_2^3 + g_2 x_1^2 x_2 + g_3 x_1^3$ berechnet, d. h. als Functionen von x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3; g_2, g_3 ausgedrückt. Schliesslich werden jene 34 invarianten Formen auch für die specielle kubische Form $f = ax_1 x_3^2 - 4bx_2^3$ berechnet, und es wird gezeigt, wie man mit Hülfe gewisser von diesen Ausdrücken die Gleichung einer beliebigen Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt in jene kanonische Gestalt $ax_1 x_3^2 - 4bx_2^3 = 0$ transformiren kann. Ht.

F. MERTENS. Ueber die invarianten Gebilde einer ternären kubischen Form. Wien. Ber. XCVII. 437-518.

Die Arbeit behandelt die zuerst von P. Gordan mittelst symbolischer Rechnung erledigte Aufgabe, für eine kubische ternäre Form das System derjenigen invarianten Gebilde (Invarianten, Covarianten, Contravarianten, Zwischenformen) aufzustellen, durch welche jedes andere invariante Gebilde ganz und rational ausdrückbar ist. Die Methode schliesst sich in der Hauptsache an diejenigen Entwickelungen an, welche in einer früheren Arbeit (vgl. F. d. M. Bd. XIX. 1887. 131) dem Verfasser zum Beweise des Satzes dienten, wonach die Invarianten eines Systems von Grundformen dadurch entstehen, dass man auf eine ganze homogene Function der Coefficienten der transformirten Grundformen gewisse Differentiationsprocesse so oft anwendet, bis das Resultat von den Substitutionscoefficienten frei wird. Die einzelnen Schritte der Rechnung sind durch die folgenden Ergebnisse bezeichnet: Zunächst wird gezeigt, dass

alle invarianten Gebilde der ternären kubischen Form, mit $(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^r$ multiplicirt, wo r den Exponenten des Gebildes, d. h. eine gewisse dem Gebilde eigene ganze Zahl bezeichnet, als ganze Functionen von 16 besonderen invarianten Gebilden der Grundform darstellbar sind. Diese 16 Gebilde steigen in Bezug auf die Coefficienten der kubischen Form bis zum 7ten Grade an. Hieraus darf man keineswegs schliessen, dass alle invarianten Gebilde der Grundform durch diese 16 Gebilde in ganzer Weise ausgedrückt werden können, da es sehr wohl ganze Functionen der 16 Gebilde giebt, welche durch $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ teilbar sind, ohne dass der Quotient wieder eine ganze Function jener 16 Gebilde wäre. Die 16 invarianten Gebilde werden ferner zu einem gewissen Systeme von 21 invarianten Formen ergänzt, mit deren Hülfe in Verbindung mit $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ nicht nur alle invarianten Gebilde vom Exponenten 0, sondern überdies noch alle überhaupt möglichen invarianten Gebilde der ersten sieben Grade in ganzer Weise zusammensetzbar sind. Hieraus ergiebt sich schliesslich das volle Invariantensystem. Dasselbe besteht im ganzen aus 34 invarianten Gebilden, welche in Bezug auf die Coefficienten der Grundform bis zum 12ten Grade ansteigen. Ht.

J. Deruyts. Sur la théorie des formes algébriques à un nombre quelconque de variables. Belg. Bull. (3) XV. 951-980.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 935-937.

Eine wichtige, aber in Kürze kaum zu besprechende Arbeit, in welcher der Verfasser die (bisher nur für die binären Formen durchforschte) Theorie der Semiinvarianten und Semicovarianten auf Formen mit einer beliebigen Anzahl von Variabeln ausdehnt. Mn. (Lp.)

W. Gross. Ueber die Combinanten binärer Formensysteme, welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind. Math. Ann. XXXII. 136-150.

Ein Auszug aus der Doctordissertation des Verfassers, über welche bereits in F. d. M. XIX. 1887. 708 berichtet worden ist.
My.

G. Frobenius. Ueber die Jacobi'schen Covarianten der Systeme von Berührungskegelschnitten einer Curve vierter Ordnung. J. für Math. CIII. 139-183.

Siehe Abschnitt IX. My.

H. Schwarz. Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen. Diss. Halle. H. W. Schmidt.

Siehe Abschnitt VIII. My.

K. E. J. Keil. Covarianten eines ebenen Systems, bestehend aus einem Kegelschnitt und mehreren Geraden. Diss. Giessen. 19 S. 4°.

E. Meyer. Die rationale ebene Curve vierter Ordnung und die binäre Form sechster Ordnung. Königsberg i. Pr. 40 S.

G. Battaglini. Intorno ad un' applicazione della teoria delle forme binarie quadratiche all' integrazione dell'equazione differenziale ellittica. Atti della Reale Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli. (2) II. 11 S.

Abdruck aus Batt. G. XXIV. 128-140 (Bericht in F. d. M. XVIII. 1886. 97-98). Vi.

G. Battaglini. Sulle forme binarie bilineari. Atti della Reale Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli. (2) II. 14 S.

Abdruck aus Batt. G. XXV. 281-297 (Bericht in F. d. M. XIX. 1887. 126). Vi.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

J. Vivanti. Ein Satz aus der Eliminationstheorie. Schlömilch Z. XXXIII. 184-185.

G. Loria. Zur Eliminationstheorie. Schlömilch Z. XXXIII. 357-358.

Herr Vivanti bildet aus $f = a_0 x^m + \cdots$, $g = b_0 x^m + \cdots$ die beiden Gleichungen $b_0 f - a_0 g = 0$, $b_m f - a_m g = 0$ vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade und geht von diesen zu zwei Gleichungen $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades, ... auf dieselbe Art über. Dies wird dazu benutzt, um zwei Gleichungen mit derselben Resultante zu erhalten, wie f, g sie haben, deren Coefficienten in gewissen Coefficienten a, b linear sind.

Herr Loria macht darauf aufmerksam, dass die Sylvester'sche Eliminations-Methode diese und allgemeinere Resultate einfacher liefert. No.

H. Laurent. Sur la théorie de l'élimination. Nouv. Ann. (3) VII. 60-65, 116-119.

Die Resultante $R(y)$ zweier Gleichungen der Grade m, $n \leqq m$

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0$$

wird folgendermassen gebildet: Man bestimmt die Reste von φ, $x.\varphi$, $x^2\varphi$, ..., $x^{n-1}\varphi$ durch ψ und eliminirt aus diesem Systeme x, x^2, ..., x^{n-1}. — $R(y)$ wird vom Grade $m.n$ in y, und jede rationale Function einer Lösung von (1) wird in die Form einer ganzen Function des Grades $mn-1$ einer Wurzel von $R = 0$ sich bringen lassen. Liegt dann noch eine dritte Gleichung

$$\chi(x, y) = 0$$

vor, so kann man dieselbe Methode benutzen, um y zu eliminiren, indem man χ auf jene Form bringt, dann die Reste von

χ, $y\cdot\chi$, $y^2\cdot\chi$, ... $y^{mn-1}.\chi$ bildet, die bei der Division durch R bleiben, und dieses lineare System behandelt.

Die bei mehrfachen Wurzeln nötigen Aenderungen der Methode übergehen wir.

In der zweiten Note wird angegeben, wie man die Reste, welche notwendig sind, direct berechnen kann. No.

E. Pomey. Sur le plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers. Nouv. Ann. (3) VII. 66-90, 407-427.

Es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines grössten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Functionen aufgestellt, der Teiler und die beiden Quotienten sollen berechnet werden. Zuerst wird die Euler-Bézout-Sylvester'sche Methode discutirt, sodann die Bézout-Cauchy'sche. Eingehende Untersuchung der hierbei auftretenden Determinanten und ihrer Unterdeterminanten. Sn.

R. Perrin. Sur la relation qui existe entre p fonctions entières de $(p-1)$ variables. C. R. CVI. 1789-1791.

R. Perrin. Sur les critéria des divers genres de solutions multiples communes à deux équations. C. R. CVII. 22-24.

R. Perrin. Sur les critéria des divers genres de solutions multiples communes à trois équations à deux variables. C. R. CVII. 219-221.

Ist R die Resultante von $u=0$, $v=0$, $w=0$, wobei die absoluten Glieder dieser Functionen a, b, c sein mögen, und bezeichnet man

$$R_{pqs} = \frac{\partial^{p+q+s} R}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r},$$

so ist, wie sehr einfach bewiesen wird:

$$R = R_{100}u + R_{010}v + R_{001}w - \frac{1}{2!}(R_{200}u^2 + 2R_{110}uv + \cdots)$$
$$+ \frac{1}{3!}(R_{300}u^3 + 3R_{210}u^2v + \cdots) - \cdots.$$

Aus dieser Formel werden manche interessante Schlüsse gezogen. Man kann sie z. B. nach den Variabeln x, y, z differentiiren und erhält so neue Relationen, die für die Eliminationstheorie nützlich sind.

Stellt man die Formel für zwei Funtionen u, v einer Variabeln x her, welche gemeinsame Factoren haben, z. B. $u = \alpha^2\beta^2 u_1$, $v = \alpha^2\beta v_1$, wo α, β lineare Factoren sind, während u_1, v_1 zu einander teilerfremde Polynome bedeuten, so wird $R = 0$, und daraus folgt, dass rechts kein einzelnes Glied vorkommen kann, welches α oder β in niedrigerer Potenz enthält, als alle anderen Glieder dies thun. Daraus folgt $R_{10} = R_{01} = R_{20} = R_{02} = R_{30} = R_{11} = 0$; das Verschwinden der ersten 5 Werte folgt schon aus dem Lagrange'schen Theorem; $R_{11} = 0$ ist neu. Die oben erwähnte Differentiation nach x liefert noch $3R_{21}^2 - 4R_{30}R_{12} = 0$. In einer Tabelle werden für $u = \alpha^\varkappa\beta^\lambda u_1$, $v = \alpha^\mu\beta^\nu v_1$ bis zu $\varkappa+\lambda = 4$, $\mu+\nu = 4$ die entsprechenden Resultate angegeben.

Die dritte Note behandelt den Fall von 3 Polynomen u, v, w in x, y; aus der Formel werden die Bedingungen dafür abgeleitet, dass $u = 0$ durch eine gegebene Anzahl der gemeinsamen Punkte für $v = 0$, $w = 0$ geht. Es zeigt sich: Teilt man die rechte Seite der Gleichung in homogene Gruppen nach u, v, w, dann ist die Gruppe niedrigsten Grades mit nicht verschwindenden Coefficienten in 9 lineare Factoren zerlegbar, welche bez. den 9 gemeinsamen Punkten der drei Curven entsprechen.

No.

E. Netto. Untersuchungen aus der Theorie der Substitutionen-Gruppen. J. für Math. CIII. 321-336.

Der Verfasser geht von der Bemerkung aus, dass das Hauptergebnis einer Arbeit von Hrn. Frobenius (J. für Math. CI) als eine bedeutsame Verallgemeinerung einer früher von ihm aufgestellten Formel aufzufassen sei, und sucht nun umgekehrt wieder über den Inhalt der Frobenius'schen Arbeit hinauszugehen.

Dahin gehört zuvörderst der Satz, dass das k-fache aller

Cykel k^{ter} Ordnung, die in einer beliebigen Gruppe H vorkommen, ein Vielfaches der Ordnung 4 der Gruppe ist. Herr Frobenius hatte sich auf den Fall $k = 1$ und transitive Gruppen beschränkt. Daran schliessen sich Fragen der Art, wann die Anzahl aller Substitutionen aus n Elementen, welche keinen Cyklus von k Elementen besitzen, durch k teilbar ist. Dazu muss k eine Primzahl sein. Das Verhältnis der eben erwähnten Anzahl zu $n!$ nähert sich mit wachsendem n einem eigentümlichen Grenzwert, nämlich $e^{\frac{1}{k}}$ u. s. f.

Im besonderen geht der Verfasser zuletzt auf Gruppen ein, deren Ordnung die Potenz einer Primzahl p ist. Das Hauptresultat ist hier, dass jede Gruppe der Ordnung p^{μ} und des Grades p^{a} eine Untergruppe der Ordnung $p^{\mu-1}$ besitzt. Bei Hrn. Frobenius war wiederum der Satz bereits für transitive Gruppen bewiesen worden. My.

L. Sylow. Sur les groupes transitifs dont le degré est le carré d'un nombre premier. Acta Math. XI. 201-256.

Herr Sylow hat gezeigt (Math. Ann. V), dass, wenn p^{m} die höchste Potenz der Primzahl p ist, welche die Ordnung einer Gruppe G teilt, diese Ordnung von G gleich $p^{m}n\,(np+1)$ ist, wo n durch p nicht geteilt werden kann; dass ferner G eine Gruppe H der Ordnung p^{mn} enthält und diese eine dritte Gruppe J der Ordnung p^{m}; dass endlich die Anzahl solcher in G enthaltenen Gruppen der Ordnung p^{m} gleich $(np+1)$ ist. Diese Zahl allgemein zu ermitteln, wäre von Wichtigkeit. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem für den Fall gelöst, in welchem der Grad der Gruppe p^{2} ist; die Formen von J, H werden bestimmt; die Grösse der Zahl n untersucht; es werden hieraus Folgerungen gezogen, die sich auf die Primitivität und die Nicht-Primitivität von Gruppen stützen. No.

H. Maschke. Ueber eine quaternäre Gruppe von 51840 linearen Substitutionen, welche die ternäre Hesse'sche Gruppe als Untergruppe enthält. Gött. N. 78-86.

Es handelt sich um eine zuerst von Herrn Witting besprochene Gruppe, deren erzeugende Substitutionen in sehr einfacher Form gegeben werden. Für die in ihr enthaltene ternäre Hesse'sche Collineationsgruppe wird das volle Formensystem aufgestellt, welches sich aus fünf Formen zusammensetzt. Ebenso wird für die Gesamtgruppe dasselbe Resultat erreicht, hinsichtlich des Beweises aber auf eine spätere Mitteilung verwiesen. No.

A. Cayley. On the theory of groups. American J. XI. 139-157.

Die Arbeit giebt für die Gruppen von n Permutationen, denen n Dinge unterworfen sind, eine graphische Darstellung. Jedem Dinge wird ein Punkt in der Ebene zugeordnet und jede Substitution wird dargestellt durch einen die n Punkte verbindenden Weg von bestimmter Farbe, welcher aus einem oder aus mehreren geschlossenen Polygonen besteht, je nachdem die darzustellende Substitution eine cyklische ist oder sich in mehrere cyklische Substitutionen zerlegen lässt. Durchläuft man einen Weg von bestimmter Farbe in entgegengesetzter Richtung, so erhält man die reciproke Substitution. Es werden nun bis zu $n = 12$ die in Rede stehenden Permutationen derart untereinander geschrieben, dass die n^2 Buchstaben die Felder eines Quadrates ausfüllen. Hieran schliesst sich die Ausführung der Zeichnungen für die einzelnen Fälle. Ht.

G. Foglini. Delle sostituzioni e della loro applicazione delle equazioni algebriche. Rom. Acc. Pont. d. N. L. Mem. III. 3-90.

Die Abhandlung liefert nicht das Mindeste an neuen Methoden, Anschauungen, Resultaten. Es ist eine Zusammenstellung der elementaren Eigenschaften der Substitutionen nebst der Anwendung auf die Gleichungen der Grade 2, 3, 4. No.

E. GOURSAT. Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. C. R. CVI. 1786-1789.

Jeder linearen Substitution von vier Variabeln, welche eine quadratische, homogene Form unverändert lässt, kann man eine lineare Substitution einer gewissen Form entsprechen lassen, derart, dass die Aufsuchung der linearen orthogonalen Substitutionsgruppen endlicher Ordnung von vier Variabeln sich auf diejenigen linearen Substitutionen von jener Form zurückführen lässt. Jeder solchen endlichen, orthogonalen Substitutionsgruppe kann man eine regelmässige Einteilung des Raumes in eine endliche Anzahl von Regionen zuordnen. Diese können zu den regulären Figuren im Raume von vier Dimensionen in Beziehung gesetzt werden. No.

C. CLAPIER. Solution.

L. LÉVY. Note d'algèbre. J. de Math. spéc. (3) II. 249-252, 274-275.

Der einfachste Fall eines Noether'schen Satzes über die Schnittpunkte zweier Curven wird in der ersten Arbeit falsch, in der zweiten richtig bewiesen. No.

B. MARGGRAFF. Ueber primitive Gruppen mit transitiven Untergruppen geringeren Grades. Diss. Giessen. 31 S. 8°.

TH. MUIR. The theory of determinants in the historical order of development. Edinb. Proc. XV. 481-544.

Fortsetzung früherer Abhandlungen (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 111, XIX. 1887. 145). Der vorliegende Teil beendigt die Besprechung von Cauchy's Arbeit aus dem Jahre 1812. Nach einer kurzen Rückschau auf die Periode von 1693-1812, während welcher nach des Verfassers Bemerkung fast jeder bedeutungsvolle Fortschritt von französischen Mathematikern herrührt, und hinter einer synoptischen Tabelle, welche die allmählichen Fort-

schritte in der Theorie während dieser Periode aufweist, fährt der Verf. in der Besprechung der Abhandlungen und Schriften fort, verfasst von Gergonne (1813), Wronski (1815), Desnanot (1819), Cauchy (1821), Scherk (1825), Schweins (1825), Jacobi (1827). Cly. (Lp.)

Th. Muir. An incorrect footnote and its consequences. Nature XXXVII. 246-247, 438-439.

R. Copeland. Nature XXXVII. 343-344.

In den fünf Auflagen von Baltzer's Determinanten pag. 1 wird eine Schrift „Demonstratio eliminationis Cramerianae" dem Mollweide zugeschrieben. Dieselbe ist ohne Bezeichnung des Verfassers mit dem Titel erschienen (Leipzig 1811): Ad memoriam Kregelio-Sternbachianam in auditorio philosophorum die XVIII. Julii, MDCCCXI. h. IX. celebrandam invitant ordinum Academiae Lips. Decani seniores caeterique adcessores — 'Demonstratio eliminationis Cramerianae'. Ihr Verfasser ist aber nicht Mollweide sondern De Prasse. Lp.

F. A. y C. M. Morales. Teoría elemental de las determinantes y sus principales aplicaciones al algebra y la geometría. Buenos Ayres. M. Biedona.

Anzeige in Nature XXXVIII. 537-538.

Th. Muir. Nomenclature in determinants. Nature XXXVIII. 589.

Der Verfasser tritt mit Bezug auf die Anzeige des vorangehenden Werkes für Beibehaltung der alten gebräuchlichen Namen ein und spricht sich gegen unnötige Einführung neuer Benennungen aus. Lp.

A. Powel. Anwendung der Determinanten in der Schule. Pr. Realgymn. Gumbinnen.

Darstellung ohne besondere Eigentümlichkeit. No.

W. Thomson. Introduction to determinants, with numerous examples. Edinburgh.

W. Scheibner. Mathematische Bemerkungen. Leipz. Ber. 1-13.

Diese Bemerkungen sind Auszüge aus Briefen an R. Baltzer; sie beziehen sich auf dessen „Determinanten"-Buch sowie die „allgemeine Arithmetik" und geben eine Reihe von Zusätzen, Veränderungs- und Verbesserungs-Vorschlägen. No.

F. J. Studnička. Neue Ableitung des dritten Fundamentalsatzes der Determinantentheorie. Casop. XVII. 193. (Böhmisch.)

Wenn man den Laplace'schen Zerlegungssatz als erstes, die Multiplicationsregel als zweites Haupttheorem der Lehre von den Determinanten hinstellt, so bildet die Formel, welche das Verhältnis von gegebenen Determinanten und zugehörigen Subdeterminanten zum adjungirten System ausdrückt, den dritten Fundamentalsatz. Sowie nun der zweite Satz direct aus dem ersten (nach Gordan), ebenso wird der dritte aus dem zweiten abgeleitet, wohingegen derselbe in vorliegender Abhandlung ohne Verwendung des Multiplicationstheorems und zwar auf Grundlage einer vom Verfasser früher (siehe F. d. M. XII. 1880. 114) gelieferten Transformationsformel unter Zuhilfenahme des ersten Haupttheorems entwickelt wird. Std.

B. J. Clasen. Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants. Brux. S. sc. XII B. 251-281.

P. Mansion. Rapport. Ibid. A. 50-59.

Aus den beiden ersten Gleichungen $(1_1), (1_2), (1_3), (1_4), (1_5)$:

$$(1_i) \qquad a_i x + b_i y + c_i z + d_i u + e_i v = f_i$$

erhält man, wenn man $a_1 b_2 - a_2 b_1 = (ab)$ setzt:

$$(2_2) \qquad (ab)y + (ac)z + (ad)u + (ae)v = (af),$$

danach:

$$(2_1) \qquad -(ab)x + (bc)z + (bd)u + (be)v = (bf).$$

Aus $(2_1), (2_2), (1_3)$, danach aus (3_3) und (2_2), aus (3_3) und (2_1) eitet man her:

$$(3_1) \qquad (abc)z + (abd)u + (abc)v = (abf),$$

$$(3_2) \qquad -(abc)y + (acd)u + (ace)v = (acf),$$

$$(3_3) \qquad (abc)x + (bcd)u + (bce)v = (bcf),$$

wo (abc) die Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$ bedeutet. Aus (1_4), (3_1), (3_2), (3_3) eliminirt man leicht x, y, z und findet, wenn man $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = (abcd)$ setzt:

$$(4_4) \qquad (abcd)u + (abce)v = (abcf),$$

u. s. w. Alle Eliminationen erfolgen durch Addition und Subtraction bei der Aufsuchung der Gleichungen (2_2), (3_3), (4_4), ...; sie gelingen, weil die Coefficienten der aus den Gruppen (2), (3), (4) zu eliminirenden Unbekannten gleich sind. Die Elimination, welche die Gleichungen (2_1), (3_1) und (3_2), (4_1), (4_2) und (4_3) giebt, geschieht auch durch Addition und Subtraction, aber ausserdem schafft man durch Division einen nutzlosen Factor fort, der bei den Rechnungen auftritt. Dies beruht auf dem Satze $(abc \ldots gkl)\,(abc \ldots gh) = (abc \ldots gk)\,(abc \ldots gl) - (abc \ldots gl)\,(abc \ldots ghk)$.

Bei dieser Art der Darstellung der Lösung der linearen Gleichungen sind alle Rechnungen umkehrbar, so dass die Verification der Endwerte nicht nötig ist, wie in dem Falle, wo man die Determinanten anwendet. Die Erörterung der Fälle der Unvereinbarkeit und der Unbestimmtheit macht sich ganz natürlich. Unter dem praktischen Gesichtspunkte ist die neue Methode oder die „Methode der gleichen Coefficienten" förderlicher als die gewöhnliche Methode. Sie liefert ausserdem das Mittel, eine beliebige Determinante schneller als durch Zerlegung in Unterdeterminanten zu berechnen. Hr. Clasen verwendet zur Darstellung seiner Theorie die Methode der unbestimmten Coefficienten, ohne auf die Determinanten zurückzugreifen.

Mn. (Lp.)

———

A. S. Flint. A brief control for general solutions of normal equations. Ann. of Math. IV. 182-185.

Von den „Normalgleichungen" der Ausgleichungstheorie wird hier nur der Umstand gebraucht, dass ihr Coefficienten-System symmetrisch ist. Findet dies bei

$$\sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\lambda = y_\varkappa, \quad \sum_\lambda \alpha_{\varkappa\lambda} y_\lambda = x_\varkappa \quad (\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n)$$

statt, so wird als Kontrolle der aus der Determinantentheorie sofort ersichtliche Satz verwendet

$$n = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} \alpha_{\varkappa\lambda}.$$

No.

A. H. Anglin. On certain theorems mainly connected with alternants (II). Edinb. Proc. XV. 381-396.

Fortsetzung eines früheren Aufsatzes über denselben Gegenstand in Edinb. Proc. XIII. (F. d. M. XVIII. 1886. 115).

Cly. (Lp.)

A. H. Anglin. Alternants which are constant multiples of the difference-product of the variables. Edinb. Proc. XV. 468-476.

Bezweckt eine Verallgemeinerung gewisser in der vorangehenden Abhandlung enthaltenen Sätze betreffs ganzer Functionen allein.

Cly. (Lp.)

Th. Muir. On a simple class of alternants expressible in terms of simple alternants. Edinb. Proc. XV. 298-308.

Bezieht sich auf Determinanten von etwas allgemeinerer Form als

$$\begin{vmatrix} \varphi(a), & \chi(a), & \cdots \\ \varphi(b), & \chi(b), & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix},$$

auf welche der Name „Alternanten" bisher beschränkt worden ist.

Cly. (Lp.)

Th. Muir. On vanishing aggregates of determinants. Edinb. Proc. XV. 96-105.

Der Artikel bezieht sich auf eine Abhandlung von Herrn Kronecker: „Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme" (Berl. Ber. 1882. 821-824, F. d. M. XIV. 111), ferner auf Arbeiten der Herren Runge, Mehmke und Schendel. Es werden mannigfaltige Beispiele von identisch verschwindenden Summen von Subdeterminanten gegeben. Als ein Beispiel diene das Theorem 7: Aus irgend zwei Determinanten n^{ter} Ordnung A und B bilde man zuerst ein System von n Determinanten, von denen jede in einer Zeile mit A und in den übrigen mit B übereinstimmt, danach ein zweites System, in welchem jede in einer Zeile mit B und in den übrigen mit A übereinstimmt, dann ist die Summe der Determinanten des ersten Systems gleich derjenigen des zweiten. Cly. (Lp.)

G. Loria. Nota su una classe di determinanti. Batt. G. XXVI. 329-333.

Es werden die Werte der Determinanten bestimmt, die aus der Matrize entstehen:

$$\begin{matrix} 1, \lambda_1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \ldots, \lambda_1^x \\ 1, \lambda_2, \lambda_2^2, \lambda_2^3, \ldots, \lambda_2^x \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1, \lambda_n, \lambda_n^2, \lambda_n^3, \ldots, \lambda_n^x. \end{matrix} \quad (x > n)$$

No.

A. Tarleton. On a new method of obtaining the conditions fulfilled when the harmonic determinant equation has equal roots. Dublin Proc. (3) I. 10-15.

Die Determinante $\Delta = |p_{ik} - \lambda f_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ist die Discriminante von $U - \lambda V$, wo U und V zwei Formen zweiten Grades von n Veränderlichen sind. Wenn V immer positiv ist, kann es durch eine lineare Transformation als die Summe der Quadrate der n Veränderlichen ausgedrückt werden. Wird U

in eine Function dieser selben Veränderlichen transformirt, so wird die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11}-\lambda, & p_{12}, & \dots, & p_{1n} \\ p_{12}, & p_{22}-\lambda, & \dots, & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{1n}, & p_{2n}, & \dots, & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Setzt man in dieser Determinante $p_{11}-\varLambda_1, p_{22}-\varLambda_2, \dots$ an die Stelle von $p_{11}-\lambda, p_{22}-\lambda, \dots$, indem unter $\varLambda_1, \varLambda_2, \dots$ Functionen von λ verstanden werden, so gehe Δ in Δ' über. Somit:

$$\frac{d\Delta'}{d\lambda} = \frac{\partial \Delta'}{\partial \varLambda_1}\frac{d\varLambda_1}{d\lambda} + \frac{\partial \Delta'}{\partial \varLambda_2}\frac{d\varLambda_2}{d\lambda} + \dots,$$

welche Gleichung unter der Voraussetzung $\varLambda_1 = \varLambda_2 = \dots = \lambda$ übergeht in:

$$\frac{d\Delta'}{d\lambda} = -(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \dots + \Delta_{nn}),$$

wenn man mit Δ_{rs} in bekannter Weise die Unterdeterminanten von Δ bezeichnet. Nun wird durch die Betrachtung des Systems von n linearen Gleichungen

$$p_{1k}x_1 + p_{2k}x_2 + \dots + (p_{kk}-\lambda)x_k + \dots + p_{nk}x_n = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

gezeigt, dass, wenn λ eine Wurzel von $\Delta = 0$ ist, alle Determinanten Δ_{kk} dasselbe Zeichen haben; ist also ihre Summe Null, so muss jede einzelne Null sein. Mithin muss für eine zweifache Wurzel von $\Delta = 0$ jede Unterdeterminante von Δ verschwinden. Die Untersuchung lässt sich, wie gezeigt wird, leicht auf den Fall von m gleichen Wurzeln ausdehnen. Gbs. (Lp.)

Marchand. Discussion de l'équation en s. Nouv. Ann. (3) VII. 431-435.

Es handelt sich um die Gleichung

$$F(s) = | a_{\varkappa\lambda} - \varepsilon_{\varkappa\lambda} s | = 0.$$

Der ausgesprochene Satz ist aber, wie die allgemeine Theorie, ebenso wie einfache Beispiele zeigen, falsch, dass nämlich die Existenz einer mehrfachen Wurzel von $F(s) = 0$ das Verschwinden von Unterdeterminanten nach sich ziehen soll. No.

Weill. Sur une forme du déterminant de Vandermonde. Nouv. Ann. (3) VII. 427-429.

Es ist

$$|x_\lambda^\varrho| = |S_p^{x\lambda}|, (\lambda, p = 1, 2 \dots n),$$

wenn $S_p^{x\lambda}$ die Summe der Producte von je p der Grössen

$$x_1, x_2, \dots x_{\lambda-1}, x_{\lambda+1}, \dots x_n$$

bedeutet. No.

Raimondi. Un teorema sui determinanti di differenze. Batt. G. XXXI. 185-187.

Die Zeilen einer Determinante n^{ter} Ordnung werden so bestimmt, dass die erste Zeile die Glieder einer arithmetischen Reihe $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, die zweite die Glieder ihrer ersten Differenzenreihe, u. s. f., die letzte die constanten Glieder c der $(n-1)^{\text{ten}}$ Differenzenreihe; dann ist der Wert der Determinante gleich c^{n+1}. No.

K. Weihrauch. Ueber gewisse Determinanten. Schlömilch Z. XXXIII. 126-128.

Es werden die Werte von

$$C_{2\nu} = |\, 1, \cos x_k, \sin x_k, \cos 2x_k, \sin 2x_k, \dots, \sin(\nu-1)x_k, \cos \nu x_k \,|,$$
$$S_{2\nu} = |\, 1, \cos x_k, \sin x_k, \cos 2x_k, \sin 2x_k, \dots, \sin(\nu-1)x_k, \sin \nu x_k \,|$$

bestimmt. Bezeichnet man

$$P_{2\nu} = \prod_{h=1}^{2\nu-1} . \prod_{k=h+1}^{2\nu} \sin \frac{x_k - x_h}{2}, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{2\nu} x_k,$$

so ist

$$C_{2\nu} = (-1)^\nu 2^{2\nu^2-2\nu+1} P_{2\nu} . \sin \frac{\sigma}{2},$$

$$S_{2\nu} = (-1)^{\nu-1} 2^{2\nu^2-2\nu+1} P_{2\nu} . \cos \frac{\sigma}{2}.$$

No.

F. G. Teixeira. Démonstration d'une formule de Waring. Nouv. Ann. (3) VII. 382-384.

Die bekannte Waring'sche Formel wird nach einer von Hrn. M. d'Ocagne benutzten Methode abgeleitet. No.

J. Mouchel. Correspondance. Nouv. Ann. (3) VII. 400.

Es sei $\sum_i a_{ik} = s_k$, dann ist

$$|s_k - 2a_{ik}| = (-1)^{n-1}2^{n-1}.(n-2).|a_{ik}|. \quad (i,k = 1,\ldots,n).$$

No.

J. Hermes. Determinanten bei wiederholter Halbirung des ganzen Winkels. Hoppe Arch. (2) VI. 276-293.

Es sei $\alpha = 2\pi : 2^\nu$ und

$$D_\nu = |\cos(\varkappa . \lambda . \alpha)|, \quad (\varkappa, \lambda = 1, 3, 5, \ldots, (2^{\nu-2}-1)),$$

dann ist D_ν für $\nu \gtreqless 3$ eine Potenz von 2, verschwindet aber für den doppelt so grossen Wert des Winkels. Es findet sich

$$D_\nu = (2^{\nu-4})^{2^{\nu-4}}.$$

No.

G. Brunel. Sur les racines des matrices zéroïdales. C. R. CVI. 467-470.

Die n^{te} Wurzel aus der zeroidalen Matrize kann als lineare Function von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Matrizen angesehen werden, deren Elemente $\frac{1}{2}n(n-1)$ Constanten enthalten; ebenso viele Constanten treten als Coefficienten der linearen Function auf. Es werden einige Eigenschaften der constituirenden Matrizen abgeleitet.

No.

A. Kumamoto. Zur Theorie der „Matrices" Tokio Math. Ges. III. 153-161. (Japanisch.) E.

A. Buchheim. Note on matrices in involution. Mess. (2) XVIII. 102-104.

Nimmt man zwei Matrizen n^{ter} Ordnung a und b, so sind die n^2 Producte von der Form $a^i b^k$ im allgemeinen asyzygetisch. Sind sie aber syzygetisch, so sagt man, a und b seien in Involution. Diese Definition rührt von Hrn. Sylvester her; derselbe hat den Satz ausgesprochen, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Matrizen in Involution stehen, sei

die, dass ein latenter Punkt (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 108) der einen in dem $(n-1)$-Punkte liegen müsse, welcher durch $n-1$ der latenten Punkte der anderen bestimmt ist. Zweck der gegenwärtigen Notiz ist es, diesen Satz direct zu beweisen.

Glr. (Lp.)

W. J. C. Sharp, D. Edwardes. Solution of question 8940. Ed. Times XLIX. 133-135.

Es sei

$S = ax^2+by^2+cz^2+2lyz+2mzx+2nxy+2pxw+2qyw+2rzw,$

$P_{1,2} = ax_1x_2+by_1y_2+cz_1z_2+l(y_1z_2+z_1y_2)+\cdots,$

so ist

$$S_1S_2S_3+2P_{1,2}P_{2,3}P_{3,1}-S_1P_{2,3}^2-S_2P_{3,1}^2-S_3P_{1,2}^2 =$$
$$A\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}^2+\cdots+2L\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\cdots,$$

wo $A,\ldots, L,\ldots$ die ersten Unterdeterminanten der Discriminante von S sind.

Lp.

W. J. C. Sharp, D. Edwardes. Solution of question 8970. Ed. Times XLIX. 136-138.

Man bezeichne mit X, Y, Z, W, U die aus der Matrize

$$|x_\varkappa\, y_\varkappa\, z_\varkappa\, w_\varkappa\, u_\varkappa| \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

hervorgehenden Determinanten, mit $V_\varkappa (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$ die Werte der quinären quadratischen Form V, wenn statt (x,y,z,w,u) in V gesetzt wird $(x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa, w_\varkappa, u_\varkappa)$; ferner werde $S_{1,2}$ für

$$\tfrac{1}{2}\left(x_1\frac{d}{dx_2}+y_1\frac{d}{dy_2}+\cdots\right)V_2$$

gesetzt, so ist

$$\begin{vmatrix} V_1 & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4} \\ S_{1,2} & V_2 & S_{2,3} & S_{2,4} \\ S_{1,3} & S_{2,3} & V_3 & S_{3,4} \\ S_{1,4} & S_{2,4} & S_{3,4} & V_4 \end{vmatrix} = AX^2+BY^2+\cdots,$$

wenn $A, B, \ldots$ die ersten Unterdeterminanten von V sind.

Lp.

S. DICKSTEIN. Ueber die Eigenschaften und einige Anwendungen der Wronskiane. Prace mat.-fiz. I. 5-25. (Polnisch.)

Eine Wronskiane heisst nach Muir (A Treatise on the Theory of Determinants, 1882. S. 224) die von Wronski in die Wissenschaft eingeführte und später mehrfach von anderen untersuchte Differentialdeterminante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$\left(y_1, y_2, \dots, y_n\right.$ sind Functionen von x und $\left. y_k^{(i)} = \frac{d^i y_k}{dx^i}\right)$.

Die Schrift enthält eine ausführliche Darstellung der wichtigsten Sätze über diese Determinante und ihre Anwendungen auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Dn.

T.-J. STIELTJES. Sur une généralisation de la formule des accroissements finis. S. M. F. Bull. XVI. 100-113.

Bezeichnet man mit f, g, h, k vier reelle Functionen, welche selbst ebenso wie ihre ersten, zweiten und dritten Ableitungen endlich und stetig sind, und benennt man den Quotienten

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = A,$$

so ergiebt sich für diesen Quotienten der Wert

$$A = \frac{1}{1!\,2!\,3!} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} x < \xi < y \\ x < \eta < z \\ x < \zeta < t. \end{matrix}$$

Hieraus werden weitere Schlüsse für den Fall gezogen, dass x, y, z, t sich derselben Grenze a nähern. No.

E. C. Valentiner. Om Betingelserne for, at der mellem tre hele rationale Polynomier, der ene homogene af samme Grad i tre Variable findes en identisk Ligning. Zeuthen Tidss. VI. (5) 49-52.

Sind f_1, f_2, f_3 drei homogene Polynome n^{ten} Grades der Variabeln $x_1 : x_2 : x_3$, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen ihnen eine identische Gleichung vorhanden ist, in dem identischen Verschwinden ihrer Jacobi'schen Function. V.

S. Tebay, D. Edwardes, Prince de Polignac. Solution of question 9325. Ed. Times XLIX. 79.

Sind A, B, C die Flächenwinkel an der Basis eines Tetraeders, X, Y, Z ihre bezüglichen Gegenwinkel, ferner

$$T_1 = (1 - \cos^2 B - \cos^2 C - \cos^2 X - 2\cos B \cos C \cos X)^{\frac{1}{2}},$$

entsprechend T_2 und T_3, so ist

$$T_2 T_3 \cos X + T_3 T_1 \cos Y + T_1 T_2 \cos Z = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - \cos B \cos C \cos X - \cos C \cos A \cos Y - \cos A \cos B \cos Z + \cos X \cos Y \cos Z.$$

Lp.

J. Neuberg. Solution of question 9156. Ed. Times XLVIII. 91-92.

Sind a, b, c, d die Höhen eines Tetraeders $ABCD$; α, β, γ, δ die Winkel seiner Seitenflächen mit einer Ebene E; p der Abstand des Centrums der Umkugel zu $ABCD$ von E, so befriedigt jeder Punkt P von E die Relation

$$\frac{\cos\alpha}{a}(AP)^2 + \frac{\cos\beta}{b}(BP)^2 + \frac{\cos\gamma}{c}(CP)^2 + \frac{\cos\delta}{d}(DP)^2 = 2p.$$

Analytischer Beweis mit Hülfe von Determinanten. Ist P ein Punkt ausserhalb E, so ist der Abstand des Punktes P von E gleich der halben Differenz der beiden Seiten der obigen Gleichung.

W. J. C. Sharp, J. Wolstenholme. Solution of question 2109. Ed. Times XLVIII. 177-178.

Hr. Sharp beweist unter Bezugnahme auf seine Arbeit „On the properties of simplicissima" (F. d. M. XIX. 1887. 837) den folgenden, früher einmal von Hrn. Wolstenholme zum Beweise gegebenen Satz mit Hülfe von Determinantensätzen: Sind A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 fünf feste Punkte des Raumes, P ein beliebiger Punkt; $V_1, V_2, \dots$ die Volumina der Tetraeder $A_2 A_3 A_4 A_5$ u. s. w. mit solchen Vorzeichen, dass $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 0$, so ist

$$(1) \quad V_1 . PA_1^2 + V_2 . PA_2^2 + V_3 . PA_3^2 + V_4 . PA_4^2 + V_5 . PA_5^2$$

unabhängig von der Lage von P. Sind C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 die Mittelpunkte der Umkugeln jener Tetraeder, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 ihre Radien, so ist

$$\Sigma \frac{1}{C_\varkappa A_\varkappa^2 - r_\varkappa^2} = 0, \; V_1 (C_1 A_1^2 - r_1^2) = V_2 (C_2 A_2^2 - r_2^2) = \dots$$
$$= \Sigma V_\varkappa . PA_\varkappa^2. \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4, 5).$$

In Bezug auf den Satz selbst ist auf die Abhandlung des Herrn Frobenius zu verweisen „Anwendung der Determinanten auf die Geometrie des Masses" (J. für Math. LXXIX. 223; F. d. M. VI. 1874. 381), wo Möbius (Bd. XXVI. desselben J.) als Entdecker angegeben ist. Lp.

A. Cayley. Note on the relation between the distances of five points in space. Mess. (2) XVIII. 100-102.

In Lagrange's Schrift „Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires" (Berlin, Mémoires, 1773; Oeuvres III. 677) kommt der folgende Ausdruck für die Beziehung zwischen den gegenseitigen Abständen von fünf Punkten im Raume vor:

$$4\Delta^2 f = \alpha(a+f-g)^2 + \alpha'(a'+f-g')^2 + \alpha''(a''+f-g'')^2$$
$$+ 2\beta(a'+f-g')(a''+f-g'') + 2\beta'(a+f-g)(a''+f-g'')$$
$$+ 2\beta''(a+f-g)(a'+f-g').$$

Diese Formel identificirt der Verf. mit seiner, im Jahre 1841 in der Form einer Determinante gegebenen Relation.

Glr. (Lp.)

A. E. Rahnsen. Sur quelques propriétés des déterminants, appliquées à une question de géométrie à n dimensions. Delft. Ann. de l'Éc. Polyt. IV. 104-139.

An erster Stelle werden einige allgemeine Eigenschaften der Determinanten und Matrizen abgeleitet. Nachher werden sie angewendet auf die folgende in die Geometrie von n Dimensionen gehörige Aufgabe: Den geometrischen Ort der homologen Punkte in zwei gleichen oder symmetrischen Figuren von n Dimensionen zu bestimmen. Alsdann werden die Beziehungen abgeleitet, welche die Coordinaten eines beliebigen Punktes der einen Figur in denjenigen des homologen Punktes der anderen ausdrücken. Zwei Figuren sind gleich, wenn der Abstand zweier beliebigen Punkte der einen gleich dem der homologen Punkte der anderen sind. Je nachdem die Hauptdeterminante gleich ist $+1$ oder -1, sind die Figuren gleich oder symmetrisch. Zwei gleiche Figuren von n Dimensionen haben bei endlichem Abstande einen Raum von $n-2k$ Dimensionen gemein oder bei unendlichem Abstande einen solchen von $n-2k-1$ Dimensionen. Zwei symmetrische Figuren von n Dimensionen haben bei endlichem Abstande einen Raum gemein von $n-2k-1$ Dimensionen oder bei unendlichem Abstande einen solchen von $n-2k-2$ Dimensionen. Die verschiedenen Fälle, die hierbei eintreten können, werden näher betrachtet. Schliesslich werden die erhaltenen Resultate an Figuren von 2 und 3 Dimensionen geprüft, welche demnach in der Ebene oder im Raum liegen. G.

A. Boucher. Du déterminant quadrilatère. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°.

D. Hilbert. Ueber die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe. J. für Math CIII. 337-345.

Wenn die hypergeometrische Reihe überhaupt im Endlichen abbricht, so wird sie zu einer binären Form $f = a_x^n$ mit den

Coefficienten

$$a_i = \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+i-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+i-1)}.$$

Führt man homogene Variable x_1, x_2 ein, so ergiebt sich zuvörderst aus der Differentialgleichung der Reihe, dass die Form f überhaupt nur die Linearfactoren x_1, x_2, x_1+x_2 mehrfach aufweisen kann. Durch Anwendung specieller linearer Transformationen von f, welche bekannten Umformungen der Reihe entsprechen, resultirt für die Discriminante D von f der Ausdruck:

$$D = \frac{1.2^2 \ldots (n-1)^{n-1}.(\beta+n-2)(\beta+n-3)^2 \ldots \beta^{n-1}(\beta-\gamma-n+2)(\beta-\gamma-n+3)^2 \ldots (\beta-\gamma)^{n-1}}{(\gamma+n-1)^{n-1}(\gamma+n-2)^n \ldots \gamma^{2n-2}},$$

der bereits früher von Hrn. Stieltjes auf anderem Wege gewonnen worden ist.

Der Verfasser macht eine Anwendung auf die Lösung der Aufgabe, zu entscheiden, wie viele reelle Wurzeln die Gleichung $f=0$ für beliebig gegebene reelle Werte der Parameter β und γ besitzt. My.

Fr. Meyer. Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen. Gött. N. 74-77.

Die Discriminanten und Resultanten der Singularitätengleichungen müssen in eine Anzahl rationaler Factoren zerfällbar sein, deren Verschwinden ausdrückt, dass von den vorher getrennt auftretenden Singularitäten irgend welche zusammenrücken. Hieran knüpft der Verfasser die Frage: Sind die Punktcoordinaten einer rationalen, ebenen Curve R_n durch ein System von drei binären Formen n^{ter} Ordnung gegeben

$$x_1 : x_2 : x_3 = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : f_3(\lambda),$$

so sollen die Discriminanten und Resultanten für Wendepunkte, Spitzen, Doppelpunkte, Doppeltangenten in Factoren zerlegt werden, welche in den dreireihigen Coefficientendeterminanten δ der $f_i(\lambda)$ rational sind, aber in gleicher Weise nicht weiter zerlegt werden können. Eine Tabelle enthält, ohne Beweise, die Resultate der Untersuchung. No.

R. LACHLAN. On certain operators in connection with symmetric functions. Lond. M. S. Proc. XIX. 294-299.

Die Note ist eine Ergänzung einer früheren Arbeit des Verfassers (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 152). Mit Hülfe der dort angewandten Operationssymbole werden gewisse symmetrische Functionen, z. B. $\Sigma a^r b^r \dots$, $\Sigma a^2 b^2 \dot{g} \dots h$, durch die elementarsymmetrischen Functionen der Grössen $a, b, \dots, h$ ausgedrückt.

Ht.

P. A. MACMAHON. Symmetric functions and the theory of distributions. Lond. M. S. Proc. XIX. 220-256.

P. A. MACMAHON. Memoir on a new theory of symmetric functions. American J. XI. 1-36.

In diesen beiden Arbeiten geht der Verfasser aus von dem folgenden „Reciprocitätstheorem": Setzt man

$$\begin{aligned}
X_1 &= (1)x_1,\\
X_2 &= (2)x_2+(1^2)x_1^2,\\
X_3 &= (3)x_3+(21)x_2x_1+(1^3)x_1^3,\\
X_4 &= (4)x_4+(31)x_3x_1+(2^2)x_2^2+(21^2)x_2x_1^2+(1^4)x_1^4,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

so ist der Coefficient von

$$(\lambda_1^{l_1}\lambda_2^{l_2}\lambda_3^{l_3}\dots)x_{s_1}^{\sigma_1}x_{s_2}^{\sigma_2}x_{s_3}^{\sigma_3}$$

in der Entwickelung des Productes $X_{p_1}^{\pi_1}X_{p_2}^{\pi_2}X_{p_3}^{\pi_3}\dots$ gleich dem Coefficienten von

$$(p_1^{\pi_1}p_2^{\pi_2}p_3^{\pi_3}\dots)\,x_{s_1}^{\sigma_1}x_{s_2}^{\sigma_2}x_{s_3}^{\sigma_3}$$

in der Entwickelung des Productes $X_{\lambda_1}^{l_1}X_{\lambda_2}^{l_2}X_{\lambda_3}^{l_3}\dots$ Dabei bedeutet das Symbol $(pqr\dots)$ die symmetrische Function $\Sigma a^p b^q c^r \dots$ der Grössen $a, b, c, \dots$ und beispielsweise für $(pppqqr\dots)$ ist $(p^3q^2r\dots)$ gesetzt. Aus der Zahl der weiteren Theoreme sei noch der folgende in jenen beiden Arbeiten behandelte Satz erwähnt. Die symmetrische Function $(\lambda\mu\nu\dots)$ ist ausdrückbar mit Hülfe der „Separationen" von $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\dots\mu_1\mu_2\mu_3\dots\nu_1\nu_2\nu_3\dots)$, wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots; \nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ ganze Zahlen sind, deren Summe beziehungsweise $\lambda; \mu; \nu\dots$ ist. Dabei ver-

steht man beispielsweise unter den „Separationen“ von (p, q, r, s, t) Producte von der Gestalt $(pq)(rs)(t)$, $(pqr)(st)$. Dieses Theorem führt im besonderen auf den bekannten Satz, dass eine jede symmetrische Function sich ganz und rational durch die elementarsymmetrischen Functionen darstellen lässt. An die beiden erwähnten Sätze knüpft der Verfasser eine weitläufige Untersuchung über die Darstellbarkeit symmetrischer Functionen und ihre zweckmässige tabellarische Anordnung. Ht.

P. A. MacMahon. The eliminant of two binary quantics. Quart. J. XXIII. 139-143.

Der Verfasser drückt die Resultante von zwei binären Formen mit Hülfe der Partitionssymbole $(pqr\ldots)$ aus, betreffs deren man das vorige Referat vergleiche. Beispielsweise ist die Resultante der kubischen Form $a_3x^3-a_2x^2+a_1x-1$ und der quadratischen Form $x^2-A_1x+A_2$ gleich dem Ausdrucke

$$1-(1)A_1+(2)A_2+(1^2)A_1^2-(21)A_2A_1-(1^3)A_1^3 \\ +(2^2)A_2^2+(21^2)A_2A_1^2-(2^21)A_2^2A_1+(2^3)A_2^3,$$

wo die Klammersymbole auf die symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichung

$$x^3-a_1x^2+a_2x-a_3=0$$

zu beziehen sind. Ht.

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1.

Niedere Arithmetik.

Th. Spieker. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Uebungsaufgaben. 3. verbesserte Aufl. Aug. Stein. Potsdam. 398 S.

Ref. hat die vorzüglichen Spieker'schen Lehrbücher seit längeren Jahren im Unterrichte erprobt und sich namentlich über die stetigen Verbesserungen gefreut, welche dieselben mit jeder neuen Auflage bringen. Auch in der vorliegenden Arithmetik sind wesentliche Fortschritte gemacht. Die kubischen Gleichungen sind in § 308 bis 312 durch die allgemein für Gleichungen höherer Grade gültigen Sätze eingeleitet und in § 324 bis 339 durch die Behandlung der numerischen Gleichungen ergänzt worden. Abschnitt 23: „Entwickelung der Functionen in unendliche Reihen" ist ganz neu hinzugekommen. Ueberall sind die Grenzen und Anforderungen des Unterrichts gewahrt, so z. B. werden die irrationalen Wurzeln der numerischen Gleichungen nur mit der regula falsi und den beiden Näherungsmethoden von Newton und Lagrange bestimmt, die unendlichen Reihen durchweg nach der Methode der unbestimmten Coefficienten entwickelt und ihre Convergenz mit Hülfe weniger vorangeschickter Sätze

untersucht. Durch Ausmerzung von Druckfehlern und Versehen der früheren Auflagen hat das Buch gleichfalls gewonnen.

Lg.

C. E. Enholtz. Reine Arithmetik. I_3. Aarau. Sauerländer.

Mit dieser Lieferung (IX. Elementare Zahlenlehre (Fortsetzung). X. Gemeine Brüche. XI. Beziehungen zwischen systematischen und gemeinen Brüchen.) schliesst der erste Band dieses Werkes (s. F. d. M. XIX. 158): Es ist zunächst für den mathematischen Unterricht am aargauischen Lehrerseminar bestimmt, es soll ausserdem den im Amte stehenden Lehrern an Primär- und Secundärschulen ein Ergänzungsbuch sein und auf mancherlei methodische Fragen Antwort geben. Diesem Zwecke entspricht die grosse Ausführlichkeit der Darstellung, sowie die besondere Berücksichtigung des Rechnens mit bestimmten Zahlen. Wz.

K. Lembke, Seminarlehrer. Allgemeine Arithmetik und Algebra in ihrer Beziehung zu einander und zu den höheren bürgerlichen Rechnungsarten. Hinstorff. Wismar. 170 S.

Es werden Seite 1—70 die Gleichungen 1ten und 2ten Grades mit einer und mehreren Unbekannten, 70-94 die Logarithmen, 94-170 Zinseszins- und Rentenrechnungen behandelt. Am Schlusse sind auf 19 Seiten Tabellen zur Berechnung der Zinseszinsen angefügt. Die Methode des Verfassers ist folgende: Er wählt Musterbeispiele aus Meier-Hirsch, rechnet dieselben bis auf das kleinste Detail vor, unter steter Angabe der in Verwendung kommenden Sätze aus seiner eigenen allgemeinen Arithmetik und schreibt dann die Nummern der Aufgaben aus Meier-Hirsch und Pleibel's Elementarmathematik auf, welche ebenso gerechnet werden. Nicht überall hat der Herr Verfasser erreicht, was er sich in der Vorrede vorgenommen. Er will „selbständiges, streng logisches Denken und Arbeiten erzielen“, bei der Lösung der Gleichungen aber geht sein Bestreben dahin, „die Begründung durch arithmetische Lehrsätze mehr und mehr zurückzudrängen

und das Verfahren zu einem rein mechanischen zu machen" (cf. S. 5 und 8). — Ausserdem ist das Buch nicht frei von Druckfehlern, die namentlich dem Anfänger das Studium desselben erschweren, so finden sich z. B. in jedem der Beispiele 10 und 11 S. 46 und 47 je drei solcher Fehler. Lg.

F. Fischer. Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauche an höheren Schulen. I. Arithmetik und Algebra. Leipzig. Fr. W. Grunow. 190 S. gr. 8°. (1887.)

Der Inhalt ist in vier Abschnitte von allerdings sehr ungleichem Umfange gegliedert. Der Abschnitt I (S. 2-121) behandelt die sogenannten sieben Rechnungsarten, der Abschnitt II (bis S. 159) die algebraischen Gleichungen der ersten vier Grade, Abschnitt III (S. 160-186) die Reihen mit Einschluss derjenigen für die Logarithmen und Kreisfunctionen, Abschnitt IV (S. 187 bis 189) die Euler'sche Methode für die Lösung diophantischer Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten. Die Ausstattung ist sehr gut. Lp.

G. Taschetti. Trattato di aritmetica razionale per la IV e V classe del ginnasio. Palermo. Remo Sandron.

D. A. Coen. L'Aritmetica Razionale richiesta dai programmi ministeriali per il Ginnasio Superiore. Vicenza. Tip. G. Burato.

Lacroix. Éléments d'Algèbre. 25e édit., revue par Prouhet. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°.

Lacroix. Complément des Éléments d'Algèbre. 7e édit. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°.

A. Nunez de Couto. Tratado de arithmetica theorico-practica. Madrid. (1885-1887). 435 S.

H. SERVUS. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 3 Hefte. Leipzig. Teubner. 47, 51 u. 94 S.

Verfasser hält es nicht für angebracht, einem Schüler von vornherein eine Sammlung von Aufgaben aus der gesamten Arithmetik in die Hände zu geben, da dieselbe aus jedem Gebiete nur eine beschränkte Anzahl von Aufgaben bringen kann, falls sie nicht zu umfangreich und zu teuer werden soll. Er lässt daher drei Hefte von geringerem Umfange und Preise erscheinen, von denen Heft I die vier Species, Heft II Quadrirung und Kubirung von Summen, Zerlegung in Factoren, Heben der Brüche, Proportionen u. s. w., Quadrat- und Kubikwurzeln, Heft III Potenzirung, Radizirung und Logarithmirung behandelt.

Lg.

M. FETSCHER. Arithmetisches. Auflösungen zu den arithmetischen Aufgaben aus den Reallehrerprüfungen in Württemberg. Stuttgart. J. B. Metzler. 84 S.

Das Buch löst die Prüfungsaufgaben aus den Jahren 1860 bis 1886, soweit sie im Correspondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs veröffentlicht sind, sämtlich ohne Beihülfe der Algebra durch einfache Schlussfolgerungen. Wie dasselbe mit der Behandlung von Aufgaben, welche nur für die alten Masse, Münzen und Gewichte Wert hatten, „einem wirklichen Bedürfnisse entgegenkommt“, ist nicht recht einzusehen. Die Lösungen sind oft umständlich; so wird die Regel für die Teilbarkeit der Zahlen durch 7 auf $1\frac{1}{4}$ Seiten hergeleitet, anstatt sie neben der für 11 und 13 mit der Bemerkung zu erledigen, dass 1001 durch diese Zahlen teilbar ist. Zur Vergleichung ist häufig auf Bücher à 4, 3 und 2 Bändchen hingewiesen, welche der Verfasser im Verein mit Prof. Stockmayer für 12-15jährige Schüler, jedes mit einem „Schlüssel“ versehen, herausgegeben hat. Ein Anhang giebt noch 20 Uebungsaufgaben. Lg.

A. MOROFF. Regeln und Erläuterungen zum Rechnen, nebst Skizze eines Lehrgangs und Masstafel. Zum Gebrauch an Gymnasien und anderen Mittelschulen. Bamberg. Buchner. R. M.

F. AMODEO. Correlazione fra i teoremi delle operazioni sui numeri interi. Besso Per. mat. III. 69-75, 103-108.

Es giebt, nach einer nichts weniger als neuen Bemerkung des Verfassers, eine gewisse Correlation zwischen den Sätzen über die Addition und denjenigen über die Multiplication, so dass die letzteren sich aus den ersteren nach Ersetzung des Wortes Summe, Summand, Coefficient, ... durch Product, Factor, Exponent, ... ergeben. Um diesen Zusammenhang zu veranschaulichen, richtet der Verfasser die betreffenden Sätze auf zwei Columnen derart ein, dass die Sätze über Addition links und die entsprechenden über Multiplication daneben rechts sich befinden. Vi.

M. GREMIGNI. Le proprietà della somma e della differenza estese ai polinomi algebrici. Besso Per. mat. III. 161-167.

Beweis der Commutativität und Associativität einer Summe von positiven und negativen Zahlen. Vi.

JOS. KAŠPR. Ueber die Bestimmung der dritten Potenz und Wurzel aus dekadischen Zahlen. Casop. XVII. 28. (Böhmisch.)

Enthält eine diesbezügliche praktische Verwendung der Identität

$$(a+b)^3 = a^3 + 3(a+b)ab + b^3.$$ Std.

G. GIULIANI. Sopra un teorema della divisione algebrica. Besso Per. mat. III. 39-40.

Beweis durch vollständige Induction für die Formel:

$$ax^n + bx^{n-1} + \cdots + dx^2 + ex + f$$
$$= \{ax^{n-1} + (ay + b)x^{n-2} + \cdots + (ay^{n-1} + by^{n-2} + \cdots + dy + e)\}(x - y)$$
$$+ (ay^n + by^{n-1} + \cdots + dy^2 + ey + f).$$

Vi.

E. Sadun, Condizioni di divisibilità d'un polinomio per un binomio della forma $x^r - a^r$. Besso Per. mat. III. 129-136.

Der Rest der Teilung von $f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^{n-i}$ durch $x^r - a^r$ ist

$$\sum_{i=1}^{r} T_i x^{r-i},$$

wo:

$$T_i = \sum_{h=0}^{k} c_{n-(h+1)r+i} a^{hr};$$

hier bezeichnet k die grösste Zahl, für welche $0 \gtreqless n - kr < r$, und jeder Coefficient c, dessen Index negativ ausfällt, soll als der Null gleich betrachtet werden. Die Bedingungen für die Teilbarkeit von $f(x)$ durch $x^r - a^r$ sind demgemäss:

$$T_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Es ist ferner zu beachten, dass, wenn $f(x)$ durch $x^r - a^r$ teilbar ist, a^r in $c_{n-r+1}, c_{n-r+2}, \ldots, c_n$ aufgeht und die Form $m^r \pm d$ hat, wo m irgend eine ganze Zahl und d ein positiver Teiler von $f(m)$ ist.

Vi.

F. Giudice. Sull' estrazione di radice approssimata dai numeri aritmetici. Besso Per. mat. III. 33-36.

Schreibt man a^n, b^n statt a, b, so lauten die vom Verfasser aufgestellten Formeln so:

$$a + (b-a)\frac{x-a^n}{b^n-a^n} < \sqrt[n]{x} < a + (b-a)\frac{x-a^n}{b^n-a^n}\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}},$$

$$b - (b-a)\frac{b^n-x}{b^n-a^n} < \sqrt[n]{x} < b - (b-a)\frac{b^n-x}{b^n-a^n}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}},$$

wo $0 < a^n < x < b^n$. Die untere Grenze ist in beiden Formeln dieselbe und ist $> a$; von den oberen Grenzen ist die erste $\lesseqgtr$

als die zweite, je nachdem $\frac{x-a^n}{b^n-x} \lesseqgtr \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}$. Jedenfalls ist die zweite obere Grenze $< b$. Ist also bekannt, dass die n^{te} Wurzel einer Grösse zwischen a und b liegt, so kann man dieselbe durch wiederholte Anwendung der angegebenen Formeln in immer engere Grenzen einschliessen. Vi.

SYDNEY LUPTON. The art of computation for the purposes of science. Nature XXXVII. 237-239, 262-263.

W. RAMSAY, SYDNEY YOUNG, E. ERSKINE SCOTT, G. KING. The art of computation for the purposes of science. Nature XXXVII. 294-295, 319-320.

S. MIECZNIKOWSKI. Näherungsrechnung. Warschau. 8°. 40 S. (Polnisch.) Dn.

J. DIEKMANN. Zur Auflösung der dreigliedrigen irrationalen Gleichungen mit linearen Radicanden. Hoffmann Z. XIX. 481-488.

In Hoffmann Z. XVII ist über die Gleichung

$$\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-4x}=4\sqrt{x}$$

ein Streit entbrannt, in welchem Verfasser hier Stellung nimmt. Er kommt zu dem Resultat:

1) In den irrationalen Gleichungen sind die Wurzelausdrücke absolut zu nehmen und als zunächstliegende Unbekannte zu betrachten, deren Werte sich selbständig aus den Coefficienten der Gleichung berechnen lassen.

2) Aus den Werten der Wurzelausdrücke ergeben sich die zugehörigen Werte von x. Lg.

J. VAN HENGEL. Beweis des Satzes, dass unter allen reellen positiven ganzen Zahlen nur das Zahlenpaar 4 und 2 für a und b der Gleichung $a^b = b^a$ genügt. Pr. Gymn. Emmerich.

Bedeuten r, n positive ganze Zahlen $\geqq 3$, so gelten die Ungleichheiten:

$$r^n > \left(1+\frac{n}{r}\right)^r \text{ und } 2^n > \left(1+\frac{n}{2}\right)^2.$$

In Folge der ersten können a, b nicht beide $\geqq 3$ sein, in Folge der zweiten kann auch die grössere von beiden nicht > 4 sein.

R. M.

G. Bernardi. Tavole dei quadrati e dei cubi dei numeri interi da 1 a 1000 ossia delle radici quadrate a meno di una unità degl' interi da 1 ad 1000000 e delle radici cubiche a meno di una unità degl' interi da 1 ad 1000000000 con un teorema sopra la radice quadrata con dimostrazione nuova e con un teorema nuovo sopra la radice cubica ad uso dei corsi di Matematica. Parma. Ferrari e Pellegrini. XXXII u. 25 S.

Das zuletzt erwähnte Theorem lautet so:

Es sei a eine ganze Zahl, k die grösste ganze Zahl für welche $k^3 \overline{\overline{<}}\, a$, und bestehe k aus t Ziffern, wo $t \geqq 2n+1$. Bedeutet dann c die aus den von links an ersten $t-n$ Ziffern von k gebildete Zahl, q den Quotienten, r den Rest der Teilung $a-c^3.10^{3n} : 3c^2.10^{2n}$, so ist $k = c.10^n + q$ oder $k = c.10^n + q - 1$, je nachdem $r \overline{\overline{>}}$ oder $< 3q^2c.10^n + q^3$. Nur wenn

$$(10^{2n}+10^n)^3 - 10^{3n} \leqq a \leqq (10^{2n}+10^n)^3 - 1,$$

hat man $k = c.10^n + q - 2$.

Ein analoger Satz über Quadratwurzeln, welcher im vorliegenden Buche bewiesen wird, wurde schon, nach Angabe des Verfassers, von Bertrand (Traité d'arithmétique) aufgestellt.

Vi.

H. Wolff. Sätze und Regeln der Arithmetik und Algebra nebst Beispielen und gelösten Aufgaben. Zum Gebrauche an Baugewerkenschulen etc. Leipzig. Teubner. IV u. 102 S. 8°.

E. Bardey. Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien. 5te Aufl. Leipzig. Teubner. X u. 269 S. 8°.

E. Bardey. Resultate nebst Auflösungen und Commentar zu den arithmetischen Aufgaben u. s. w. Leipzig. Teubner. 125 S. 8°.

E. Bardey. Methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. 14te Aufl. Leipzig. Teubner. XIV u. 330 S. 8°.

E. Bardey. Methodisch geordnete Aufgabensammlung. Abschnitt XXII (S. 121-155) aus der 14. Aufl., besonders abgedruckt für die Besitzer der früheren Auflagen. Leipzig. Teubner.

Capitel 2.

Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

J. Sochotzky. Höhere Algebra. Bd. II. Die Anfangsgründe der Zahlentheorie. St. Petersburg. (Russisch.)

Der enge Zusammenhang, der zwischen den algebraischen und den zahlentheoretischen Fragen besteht, hat den Herrn Verfasser bewogen, den zweiten Teil seiner „Höheren Algebra“ der Zahlentheorie zu widmen. „Die moderne Zahlentheorie“, wie der Verfasser in seiner Vorrede bemerkt, „beruht auf drei Principien: 1° dem Princip des grössten gemeinschaftlichen Teilers (Euklides), 2° den Kettenbrüchen (Huygens) und 3° dem Princip Dirichlet's.“

Das vorliegende Buch ist fast ohne Ausnahme dem Euklid'schen Princip in seiner Anwendung auf ganze Zahlen und ganze Functionen gewidmet. Daher sind mit besonderer Sorgfalt diejenigen Teile der Zahlentheorie auseinandergesetzt, die mit diesem Princip in nächstem Zusammenhange stehen. Das Werk ist in zehn Kapitel geteilt.

Das erste Capitel trägt den Titel: „Das Princip des grössten gemeinschaftlichen Teilers. Erste Anwendungen.“ Nach der Entwickelung des Princips des grössten gemeinschaftlichen Teilers handelt es sich um seine Anwendung auf die Zerlegung der Zahlen in Primfactoren, auf die Divisoren d und die Function $\varphi(N)$. Ausser dem gewöhnlichen Inhalte werden auch Tschebyscheff'sche Formeln für die Anzahl der Primzahlen abgeleitet und die allgemeine Aufgabe gelöst, aus der Gleichung:

$$\sum_d \psi(d) = f(N),$$

wo die erste Summe über alle Divisoren der Zahl N erstreckt ist, die Function ψ zu bestimmen, wenn die Function f bekannt ist.

Das zweite Capitel beginnt mit der allgemeinen Auflösung einer linearen homogenen Gleichung mit n Unbekannten in ganzen Zahlen. Es werden dann specielle Methoden gegeben, die folgenden Gleichungen in ganzen Zahlen aufzulösen:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ x & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & z_1 & z_2 & \dots & z_{n-1} \end{vmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ b & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ x & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & z_1 & z_2 & \dots & z_{n-1} \end{vmatrix} = h,$$

welche in der Theorie der Composition der quadratischen Formen (falls die Determinante 9ter Ordnung ist) eine grosse Wichtigkeit haben.

Das dritte Capitel handelt von den allgemeinen Eigenschaften der Congruenzen und von der Klassification der Zahlen in Bezug auf einen gegebenen Modul; es werden verschiedene Beweise der Theoreme von Fermat, Euler und Wilson gegeben.

Dann folgt die Auflösung der Congruenz ersten Grades mit besonderer Berücksichtigung der simultanen Congruenzen ersten Grades.

Das vierte Capitel behandelt die Congruenzen zweiten Grades für primen Modul, die Eigenschaften der Symbole von Legendre und Jacobi und die Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv q$ (mod. p) in einigen einfachen Fällen.

Das fünfte Capitel trägt den Titel: „Ueber die quadratischen Reste und Nichtreste. Ueber die Auflösung der Gleichung $\left(\frac{D}{x}\right) = \pm 1$ und über die Divisoren der Form $t^2 - Du^2$."

Das sechste behandelt die Congruenzen zweiten Grades bei zusammengesetztem Modul.

Das siebente Capitel beginnt mit dem Theoreme von Lagrange über die Anzahl der Lösungen der Congruenzen höherer Grade. Dann wird mit besonderer Sorgfalt die Anwendung des Euklid'schen Princips auf die Zerlegung der Function in Factoren in Bezug auf einen Modul behandelt und der Begriff der irreductiblen Function erklärt. Am Ende des Capitels werden die Anwendungen der Theorie auf die Congruenzen höherer Grade im allgemeinen und die binomischen insbesondere auseinandergesetzt.

Das achte Capitel enthält die Theorie der primitiven Wurzeln und die Theorie der Indices mit Anwendungen für den Fall des primen und zusammengesetzten Moduls.

Das neunte Capitel ist der Theorie der Functionalcongruenzen (besonders binomischer) gewidmet. Das zehnte beschäftigt sich mit den absolut irreductiblen Functionen; hier wird die Frage von der Auffindung der Divisoren an zwei eingehend und sorgfältig ausgearbeiteten Beispielen erläutert. In den beiden letzten Capiteln ist die Frage von der Zerlegung der Function $x^m - 1$ in irreductible Factoren, die eine grosse Wichtigkeit in der Theorie der Kreisteilung hat, mit besonderer Sorgfalt erörtert. Das sehr elegant geschriebene Buch liefert also vollkommen das für die Behandlung der höheren algebraischen Fragen nötige zahlentheoretische Material. Wi.

J. J. Sylvester. Note on a proposed addition to the vocabulary of ordinary arithmetic. Nature XXXVII. 152-153.

Da die von Hrn. S. erdachten Benennungen von den Engländern vielleicht weiter gebraucht werden, so mögen sie hier Platz finden.

Die Anzahl verschiedener Primzahlen, welche eine gegebene Zahl teilen, heisst ihre „Vielfaltigkeit oder Multiplicität“ (manifoldness or multiplicity). Eine Zahl, deren Vielfaltigkeit n ist, heisst eine „n-faltige“ Zahl. Sie kann auch „n-äre“ Zahl genannt werden; z. B. für $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ eine „unitäre“ oder primäre, eine „binäre“, „ternäre“, „quaternäre“, ... Zahl. Ihre Primdivisoren heissen die „Elemente“; die höchsten Potenzen dieser eine Zahl teilenden Elemente ihre „Componenten“; die Grade dieser Potenzen ihre „Indices“, sodass die Indices einer Zahl aus der Gesamtheit der Indices ihrer einzelnen Componenten besteht. Demnach ist eine Primzahl eine einfaltige Zahl, deren Index 1 ist. Der Nutzen dieser Benennungen wird an der Fassung mehrerer zahlentheoretischer Sätze, besonders über vollkommene Zahlen erläutert.

In einer Anmerkung sagt der Verfasser selbst, er erhebe den Anspruch, der mathematische Adam zu heissen, weil er den Geschöpfen des mathematischen Sinnes mehr Namen gegeben habe, als alle Mathematiker des Zeitalters zusammen.

Lp.

J. J. Sylvester. On certain inequalities relating to prime numbers. Nature XXXVIII. 259-262.

Der Verfasser erläutert zuerst eine Methode, durch welche man beweisen kann, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist; in ähnlicher Weise zeigt er dann, dass die Anzahl der Primzahlen von der Form $4n+3$ und $6n+5$ unendlich ist (ohne dabei der Dirichlet'schen Untersuchungen Erwähnung zu thun). Eine der erwähnten Ungleichheiten ist

$$S_1 - \tfrac{1}{2}S_2 + \tfrac{1}{3}S_3 - \tfrac{1}{4}S_4 + \cdots > \log\log N,$$

worin S_i die Summe der reciproken i^{ten} Potenzen aller Primzahlen

bedeutet, die nicht grösser als die Zahl N sind. Ebenso ist

$$\Sigma_1 - \tfrac{1}{2}\Sigma_2 + \tfrac{1}{3}\Sigma_3 - \tfrac{1}{4}\Sigma_4 + \cdots > \tfrac{1}{2}\log\log N + \tfrac{1}{2}\log M_N - \tfrac{1}{2}\log 2,$$

worin Σ_i die Summe der reciproken i^{ten} Potenzen aller Primzahlen q_j von der Form $4n+3$ bezeichnet, welche nicht über N hinausgehen, und ($q_{N,q}$ bedeutet die Anzahl dieser q_j)

$$M_N = \Big(1-\frac{1}{q_1^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{q_2^2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{q_{N,q}^2}\Big).$$

Aehnlich ist für die Primzahlen von der Form $6n+5$:

$$\Theta_1 - \tfrac{1}{2}\Theta_2 + \tfrac{1}{3}\Theta_3 - \tfrac{1}{4}\Theta_4 + \cdots > \tfrac{1}{2}\log\log N + \tfrac{1}{2}\log M_N - \tfrac{1}{2}\log 3.$$

Hierauf folgen Bemerkungen über das Wesen des Euklidischen Beweises für die Unendlichkeit der Anzahl der Primzahlen, mit Bezug auf eine Mitteilung des Verfassers in den C. R. desselben Jahres; ferner über einige Euler'sche Formeln und Beweise derselben von Mertens, wobei die Arbeit von Gram (F. d. M. XVI. 1884. 146) erwähnt wird; endlich über die Grenzen, innerhalb deren die Summe der Logarithmen aller über N nicht hinausgehenden Primzahlen liegt, wobei auf Tschebyscheff's bezügliche Formeln und auf einen Aufsatz des Verfassers im Phil. Mag. XVI. 251 (1883) verwiesen wird. Lp.

P. W. Preobraschensky. Ueber die Anzahl der Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen zwischen gegebenen Grenzen. Mosk. math. Samml. XIII. 707-739. (Russisch.)

Die Untersuchungen des Verfassers über die Dichtigkeit der Primzahlen in verschiedenen Intervallen der Reihe der natürlichen Zahlen führen ihn zu einer Annäherungsformel für die Anzahl der Primzahlen, welche eine gegebene Zahl nicht übersteigen. Es wird nämlich gezeigt, dass der Ausdruck

$$\frac{x}{\log x - 1 - \dfrac{1}{\log x}} + \frac{x}{15600 + \tfrac{4}{3}\sqrt{x}}$$

mit einer grossen Annäherung die bekannte Riemann'sche Reihe reproducirt, dass z. B. im Intervalle der neun ersten Millionen die Ab-

weichung dieser Formel von der Riemann'schen Reihe niemals neun Einheiten übersteigt. Der Verfasser verallgemeinert seine Untersuchungen, indem er auch die Formel für die Anzahl der primären, d. h. durch ein Quadrat nicht teilbaren Zahlen giebt.

Wi.

P. S. Poretzky. Zur Lehre von den Primzahlen.

Kasan. Ges. VI. 52-142. (Russisch.)

Der Verfasser bezeichnet durch das Symbol $\psi(m)$ die mehrdeutige Function, welche alle $\varphi(m)$ Zahlen darstellt, die kleiner als m und mit m prim sind, und giebt für die betrachtete Function eine Formel, welche viel einfacher ist, als die früher von Dormoy und Dupré gegebenen. Für den wichtigsten Fall, wo $m = 2.3.5.7 \dots p$, ist die Formel:

$$\psi(2.3.5.7 \dots p) = 2.3.5.7 \dots p \left\{ \sum_{p_i=2}^{p_i=p} \frac{\psi(p_i)}{p_i} - K \right\},$$

wo p eine Primzahl und K eine ganze Zahl.

Auf diese Formel gestützt, erläutert der Verfasser sehr ausführlich verschiedene praktische Methoden für die Auffindung der Primzahlen mittelst einer Verallgemeinerung des bekannten Eratosthenes'schen Verfahrens. Im besonderen wird die Methode betont, welche noch von Leibniz empfohlen wurde und auf der Betrachtung zweier arithmetischen Progressionen $1+6k$ und $5+6k$ beruht. Die Wichtigkeit der Einführung der Function $\psi(m)$ wird auch bewiesen durch die Anwendung auf andere zahlentheoretische Fragen. Es wird u. a. die Möglichkeit gezeigt, mit Hülfe der Function $\psi(m)$ eine Primzahl zu finden, welche jede gegebene Zahl übersteigt. Das Ende der inhaltreichen Abhandlung bilden die Untersuchungen des Verfassers über den Legendre'schen Satz: „Die Primzahlen streben nach einer gleichmässigen Verteilung zwischen den verschiedenen arithmetischen Progressionen $km - \psi(m)$", und über die Intervalle zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen. Wi.

L. Gegenbauer. Note über die Anzahl der Primzahlen.

Wien. Ber. XCVII. 374-377.

Der Euklidische Satz über die Existenz unendlich vieler Primzahlen wird mit Hülfe einer Function $Q_r(n)$ bewiesen, welche die Anzahl aller ganzen Zahlen von 1 bis n angiebt, welche durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) teilbar sind. My.

R. SAINT-LOUP. Sur la représentation graphique des diviseurs des nombres. C. R. CVII. 24.

Versuche, das Sieb des Eratosthenes graphisch darzustellen. Sn.

J. PEROTT. Remarque au sujet du theorème d'Euclide sur l'infinité du nombre des nombres premiers. American J. XI. 99-138.

Gruppentheoretische Studien zur Theorie der Zahlkörper. Es liegt nur die Einleitung vor, welche noch nicht auf das eigentliche Thema eingeht. Sn.

LOIR. Caractère de la divisibilité d'un nombre par un nombre premier quelconque (7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...). C. R. CVI. 1070-1071.

Der Verfasser empfiehlt, die Teilversuche nicht von links nach rechts, sondern von rechts nach links zu beginnen, die Einer durch Subtraction eines geeigneten Vielfachen der Primzahl wegzuschaffen u. s. f. Sn.

C. A. LAISANT. Remarques arithmétiques sur les nombres composés. S. M. F. Bull. XVI. 150-155.

Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl N in k Factoren. Darstellung durch netzförmige Gebilde und mit Hülfe von Farben. Sn.

P. W. PREOBRASCHENSKY. Eine besondere Art der trigonometrischen Reihen. Kas. Ges. VI. 10-13. (Russisch.)

Wenn ss$(x) = +1, -1, 0$, je nachdem $\sin x$ positiv, negativ oder Null ist, so ist die Anzahl der Zahlen, welche kleiner als m und durch 2 und 3 nicht teilbar sind, gleich

$$\frac{m}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\,\mathrm{ss}\left(\frac{m\pi}{3}\right),$$

oder gleich der darin enthaltenen grössten ganzen Zahl. Wi.

R. W. D. Christie. Note on perfect numbers. Ed. Times XLVIII. 183-191. (Appendix IV.)

Zusammenstellung der Eigenschaften der vollkommenen Zahlen zur Ergänzung der gewöhnlichen Lehrbücher über Zahlentheorie. Lp.

J. J. Sylvester. Sur les nombres parfaits. C. R. CVI. 403-405.

J. J. Sylvester. Sur une classe spéciale des diviseurs de la somme d'une série géométrique. C. R. CVI. 446-450.

J. J. Sylvester. Sur l'impossibilité de l'existence d'un nombre parfait impair qui ne contient pas au moins 5 diviseurs premiers distincts. C. R. CVI. 522-526.

J. J. Sylvester. Sur les nombres parfaits. C. R. CVI. 641-642.

Herr Sylvester behandelt die Frage, ob es ungerade vollkommene Zahlen gebe, mit Hülfe von Eigenschaften der Ausdrücke

$$\frac{\theta^{x} - 1}{\theta - 1},$$

welche er „Fermatiane" nennt, und zeigt, dass keine vollkommenen Zahlen mit nur 3, 5, 7 Elementen existiren. Sn.

J. J. Sylvester. Sur les nombres parfaits. Mathesis VIII. 57-61.

Mit Anmerkungen versehener Abdruck des in C. R. CVI. 403-405 erschienenen Artikels. Mn. (Lp.)

Cl. Servais. Sur les nombres parfaits. Mathesis VIII. 92-93, 135.

Wenn es eine vollkommene Zahl mit n Primzahlen giebt, so geht der kleinste dieser Factoren nicht über n hinaus. Es giebt keine vollkommenen Zahlen, welche nur drei Primzahlen enthalten. Mn. (Lp.)

M. d'Ocagne. Sur la détermination du chiffre qui, dans la suite naturelle des nombres, occupe un rang donné. C. R. CVI. 190-191.

Einfachere Erledigung einer von Barbier behandelten Aufgabe, vgl. F. d. M. XIX. 169-170. Sn.

J. J. Sylvester, Culley, R. W. D. Christie. Solution of question 9112. Ed. Times XLVIII. 48-49.

Eine jede Zahl kann als Summe auf einander folgender Zahlen der Zahlenreihe so oft dargestellt werden, wie sie ungerade Factoren enthält (z. B. $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 5+6+7+8+9+10 = 7+8+9+10+11 = 14+15+16 = 22+23 = 45$). Jede Zahl kann durch eine Reihe von der Differenz 2 in so vielen Arten dargestellt werden, wie Factoren vorhanden sind, welche nicht über ihre Quadratwurzel hinausgehen. Lp.

M. d'Ocagne. Solution de la question de mathématiques élémentaires proposée au concours général de 1887. Nouv. Ann. (3) VII. 449-456.

Der vierte Teil der Ebene ist durch Parallelen zu den Axen in gleiche Quadrate geteilt und diese sind in doppelter Weise numerirt, zuerst nach Art von Coordinaten, sodann schräg, vom Ursprung anfangend, stets in gleicher Richtung. Die Relationen, welche sich zwischen beiden Bezifferungsweisen aufstellen lassen, geben zu mancherlei Aufgaben Anlass und stehen in Beziehung zu dem Newton'schen Parallelogramm, welches bei der Untersuchung der Zweige einer Curve angewandt wird. Sn.

A. ANDREINI. Sopra una proprietà singolare di alcuni numeri dipendente dal sistema particolare di numerazione nel quale sono scritti. Batt. G. XXVI. 315-326.

In einem Zahlsystem von beliebiger Basis werden die Zahlen gesucht, deren Vielfache mit denselben (cyklisch permutirten) Ziffern geschrieben werden (z. B. im Decimalsystem 142857).

Sn.

O. SIMONY. Ueber einige mit der dyadischen Schreibweise der ganzen Zahlen zusammenhängende arithmetische Sätze. Math. Ann. XXXI. 549-565.

Sind 1 und 0 die einzigen anzuwendenden Zahlzeichen, so lassen sich symbolisch alle ungeraden Zahlen in der Form:

$$1^{c_1}0^{c_2}1^{c_3}\dots 0^{c_{2q-1}}1^{c_{2q-1}}$$

alle geraden in der Form

$$1^{c_1}0^{c_2}1^{c_3}\dots 1^{c_{2q-1}}0^{c_{2q}}$$

zusammenfassen, wo die Exponenten anzeigen sollen, wie oft jede Ziffer 1 oder 0 wiederholt zu denken ist. Es werden nun die Eigenschaften des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{c_1+\cfrac{1}{c_2+\cfrac{1}{c_3+\cdots}}}$$

untersucht, und gezeigt, in welchen Beziehungen die Näherungswerte desselben zu gewissen Zahleneinteilungen (Linearformen u. a.) stehen.

Sn.

C. A. LAISANT. Sur la numération factorielle, application aux permutations. S. M. F. Bull. XVI. 176-183.

Jede ganze Zahl N ist darstellbar in der Form:

$$N = \alpha_n \,.\, n! + \alpha_{n-1} \,.\, (n-1)! + \cdots + \alpha_2 \,.\, 2! + \alpha_1,$$

wo α_k unter $k!$ liegen soll. Mit Hülfe dieser Darstellungsform wird eine einfache Klassification der Permutationen ermöglicht, und weiterhin werden einige Vorteile für Entwickelungen von Determinanten erzielt.

Sn.

O. Schlömilch. Eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten. Schlömilch Z. XXXIII. 190-191.

G. Vivanti. Ueber eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten. Schlömilch Z. XXXIII. 358-360.

„Bezeichnet n eine positive ganze, k eine gerade Zahl, so ist das arithmetische Mittel aus den k^{ten} Potenzen der zu n gehörigen Binomialcoefficienten immer eine ganze Zahl." Herr Schlömilch stellt diesen Satz auf, Herr Vivanti beweist ihn.

Sn.

A. Lugli Sul numero dei numeri primi da 1 ad n. Batt. G. XXVI. 86-95.

Nach dem Vorgange von Legendre und Meissel wird die gesuchte Anzahl auf eine in einem engeren Gebiet enthaltene Anzahl zurückgeführt. Sn.

J. J. Sylvester. Preuve élémentaire du théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques dans le cas où la raison est 8 ou 12. C. R. CVI. 1278-1281, 1385-1386.

Als Nerv eines Beweises für das Vorhandensein unendlich vieler Primzahlen in einer gewissen Form kann nach Angabe des Herrn Verfassers die Bildung einer unendlichen Progression von ganzen Zahlen dienen, welche sämtlich zu einander relativ prim sein sollen, und unter denen sich mindestens eine wirkliche Primzahl von der vorgeschriebenen Form findet. Das Verfahren soll nicht nur für die in der Ueberschrift angegebenen Reihen, sondern auch für die Formen $A\chi \pm 1$ anwendbar sein, und zwar für $A\chi + 1$ einen unmittelbaren, für $A\chi - 1$ einen etwas umständlicheren Beweis liefern. Sn.

J. J. Sylvester. On the divisors of the sum of a geometrical series whose first term is unity and common ratio any positive or negative integer. Nature XXXVII. 417-418.

Ueber die Divisoren des Ausdrucks:

$$\frac{r^p-1}{r-1}.$$

Aus diesem Aufsatze werde zunächst eine neue Benennung erklärt. Alle algebraischen Divisoren des Ausdrucks (Fermatiane benannt) sind auch Divisoren eines anderen von niederem Grade mit Ausnahme eines einzigen. Dieser eine, so zu sagen der „Kern" (core) oder gewöhnlich der irreducible primitive Factor genannt, wird als „cyklotomische" Function oder „Cyklotom" der Basis bezeichnet.

Der mit Hülfe dieser Bezeichnung bewiesene Satz lautet: „Die Summe einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied 1 und deren Quotient irgend eine positive oder negative, von 1 oder -1 verschiedene ganze Zahl ist, muss wenigstens ebenso viele verschiedene Primdivisoren enthalten, wie die Anzahl ihrer Glieder Divisoren aller Arten enthält; ausgenommen ist der Fall, wenn der Quotient -2 oder 2 und die Anzahl der Glieder gerade im ersten Falle, 6 oder ein Vielfaches von 6 im anderen ist, in welchen Fällen die Anzahl der Primdivisoren um 1 geringer sein kann als im allgemeinen Falle". Den Anstoss zu dieser Untersuchung haben die Sätze über die ungeraden vollkommenen Zahlen gegeben. Lp.

F. Panizza. Nota su alcune somme di potenze e di prodotti. Genova G. 1888. 8 S.

Ist p eine ungerade Primzahl, und bezeichnet man durch π_n irgend ein n-äres Product der Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$, durch $\Sigma\pi_n$ die Summe aller solchen Producte, u. s. w., so werden die folgenden Sätze bewiesen:

1. $\sum_{i=1}^{p-1} i^k \equiv {0 \atop 1} \pmod{p}$ für $k \equiv {1, 2, \ldots, p-2 \atop 0} \pmod{p-1}$.

2. $\Sigma\pi_k \equiv {0 \atop -1} \pmod{p}$ für $k = {1, 2, \ldots, p-2 \atop p-1}$.

3. $\Sigma\frac{1}{\pi_k} \equiv 0 \pmod{p}$ für $k = 1, 2, \ldots, p-2$.

4. $\Sigma \pi_k^{p-1} \equiv {-1 \atop 1} (\text{mod. } p)$ für $k = {1, 3, \ldots, p-2 \atop 2, 4, \ldots, p-1}$.

Dazu ist Folgendes zu bemerken: Die Sätze 1, 2 sind nicht neu (siehe: Serret, Cours d'alg. sup. V éd. N. 302); ferner kann man den zweiten aus dem ersten durch die Newton'schen Formeln ganz einfach ableiten. Der Satz 3 ist nicht correct ausgesprochen, denn $\Sigma \frac{1}{\pi_k}$ ist keine ganze Zahl; man muss sagen: Ist der Bruch $\Sigma \frac{1}{\pi_k}$ auf seine einfachste Form gebracht, so ist der Zähler durch p teilbar. Endlich möge erwähnt werden, dass der vom Verfasser aufgestellte Beweis des Wilson'schen Satzes nicht neu ist; er ist nämlich mit dem von Wertheim (Elemente der Zahlentheorie, Leipzig 1887, S. 186) für den verallgemeinerten Wilson'schen Satz angegebenen identisch. Vi.

M. Martone. Nota ad una dimostrazione di un celebre teorema di Fermat. Napoli. Joveue. 6 S.

Siehe den Bericht über: Martone, Dimostrazione di un celebre teorema di Fermat (F. d. M. XIX. 1887. 187-88). Vi.

C. Garibaldi. Nuova dimostrazione di un teorema di Fermat. Batt. G. XXVI. 197-200.

Der Fermat'sche Satz $a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod. } p)$ wird aus Eigenschaften des Binomialcoefficienten

$$\binom{ap}{p}$$

abgeleitet. Sn.

H. Kefferstein. Eine Methode zur Bestimmung der primitiven Wurzeln der Congruenz $g^{p-1} \equiv 1$ (mod. p), für einen reellen Primzahlmodul p. Hamb. Mitt. 8. 256-265.

Exhaustion durch Löschen aller Potenzreste, deren Exponenten den Teilern von $p-1$ entsprechen, u. s. f. Sn.

Jos. Mayer. Ueber die Grösse der Periode eines unendlichen Decimalbruchs oder die Congruenz $10^x \equiv 1 \pmod{P}$. Pr. d. K. Studienanst. Burghausen. 52 S.

Einheitliche Bearbeitung des bekannten Materials mit geringen Zusätzen. Im Anhang zwei Tafeln, deren erste die Indices von 2 und 5 für je eine angegebene primitive Wurzel aller Primzahlen und Primzahlpotenzen unter 1000 enthält; die zweite ausgedehntere giebt an, welche Divisoren von $p-1$ der Stellenzahl des Decimalbruchs gleich werden. Sn.

L. Gegenbauer. Note über das quadratische Reciprocitätsgesetz. Wien. Ber. XCVII. 427-431.

Erweiterung des Geltungsbereiches für eine bestimmte Fassung dieses Gesetzes. Neue Relation zwischen grössten ganzen Zahlen. Sn.

J. Hacks. Schering's Beweis des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste dargestellt mit Hülfe des Zeichens $[x]$. Acta Math. XII. 109-111.

Der Beweis des Herrn Schering findet sich Gött. Nachr. 1879, S. 217 (vgl. F. d. M. XI. 130). Sn.

H. Bork. Untersuchungen über das Verhalten zweier Primzahlen in Bezug auf ihren quadratischen Restcharakter. Diss. Halle. 21 S. 4°.

S. F. d. M. XVII. 1885. 152.

L. Liebetruth. Beitrag zur Zahlentheorie. Pr. Herz. Francisceum Zerbst.

Eigenschaften der Zahlenreihe:

$$P_n = xP_{n-1} - P_{n-2}.$$

Grösste gemeinschaftliche Teiler, einige Summirungen, Rest-

systeme, Zahlen mit negativem Index, Entwickelung als ganze Function von x, Beziehungen zu den Näherungswerten eines Kettenbruches. Sn.

M. Frolow. Sur les égalités à deux degrés. C. R. CVII. 831-832.

Eigenschaften der Zahlengruppen, welche den beiden Gleichungen

$$a_1+a_2+\cdots+a_n = A_1+A_2+\cdots+A_n,$$
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 = A_1^2+A_2^2+\cdots+A_n^2$$

gleichzeitig genügen. (Blosse Ankündigung). Sn.

L. Gegenbauer. Zwei Eigenschaften der Primzahl 3. Wien. Ber. XCVII. 271-276.

„Das Quadrat von 3 ist die einzige Potenz einer Primzahl, welche sich als Summe der α^{ten} Potenzen von zwei ganzen positiven teilerfremden Zahlen darstellen lässt, wo α mindestens einen ungeraden Divisor (ausser 1) besitzt.“ — „Das Quadrat von 3 ist die einzige Potenz, welche unmittelbar auf die Potenz einer Primzahl folgt.“ — Diese Sätze liefern zugleich die Beweise einiger empirischen Theoreme des Herrn Catalan.

Sn.

Th. Pépin. Sur quelques formules d'analyse utiles dans la théorie des nombres. Journ. de Math. (4) IV. 83-127.

Die sehr umfangreiche Abhandlung will eine lange Reihe von Liouville'schen Formeln (Journal (2) III u. f. bis X), welche sich auf Zerlegungen von der Form:

$$a\alpha+b\beta = d\delta$$

beziehen, im Zusammenhang beweisen. Anwendungen auf quaternäre quadratische Formen u. dgl. soll ein folgender Artikel bringen. Sn.

N. SARKAR, A. MARTIN. Solution of question 9237.
Ed. Times XLVIII. 118-119.

Drei rechtwinklige, inhaltsgleiche Dreiecke zu finden, deren Seiten ganze Zahlen sind. Die Lösung wird allgemein angegeben, sodann in den kleinsten Zahlen:

1) 24, 70, 74; 40, 42, 58; 15, 112, 113.
2) 120, 182, 218; 105, 208, 233; 56, 390, 394.

Lp.

F. J. STUDNICKA. Ueber die allgemeine Auflösung der unbestimmten Gleichung zweiten Grades

$$axy + x^2 - y^2 = \pm 1.$$

Prag. Ber. 92-95.

Zusammenhang der Reihe der Lösungen mit den Näherungswerten eines Kettenbruchs. Sn.

R. MARCOLONGO. Sull' analisi indeterminata di 2° grado.
Nota II^a. Batt. G. XXVI. 63-85.

Analyse der diophantischen Gleichung:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

Vollständige Literatur. Ueber die frühere Note siehe Batt. G. XXV. 161-173, F. d. M. XIX. 1887. 182. Sn.

B. H. RAU, H. PLAMENEWSKY, H. L. ORCHARD. Solution of question 9111. Ed. Times XLVIII. 48.

Lösung der Gleichung $x^2 - 19y^2 = 81$ in positiven ganzen Zahlen. Lp.

R. W. D. CHRISTIE. Notes, solutions, and questions.
Ed. Times XLIX. 159-182. (Appendix IV).

Der Verf. hat hier eine grössere Anzahl von Lösungen verschiedener Aufgaben vereinigt, von denen die Mehrzahl der Zahlentheorie angehört. Unter *A*, „diophantischer Analysis“, sind

15 Aufgaben enthalten. Der Abschnitt *B* beschäftigt sich mit der Zerlegung einer Zahl in Quadrate (12 Aufgaben); in *C* wird die Auflösung in Kuben behandelt. In *D* folgen Lösungen verschiedenartiger älterer Aufgaben, unter *E* neu gestellte Fragen.

Lp.

K. Schwering. Eine Eigenschaft der Primzahl 107. Acta Math. XI. 119-120.

Die Ansicht des Herrn Kronecker (J. für Math. XCIV. 359-360), dass es nicht immer möglich sei, die aus der Theorie der Kreisteilung bekannten Ausdrücke $(\alpha, x)^{\lambda}$ als Producte conjugirter Factoren ψ darzustellen, wird hier durch ein neues Beispiel bestätigt (vgl. F. d. M. XIV. 1882. 48-49; XIX. 1887. 177-178).

Sn.

L. Kronecker. Ueber die arithmetischen Sätze, welche Lejeune Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat. Berl. Ber. 417-423.

Die Primteiler jeder Form zweiten Grades sind durch gewisse Linearformen charakterisirt; bei $x^n \pm 1$ findet, wie Euler zeigt, dasselbe statt; Dirichlet führt dieselbe Eigentümlichkeit bei den Formen U_n, V_n, welche durch $(x+\sqrt{z})^n = U_n + V_n\sqrt{z}$ definirt werden, an und bestimmt die Primteiler von V_n, falls n Primzahl und von U_n, falls n eine Potenz von 2 ist.

Herr Kronecker behandelt das Problem mit Hülfe von Modulsystemen auf rein arithmetischem und ganz im absoluten Rationalitätsbereiche der gewöhnlichen Zahlen bleibendem Wege, und löst es in überraschend einfacher Weise für jedes n und z. Statt der V_n betrachtet er den „primitiven“ Teiler G_n von V_n (durch den dann auch das Problem der U_n gelöst wird), und setzt diesen mit der merkwürdigen Congruenz in Verbindung

$$\prod_r (x-z^r) \equiv F_n(x) \quad (\text{mod. } F_n(z)),$$

wobei F_n das Polynom der primitiven n^{ten} Einheitswurzeln bedeutet, und r ein vollständiges System (mod. n) incongruenter Zahlen durchläuft, die zu n relativ prim sind. Hierdurch gelingt

es, die Primteiler q von G_n, welche nicht in n enthalten sind, mittels der Congruenz $q \equiv \left(\frac{s}{q}\right) (\text{mod. } n)$ zu charakterisiren.

No.

E. Busche. Zur Anwendung der Geometrie auf die Zahlentheorie. J. für Math. CIV. 32-37.

In einer früheren Abhandlung des Verfassers (J. für Math. C. 461, F. d. M. XIX. 1887. 170) findet sich die Verallgemeinerung einer Formel des Herrn Hermite, welche hier geometrisch abgeleitet und auf complexe Zahlen ausgedehnt wird. Neben ganzen Punkten werden ganze Strahlen betrachtet. Das Hauptgewicht wird auf die principielle Bedeutung der Methode gelegt.

Sn.

E. Busche. Ueber die Euler'sche φ-Function. Math. Ann. XXXI. 70-74.

Bezeichnet $\varphi(x)$ die Anzahl aller zu x teilerfremden Zahlen, welche kleiner als x sind, und legt man der Zahl x alle Werte bei, welche die Bedingungen:

$$\frac{y+y'-1}{r+r'} \leqq \Re\left(\frac{\delta}{x}\right) < \frac{y}{r} \cdot \frac{y'}{r'}$$
$$(y = 1, 2 \ldots, r; \quad y' = 1, 2, \ldots, r')$$

erfüllen, so ist

$$\Sigma\varphi(x) = r \cdot r' \cdot \delta^2.$$

Diese Formel enthält als Specialfall das bekannte Theorem von Gauss, welches für die φ-Function charakteristisch ist.

Sn.

E. Busche. Ueber grösste Ganze. J. für Math. CIII. 118-125.

Eine unmittelbare Ableitung des Reciprocitätsgesetzes ist aus folgender Modification des Gauss'schen Lemmas möglich: „Die ungerade positive Primzahl p ist quadratischer Rest oder Nichtrest der ungeraden positiven Primzahl q, je nachdem die Anzahl der Zahlen $1 \cdot \frac{p}{2}, 2 \cdot \frac{p}{2}, \ldots, \frac{q-1}{2} \cdot \frac{p}{2}$, welche zwischen

einem ungeraden und dem darauf folgenden geraden Vielfachen von $\frac{q}{2}$ gelegen sind, gerade oder ungerade ist." Diese Formulirung, welche in mehrfacher Hinsicht einen Ausblick auf das biquadratische Reciprocitätsgesetz gestattet, tritt hier als sehr specielle Folge einer allgemeinen Relation zwischen Summen von grössten ganzen Zahlen auf. Es bezeichne

$$a-1 \leqq [a] < a \quad \text{und} \quad a-1 \gtreqless [a]' < a.$$

Die reellen Functionen $y = f_{21}(x)$ und deren inverse $x = f_{12}(y)$ seien zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ endlich, stetig, eindeutig, $b > a$, y dazwischen niemals abnehmend; F eine beliebige Function. Dann ist:

$$\sum_{x=[a]'+1}^{x=[b']} F([f_{21}(x)], x) = \sum_{y=[f_{21}(a)]}^{y=[f_{21}(b)]} \sum_{\xi y=[f_{12}(y)]'+1}^{\xi y=[f_{12}(y+1)]'} F(y, \xi y).$$

Es werden mannigfaltige Specialisirungen dieser sehr umfassenden Formel gegeben, bei welchen Analogien mit Integralformeln hervortreten. Sn.

E. MEISSEL. Ueber Restsummen. Pr. Ober-Realsch. Kiel.

Für die Anzahl der in der Reihe:

$$R\sqrt[c]{\frac{n}{1}},\ R\sqrt[c]{\frac{n}{2}}, \dots, R\sqrt[c]{\frac{n}{n}}$$

enthaltenen Reste, welche unter einem vorgeschriebenen echten Bruch liegen, wird eine scharfe Formel und Näherungsformeln gegeben. Mittelwert aller Reste. Beziehungen zur Gammafunction. Zahlenbeispiele. Sn.

M. LERCH. Sur une formule d'arithmétique. Darboux Bull. (2) XII. 100-108.

M. LERCH. Théorèmes d'arithmétique. Darboux Bull. (2) XII. 121-126.

M. LERCH. Sur une formule d'arithmétique. C. R. CVI. 186-187.

Die Divisoren von p seien geteilt in solche, welche grösser als q und in solche, welche nicht grösser als q sind; die Anzahl

der ersteren sei $\psi(p, q)$, die Anzahl der letzteren $\chi(p, q)$. Alsdann lautet die Formel des Herrn Lerch:

$$\sum_{\sigma=0}^{\left(\frac{m}{a}\right)} [\psi(m-\sigma a,\ k+\sigma-1)-\chi(m-\sigma a,\ a)] + \sum_{\lambda=1}^{x-1} [\psi(m+\lambda a,\ \lambda-1)-\chi(m+\lambda a,\ a)] = 0.$$

Diese Formel wird abgeleitet aus der Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{x} \frac{x^{x\nu}}{(1-x^{\nu})(1-x^{a+\nu})} = \frac{1}{1-x^{a}} \sum_{\nu=1}^{a} \frac{x^{\nu}}{1-x^{\nu}} - \sum_{\lambda=1}^{x-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\lambda\nu}}{1-x^{a+\nu}}$$

und andererseits zu der Formel des Herrn Hermite:

$$\sum_{a=0}^{n-1} E\left(x+\frac{a}{n}\right) = E(nx)$$

in Beziehung gesetzt. Zahlreiche Specialisirungen ergeben besonders Eigenschaften der ψ-Function, sowie einen Beweis eines Satzes von Catalan, wonach die Gesamtanzahl der ganzzahligen, nicht negativen Lösungen der n Gleichungen

$$kx+(x+1)y = n-k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

genau gleich n ist. Sn.

A. Strnad. Vier arithmetische Lehrsätze. Casop. XVII. 204. (Böhmisch.)

Erweitert Lerch's Abhandlung „Deux théorèmes d'arithmétique" (Prag. Ber. 1887. 683, F. d. M. XIX. 168) um weitere zwei Sätze, nämlich

$$\text{(II)} \quad \sum_{\varrho=0}^{n} \Psi(n+\varrho,\ \varrho) = n(2n+1),$$

$$\text{(IV)} \quad \sum_{\varrho=0}^{n-1} \Psi(n-\varrho,\ \varrho) = \frac{n(n+1)}{2},$$

wobei $\Psi(\alpha, \beta)$ alle über β liegenden Teiler der Zahl α bezeichnet. Std.

N. W. Bugaieff. Sur les fonctions discontinues logarithmiques. C. R. CVI. 1067-1070.

Unter discontinuirlichen logarithmischen Functionen versteht der Verfasser alle arithmetischen Functionen, welche ein dem logarithmischen gleichgeartetes Additionstheorem besitzen. Er weist an einem sehr verwickelten Beispiel nach, wie sich eine derartige Grundeigenschaft benutzen lässt. Sn.

N. W. Bugaieff. Die Eigenschaften eines Zahlenintegrals nach den Divisoren und seine verschiedenen Anwendungen. Die logarithmischen Zahlenfunctionen. Mosk. math. Samml. XIII. 757-777. (Russisch.)

Es sei $q(n)$ eine Zahlenfunction, welche durch die Gleichungen: $q(1) = 1$, $q(a) = -1$, $q(ab) = +1$, $q(abc) = -1$ u. s. w. und die Bedingung definirt ist, dass sie für alle übrigen durch ein Quadrat teilbaren Zahlen Null ist. In der Abhandlung wird besonders die Summe $L(n) = \Sigma_n\, q(d) \log(d)$ (auf alle Divisoren d der Zahl n ausgedehnt) betrachtet. Diese Function hat folgende Eigenschaften: $L(1) = 0$, $L(a) = -\log a$, $L(a^\mu) = -\log(a)$, $L(a^\alpha b^\beta c^\gamma, \ldots) = L(abc\ldots) = 0$. Ihre Betrachtung führt zum Beweise der Tschebyscheff'schen Formeln für die Function $\theta(n)$, welche die Anzahl der n nicht übersteigenden Primzahlen giebt. Die Eigenschaften des Zahlenintegrals $\Sigma_n q(d) \log(d)$ können auch auf das Zahlenintegral $\Sigma_n q(d)\, L(d)$ ausgedehnt werden, wenn $L(n)$ den Hauptbedingungen genügt:

$$L(1) = 0,\ L(n' . n'') = L(n') + L(n'').$$

Der Verfasser nennt solche Functionen „logarithmisch discontinuirliche“ Functionen. Wi.

N. W. Bugaieff. Allgemeine Methoden der Berechnung der Zahlenintegrale nach den Divisoren. Natürliche Klassification der ganzen Zahlen und der discontinuirlichen Functionen. Mosk. math. Samml. XIV. 1-45.

Die Methode der Berechnung der Zahlenintegrale, d. h. der auf alle Divisoren d der Zahl n ausgedehnten Summen

$\Sigma_n \theta(d)$, beruht auf der folgenden Regel: „Um das Zahlenintegral nach den Divisoren einer Zahl $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ zu finden, setze man anstatt d den Ausdruck $a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \dots$ und berechne die Summe nach α' von 0 bis α, nach β' von 0 bis β, u. s. w.“ Es werden viele Beispiele gegeben, welche diese Methode erläutern. So wird der Wert des Zahlenintegrals $\Sigma_n L(d)$ ermittelt, wo $L(n)$ eine discontinuirliche logarithmische Function (siehe das vorhergehende Referat) ist, welche die Gleichung befriedigt:

$$L(n) = L(a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots) = \psi(a).\alpha + \psi(b).\beta + \psi(c).\gamma + \dots;$$

$\psi(n)$ ist eine willkürliche Zahlenfunction. Man hat

$$\Sigma_n L(d) = \tfrac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)[\alpha\psi(a) + \beta\psi(b) + \gamma\psi(c)].$$

Wi.

N. W. Bugaieff. Sur une intégrale numérique suivant les diviseurs. C. R. CVI. 652-653.

Ist die Function $l'(n)$ durch die Gleichung definirt:

$$\Sigma_n l'(d) = \log n,$$

(die Summation über alle Teiler d der ganzen Zahl n ausgedehnt), so ist für jede Primzahlpotenz

$$l'(p^\mu) = \log p,$$

für alle anderen Werte $l'(n) = 0$. Es sei ferner $q(n)$ eine numerische Function von der Eigenschaft, dass

$$q(1) = +1, \quad q(a) = -1, \quad q(ab) = +1, \quad q(abc) = -1,$$

verschwinde also für jede durch ein Quadrat teilbare Zahl. Alsdann wird

$$\Sigma_n q(d) \log d = -l'(n).$$

Von dieser Gleichung werden drei Anwendungen gegeben, von denen zwei Reihenform haben, und deren dritte einen Ausdruck für die Bernoulli'schen Zahlen als Quotienten zweier unendlichen Producte giebt.

Sn.

E. Cesaro. Sur une fonction arithmétique. C. R. CVI. 1340-1343.

Herr Cesaro hat sich mit der im vorigen Referat erwähnten Function $l'(n)$ bereits früher beschäftigt. Er zeigt den Zusammen-

hang derselben mit anderen zahlentheoretischen Functionen, leitet die oben erwähnte Form der Bernoulli'schen Zahlen ab und giebt eine ähnliche für die Euler'schen Zahlen; zum Schluss ruft er einen Satz von Halphen in Erinnerung, wonach die Summe

$$l'(1) + l'(2) + \cdots + l'(n)$$

asymptotisch gegen n convergirt. Sn.

E. Cesaro. Sur les lois asymptotiques des nombres. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV. 452-457.

Der Verfasser stellt folgende Verallgemeinerung eines Cauchy'schen Theorems auf: „Es ist für $n = \infty$

$$\lim \frac{a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n}{b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n} = \lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n},$$

wenn der zweite Grenzwert existirt und wenn das Verhältnis der Zahlen

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\varepsilon_{n+1}, \quad b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n$$

endlich bleibt, während ihre Differenz ins Unendliche ohne Oscillationen wächst". Aus den Anwendungen sei der folgende allgemeine Satz hervorgehoben: „Ist k der mittlere Wert einer (stets endlichen) Function $f(n)$, so convergirt die über alle Teiler von n erstreckte Summe der Werte dieser Function asymptotisch gegen $k \log n$". Sn.

E. Cesaro. Sur les systèmes des nombres entiers. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV. 457-462.

Häufigkeitsbestimmungen für Zahlen von irgend welchen Eigenschaften innerhalb eines irgendwie definirten Zahlkörpers; Anwendungen der im vorigen Referat erwähnten Sätze.

Sn.

E. Cesaro. Sur les fondements du calcul asymptotique. C. R. CVI. 1651-1654.

Jensen. Observations sur une communication récente de M. Cesaro. C. R. CVII. 81-82.

E. Cesaro. Remarques relatives aux objections faites par M. Jensen à l'une de ces précédentes communications. C. R. CVII. 426-427.

E. Cesaro. Sur une proposition de la théorie asymptotique des nombres. Annali di Mat. (2) XVI. 178-180.

Der in diesen Noten auftretende Meinungsunterschied bezieht sich auf den Begriff der asymptotischen Annäherung und ist in letzter Instanz nur eine Differenz des Wortgebrauchs. Herr Jensen nennt asymptotisch die Annäherung an eine feste Grenze, für welche Herr Cesaro überhaupt keine neue derartige Bezeichnung nötig findet, während er die Annäherung des mittleren Wertes einer Function an eine feste Grenze kurzweg als asymptotisch bezeichnet wissen möchte. So ist also das Wort in folgenden beiden Sätzen Cesaro's zu verstehen: „Die Anzahl der mit einer gewissen Eigenschaft behafteten Teiler von n ist asymptotisch zu $\log n$ multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein n dieselbe Eigenschaft habe". „Die Anzahl solcher Zerlegungen von n in zwei Factoren, bei denen der grösste von diesen beiden eine gewisse Eigenschaft haben soll, ist asymptotisch zu $\log n$, multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinschaftliche Teiler irgend zweier ganzen Zahlen dieselbe Eigenschaft habe." Sn.

P. Goyen. Higher arithmetic and elementary mensuration. New York. 360 S.

J. Marchand. La science du nombre en général. Louvain. 172 S. (Autographié).

B. Theorie der Formen.

C. JORDAN. Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même. Journ. de Math. (4) IV. 349-368.

Es handelt sich um die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen eine lineare Substitution S genügen muss, um eine quadratische Form F (von nicht verschwindender Determinante) in sich selbst zu transformiren.

Ist $F = a_x^2$ die Form und $\Delta = | a_{11} - s, a_{12}, \ldots, a_{1n} | = 0$ die zugehörige charakteristische Gleichung, so hängt die Lösung der Aufgabe bekanntlich wesentlich von den Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ ab. Sind $s_1, s_2, \ldots$ die von einander verschiedenen Wurzeln von $\Delta = 0$, so lässt sich durch Einführung geeigneter neuer Variabeln die Substitution S nach Jordan in eine kanonische Form bringen, in der die einer m_1-fachen Wurzel s_1 entsprechenden m_1 Variabeln einer und derselben „Klasse" noch in mehrere „Reihen" zerfallen können, sodass die Variabeln jeder Reihe durch sehr einfache, mit s_1 proportionale, lineare Functionen ihrer selbst ersetzt werden. Die Anzahlen der Individuen jeder Reihe sind nebst den s Invarianten der Substitution. Demgemäss giebt es nur eine einzige kanonische Form der angeführten Art für S, und es kommt die Aufgabe darauf hinaus, diejenigen Vertauschungen der Variabeln zu ermitteln, welche jene Form von S ungeändert lassen, und dadurch zugleich den Ausdruck von F möglichst zu vereinfachen. Solcher Vertauschungen existiren aber nur zweierlei Arten.

Untersucht man jetzt den Einfluss von S auf F mit Berücksichtigung der erwähnten Vertauschungen, so folgt bei geeigneter Anordnung der Glieder von F, dass die charakteristische Gleichung $\Delta = 0$ eine reciproke ist. Sind demgemäss $s_1, \frac{1}{s_1}; s_2, \frac{1}{s_2}; \ldots$ die Wurzeln, und $(x_1), (y_1); (x_2), (y_2); \ldots$ die entsprechenden Klassen von Variabeln, so zerlegt sich F in eine Summe von Formen, die bezüglich je zweier zusammengehörigen Klassen

$(x), (y)$ bilinear sind und nur, wenn eine Wurzel $+1$ oder -1 existirt, quadratisch werden können. Zugleich zerlegt sich S selbst in ein entsprechendes Product $S'S''$, ..., wo jede partielle Substitution nur die Variabeln der beiden zugehörigen Klassen ändert.

Dadurch ist die ursprüngliche Frage auf eine Reihe weit einfacherer reducirt.

Die erwähnten partiellen bilinearen Summanden von F weisen in ihrer einfachsten Gestalt als Coefficienten nur die Binomialcoefficienten der successiven Differenzen $m-1$, $m-2$, $m-3$, etc. auf. Die partiellen Substitutionen S', S'', ... lassen sich auf die beiden Elementarformen zurückführen:

$$\text{I.} \left| \begin{matrix} x_1 \dots x_m; & sx_1, & s(x_2+x_1) & \dots & s(x_m+x_{m-1}) \\ y_1 \dots y_m; & sy_1, & s(y_2+y_1) & \dots & s(y_m+y_{m-1}) \end{matrix} \right|,$$

$$\text{II.} \left| z_1 \dots z_{2p-1};\ tz_1 \dots tz_{2p-1} \right| \quad (t = \pm 1).$$

Das sind zugleich die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit S die Form F (die also dadurch völlig bestimmt ist) in sich überführt. My.

J. Studnička. Neue Transformation einer homogenen quadratischen Form von n Variabeln in die Summe von n Quadraten. Prag. Ber. 256-265.

Ist die vorgelegte quadratische Form $f = a_x^2$, und bezeichnet H_K die Hesse'sche Determinante K^{ten} Grades

$$H_K = \Sigma \pm f_{11} f_{22} f_{33} \dots f_{KK},$$

so haben nach einem früheren Ergebnisse des Verfassers die Coefficienten s in der kanonischen Darstellung $f = \Sigma s_K X_K^2$ die Bedeutung

$$s_K = \frac{H_K}{H_{K-1}} \quad (H_0 = 1).$$

Es wird hier eine neue einfache Ableitung dieser Formeln gegeben, welche ganz direct vorgeht und sich auf eine Umformung einer symmetrischen Determinante stützt, welche im einfachsten Falle lautet:

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}} \\ \frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{a_{11}} \end{vmatrix}.$$

Auch im allgemeinen Falle werden die Elemente a_{ik} durch gewisse zweireihige Determinanten derselben, dividirt durch a_{11}, ersetzt. My.

VÁLYI. Zur Lehre der quadratischen Formen. Hoppe Arch. (2) VI. 445-448.

Das vielfach untersuchte Kriterium dafür, dass eine quadratische Form mit n Veränderlichen durch lineare Transformation in eine andere mit $m(<n)$ Veränderlichen transformirt werden kann, bringt der Verfasser in die Form, dass die Determinante der Form nebst ihren sämtlichen „Diagonaldeterminanten" bis zum $(m+1)^{\text{ten}}$ Grade incl. verschwindet. Dabei sind Diagonaldeterminanten diejenigen, deren sämtliche Hauptdiagonalelemente zur Hauptdiagonale der ursprünglichen Determinante gehören. My.

A. MEYER. Ueber einen Satz von Dirichlet. J. für Math. CIII. 98-117.

„Jede eigentlich primitive binäre quadratische Form

$$ax^2+2bxy+cy^2,$$

deren Determinante $D = b^2-ac$ kein Quadrat ist, stellt unendlich viele Primzahlen dar, welche zugleich in einer gegebenen mit den Charakteren des Geschlechts jener quadratischen Form verträglichen primitiven Linearform $Mx+N$ enthalten sind." Für die erste Hälfte dieses Satzes hat Herr Weber einen Beweis gegeben (Math. Ann. XX, 301-330; F. d. M. XIV 141-142); die hier gegebene Ergänzung schliesst sich möglichst eng an denselben an. Sn.

L. GEGENBAUER. Notiz über gewisse binäre Formen, durch welche sich keine Potenzen von Primzahlen darstellen lassen. Wien. Ber. XCVII. 368-373.

Es wird bewiesen, dass die binäre Form:

$$f(x,y) = a_{p-1}(x^p+y^p) - \sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k (a_{p-k}-a_{p-1-k}) x^k y^k (x^{p-2k}+y^{p-2k}),$$

wo die a (gewissen Einschränkungen unterliegende) ganze positive Zahlen, p eine ungerade Primzahl ist, bei positiven Werten der Variabeln x, y keine Primzahlpotenz darstellen kann.

My.

H. J. S. Smith. Mémoire sur la représentation des nombres par des sommes de cinq carrés. Mém. Sav. Étr. (2) XXIX. No. 1. 72 S. (1887.)

Der Band der Mémoires des Savants Étrangers mit den wichtigen preisgekrönten Arbeiten der Herren Smith, Minkowski und (s. Abschn. VI, Cap. 7) Appell ist der Redaction erst kurz vor dem Drucke des gegenwärtigen Jahrganges (1888) zugänglich geworden. Um die Abhandlungen nicht wieder unbesprochen zu lassen, beschränken wir uns im Folgenden auf Auszüge aus denselben.

Die Preisschrift des leider zu früh verstorbenen hervorragenden englischen Gelehrten hat das Motto:

Quotque quibusque modis possint in quinque resolvi
Quadratos numeri, pagina nostra docet.

Sie ist in 17 Artikel eingeteilt, von denen die ersten die Forschungsergebnisse des Verfassers auf dem Gebiete der quadratischen Formen aus seinen früheren Arbeiten zusammenstellen, erläutern und ausführen (Lond. Phil. Trans. CLI, 1861; CLVII, 1867; Lond. R. S. Proc. XIII, XVI, 1867). Aus den allgemeinen Betrachtungen werden im Artikel 16 die Folgerungen für die zu lösende Preisfrage gezogen:

„Da die Form Σx_s^2 ($s = 1, 2, 3, 4, 5$), welche ihre eigene Contravariante ist, die einzige Klasse darstellt, welche bei einer quinären Form von der Determinante 1 existirt, so kann man offenbar aus den vorangehenden Theoremen einen Ausdruck für die Anzahl der Zerlegungen einer gegebenen Zahl M in fünf

Quadrate herleiten. Zu diesem Zwecke hat man die Dichtigkeit des einzigen Genus oder der beiden Genera der quaternären Formen $(1, 1, M)$ zu bestimmen, welche durch fünf Quadrate dargestellt werden können. Man bezeichne mit γ diese Dichtigkeit, mit μ die Anzahl der ungeraden Primdivisoren von M; j sei gleich 0, 1, 2, je nachdem 1) M ungerade oder $\equiv 2 \pmod{4}$, 2) $M \equiv 4 \pmod{8}$, 3) $M \equiv 0 \pmod{8}$; N sei die Anzahl der primitiven Darstellungen von M durch fünf Quadrate. Da die Dichtigkeit der quinären Klasse $1/n^4\,\Pi 5$ ist, so ergiebt sich für N der folgende Ausdruck:

$$N = 2^4 \times \Pi 5 \times 2^{\mu+j} \times \gamma,$$
$$= 2^4 \times \Pi 5 \times \tfrac{1}{12} \times \zeta' \times M^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\pi^2} \Sigma\left(\frac{M}{m}\right)\frac{1}{m^2},$$

worin $\zeta' = 2^j\zeta$ ist, ζ einer der Coefficienten der Tabelle oder die Summe aus zweien dieser Coefficienten. Alles kommt also auf die Bestimmung des Coefficienten ζ' hinaus. Sechs Fälle sind zu betrachten:

I. $M \equiv 3 \pmod{4}$; II. $M \equiv 5 \pmod{8}$; III. $M \equiv 1 \pmod{8}$; IV. $M \equiv 2 \pmod{4}$; V. $M \equiv 4 \pmod{8}$; VI. $M \equiv 0 \pmod{8}$.

I. $M \equiv 3 \pmod{4}$. Es giebt keine geraden Formen, welche $(1, 1, M)$ als Invarianten besitzen, und folglich giebt es nur ein einziges Genus, das eine Darstellung durch eine Summe von fünf Quadraten zulässt. Es ist also $\zeta' = \zeta$, d. h. $\zeta' = 1$, weil ja für alle Genera $\zeta = 1$.

II. $M \equiv 5 \pmod{8}$. Es besteht ebensowohl eine gerade wie eine ungerade Ordnung quaternärer Formen mit den Invarianten $(1, 1, M)$, und bei jeder dieser beiden Ordnungen besteht ein Genus von Formen, die durch eine Summe von fünf Quadraten darstellbar sind.

Bei der geraden Ordnung lässt sich die Möglichkeitsbedingung, der jeder Genuscharakter genügen muss, durch die Gleichung $\left(\frac{\theta'_3}{M}\right) = (-1)^\sigma$ oder

$$\sigma \equiv \tfrac{1}{4}(\theta'_1 - 1)(\theta_2 - 1) + \tfrac{1}{4}(\theta_2 - 1)(\theta'_3 - 1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\theta'_1 - 1) + \tfrac{1}{2}(\theta_2 - 1) + \tfrac{1}{2}(\theta'_3 - 1) \pmod{2}$$

ausdrücken. Nun ist aber $\frac{1}{2}(\theta_2 - 1) \equiv 1 \pmod{2}$, weil θ_1 eine

gerade Form ist, deren erste Invariante $\equiv 1 \pmod{4}$ ist; mithin ist $a \equiv 1 \pmod{2}$, indem die Formen θ'_1, θ'_2 des Ausdruckes für σ von selbst verschwinden, und die Möglichkeitsbedingung wird

$$\left(\frac{\theta'_2}{M}\right) = -1, \text{ oder } \left(\frac{\theta_2}{M}\right) = -\left(\frac{2}{M}\right) = +1.$$

Andererseits führt die Congruenz $-\theta_2 \equiv \square \pmod{M}$, welche die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ausdrückt, dass θ_2 als eine Summe von fünf Quadraten darstellbar ist, zu dem nämlichen Werte von $\left(\frac{\theta_2}{M}\right)$. Daraus schliesst man, dass ein gerades Genus vorhanden ist, welches eine derartige Darstellung gestattet. Für dieses Genus ist $\frac{1}{5}$ der Wert des Coefficienten ζ.

Was die gerade Ordnung anbetrifft, so genügt das durch die Gleichungen

$$\left(\frac{\theta_2}{q}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}, \quad (-1)^{\sigma} = \left(\frac{\theta'_2}{M}\right) = -1$$

definirte Genus (q ein Primteiler von M) der Möglichkeitsbedingung und ist zugleich als Summe von fünf Quadraten darstellbar; der Coefficient ζ ist $\frac{1}{2}$. Durch Addition erhält man

$$\zeta' = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{10}.$$

III. $M \equiv 1 \pmod{8}$. Die gerade Ordnung ist immer vorhanden, aber keine Form dieser Ordnung ist durch fünf Quadrate darstellbar. Da nämlich $\left(\frac{2}{M}\right) = +1, \left(\frac{-1}{M}\right) = +1$ ist, so ist die Congruenz $-\theta_2 \equiv \square \pmod{M}$ mit der Möglichkeitsbedingung $\left(\frac{\theta'_2}{M}\right) = -1$ unvereinbar. Bei der ungeraden Ordnung ist, wie im Falle II., ein durch fünf Quadrate darstellbares Genus vorhanden; für dasselbe ist $(-1)^{\sigma} = -1$, $\zeta = \frac{1}{2}$, und folglich $\zeta' = \zeta = \frac{1}{2}$.

IV. $M \equiv 2 \pmod{4}$. Hier existirt nur ein einziges ungerades darstellbares Genus, und es ist $\zeta' = \zeta = 1$.

V. $M \equiv 4 \pmod{8}$; $M = 4M'$. Aus der Congruenz $-\theta_2 \equiv \square \pmod{M}$ schliesst man $(-1)^{\frac{1}{2}(\theta_2-1)} = -1$, $\left(\frac{\theta_2}{M'}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(M'-1)}$.

Bezeichnet man also den gemeinschaftlichen Charakter der Formen θ_1, θ_2 mit $(-1)^\sigma$, so ist $(-1)^\sigma = -1$, weil nach der Möglichkeitsbedingung:

$$(-1)^\sigma \times (-1)^{\frac{1}{4}(M'+1)(\theta_2-1)} \times \left(\frac{\theta_2}{M'}\right) = +1.$$

Somit folgt $\zeta = \frac{1}{4}$; doch ist dieser Wert zu verdoppeln, weil $j = 1$. Also ist $\zeta' = 2\zeta = \frac{1}{2}$.

VI. $M \equiv 0$ (mod. 8). Bezeichnet man wieder den grössten ungeraden Divisor von M mit M', so ergiebt sich für das Genus der durch eine Summe von fünf Quadraten darstellbaren Formen:

$$(-1)^{\frac{1}{4}(\theta_2-1)} = -1, (-1)^{\frac{1}{8}(\theta_2^2-1)} = +1, \left(\frac{\theta_2}{M'}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(M'-1)},$$

$$(-1)^\sigma = 1.$$

Der Wert von ζ ist $\frac{1}{8}$; da er jedoch zu vervierfachen ist, so stimmt das Ergebnis mit dem von Fall V. überein."

Die in den Formeln auftretenden Summen unendlicher Reihen werden im 17. Artikel nach einer Methode erhalten, die der Verfasser schon früher zur Anwendung gebracht hatte.

Lp.

H. Minkowski. Mémoire sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers. Mém. Sav. Étr. (2) XXIX. No. 2. 180 S. (1887).

Wir begnügen uns aus dem im vorangehenden Referate angeführten Grunde mit der Wiedergabe des Inhaltsverzeichnisses dieser umfangreichen Arbeit.

Erster Teil. Ueber die Reste quadratischer Formen.

I. Klassen quadratischer Formen: Index, Invarianten und Ordnung einer Form.

II. Reste von Formen. Die Invarianten $o(f)$ sind ganze Zahlen.

III. Reste und Hauptrepräsentanten für einen Modul N.

IV. Existenzbedingungen einer Ordnung.

V. Theoreme über die Hauptreste. Fundamentalformen für einen Modul N.

VI. Gruppen von Formen für einen Modul N. Charaktere.

VII. Ueber die Anzahl der Lösungen der Congruenzen:

$$f = \sum_1^n a_{ik} x_i x_k \equiv m \pmod{N}.$$

VIII. Bestimmung der Grössen $f(h; q^t)$ in den einfachsten Fällen.

IX. Charaktere der Hauptrepräsentanten und der Fundamentalformen.

X. Bedingungen für eine Congruenz $f \rightleftharpoons g \pmod{q^t}$.

XI. Genera von Formen. Bedingungen für die Existenz eines Genus.

XII. Adjungirte Formen. Reciprocität zwischen den Ordnungen:

$$\left(\frac{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_{n-2},\ \sigma_{n-1}}{o_1,\ o_2,\ \ldots,\ o_{n-2},\ o_{n-1}}\right),\ I(f) \text{ und } \left(\frac{\sigma_{n-1},\ \sigma_{n-2},\ \ldots,\ \sigma_2,\ \sigma_1}{o_{n-1},\ o_{n-2},\ \ldots,\ o_2,\ o_1}\right),\ I(f).$$

Zweiter Teil. Ueber die Darstellungen ganzer Zahlen durch quadratische Formen.

XIII. Hülfssatz.

XIV. Darstellung einer Form von ν Variabeln durch eine von n Variabeln ($\nu < n$). Aequivalente Darstellungen und Gruppen von Darstellungen.

XV. Adjungirte Darstellungen und adjungirte Gruppen von Darstellungen.

XVI. Darstellungen ganzer Zahlen durch Formen mit n Variabeln.

XVII. Darstellungen von Formen mit $n-1$ Variabeln durch solche mit n Variabeln.

XVIII. Index, Ordnung und Genus einer Form von $n-1$ Variabeln, die durch eine mit n Variabeln dargestellt ist.

XIX. Ueber die Gesamtheit der Darstellungen einer ganzen Zahl durch die verschiedenen Formen eines Genus G.

XX. Mass eines positiven Genus. Mass der Darstellungen einer ganzen Zahl durch die Formen eines positiven Genus.

XXI. Ueber die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch eine Summe von fünf Quadraten.

XXII. Ueber die Bestimmung des Masses einiger positiven Genera.

XXIII. Mass eines beliebigen Genus von einer Ordnung:

$$\left(\frac{1}{o_h}\right) \quad [o_h \equiv 1 \pmod{2}].$$

Note über die Congruenzen $f \equiv g \pmod{q^t}$. Lp.

L. Gegenbauer. Zahlentheoretische Notiz. Wien Ber. XCVII. 420-426.

Einige Verallgemeinerungen von Sätzen der Herren Cesaro und Busche, welche dann wieder auf neue Arten specialisirt werden: Ausdrücke für die mittlere Dichtigkeit der Primzahlen in einem vorgeschriebenen Intervall; Beziehung zwischen der Anzahl der Darstellungen von n durch das System der quadratischen Formen der Discriminante $\varDelta$ und der Anzahl der Transformationen einer Form dieser Discriminante in sich selbst u. dgl. m. Sn.

D. Hilbert. Ueber die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten. Math. Ann. XXXII. 342-350.

Eine Form gerader Ordnung n mit reellen Coefficienten und n homogenen Variabeln heisse allgemein „definit“, wenn dieselbe für jedes reelle Wertsystem der m Variabeln einen positiven Wert annimmt und überdies eine von Null verschiedene Discriminante besitzt. Eine Form mit reellen Coefficienten wird eine „reelle“ Form genannt.

Den bisher bekannten Darstellungen solcher Formen als Summen von Formenquadraten, nämlich I. $n = 2$, m beliebig, II. n beliebig, $m = 2$, fügt der Verfasser einen weiteren Fall III. $n = 4$, $m = 3$ hinzu, insofern jede definite biquadratische ternäre Form (und zwar noch auf dreifach unendlich viele Arten) sich als Summe von drei Quadraten reeller quadratischer Formen darstellen lässt.

Weiterhin aber wird das merkwürdige, bereits von Hrn. Minkowski vermutete Ergebnis aufgedeckt, dass in allen sonstigen

Fällen stets Formen existiren, welche sich nicht als endliche Summen von Quadraten reeller Formen darstellen lassen. Das Beweisprincip wird zuerst am Beispiel der ternären Formen sechster Ordnung dargelegt.

Es werden zuvörderst solche Formen construirt, welche in acht Punkten verschwinden, dagegen für alle anderen reellen Wertsysteme der Variabeln von Null verschieden und positiv ausfallen; sodann solche, welche sich nicht als Summen von 28 oder weniger Quadraten reeller Formen darstellen lassen, und mit Hülfe dieser endlich solche, welche sich überhaupt nicht als endliche Summen von Quadraten reeller Formen darstellen lassen.

Analog bei höheren Formen. My.

D. Hilbert. Lettre adressée à M. Hermite. Journ. de Math. (4) IV. 249-256.

Der Verfasser giebt hier Anwendungen eines allgemeinen, von ihm früher aufgestellten Principes auf die Theorie der biquadratischen binären und der kubischen ternären Formen. Ist $f = a_x^4$ eine erstere, so werden diejenigen quadratischen binären Formen $\varphi = \alpha_x^2$ gesucht, für welche $(a\alpha)^2 a_x^2 = \lambda\alpha_x^2$, wo λ ein constanter Factor ist. Dann hängt λ von der bekannten kubischen Gleichung ab:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - i\lambda - 2j = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = 0.$$

Die Ränderung der Determinante $\Delta(\lambda)$ mit Grössen x_2^2, $-x_2x_1$, x_1^2 erzeugt für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die drei wohlbekannten Quadrate φ_1^2, φ_2^2, φ_3^2, welche sich in dem Büschel $f+kH$ vorfinden u. s. w. Sucht man andererseits solche kubischen binären Formen φ, für die analog $(f, \varphi)_2 = \lambda\varphi$, so stösst man auf die viel untersuchten beiden Formenbüschel φ, deren Jacobi'sche Form mit f identisch ist.

Die Befolgung des nämlichen Principes führt bei einer kubischen ternären Form auf die algebraische Theorie der Wendedreiseite der bez. Curve dritter Ordnung. Dadurch wird für die irrationalen Covarianten der genannten Gebilde und den

Zusammenhang der letzteren ein einheitlicher Gesichtspunkt gewonnen.

Zum Schlusse wird gezeigt, wie sich die Darstellung von Formen, insbesondere der quaternären, als Potenzsummen in dem angegebenen Sinne gestaltet. My.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

F. J. Studnička. Ueber die Näherungswerte der Kettenbrüche mit constantem Nenner. Casop. XVII. 200. (Böhmisch.)

Bezeichnet man den n^{ten} Näherungswert des Kettenbruches

$$B = \frac{1}{a} \dot{+}$$

mit $p_n : q_n$, so gilt für denselben die Formel

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a^{n-1} + (n-2)_1 a^{n-3} + (n-3)_2 a^{n-5} + \cdots}{a^n \;\; + (n-1)_1 a^{n-2} + (n-2)_2 a^{n-4} + \cdots},$$

wobei das Symbol $(n)_k$ den k^{ten} Binomialcoefficienten bezeichnet und die Formel

$$\Sigma K_{n-2k} = (n-k)_k a^{n-2k}$$

verwendet wird, wenn K_{n-2k} die Summe von Combinationsproducten $2k^{\text{ten}}$ Grades ausdrückt. Std.

J. W. Sleschinsky. Ueber die Convergenz der Kettenbrüche. Odessa. Ges. VIII. 97-127. (Russisch.)

J. W. Sleschinsky. Beweis der Existenz einiger Grenzen. Odessa. Ges. VIII. 129-137. (Russisch.)

Es werden im ersten Artikel folgende Theoreme bewiesen: 1) Wenn die Reihe $|a_1| + |a_2| + \cdots$ convergent ist, so ist auch

der Kettenbruch

$$\frac{a_0}{1} \dot{+} \frac{a_1 x}{1} \dot{+} \frac{a_2 x}{1} \dot{+} \frac{a_3 x}{1} \dot{+} \cdots$$

convergent für alle endlichen Werte von x und stellt eine transcendente Function mit einem wesentlich singulären Punkt im Unendlichen dar. 2) Im Falle $\lim a_n = a \gtrless 0$ ist der Kettenbruch

$$\frac{a_0}{1} \dot{+} \frac{a_1 x}{1} \dot{+} \frac{a_2 x}{1} \dot{+} \frac{a_3 x}{1} \dot{+} \cdots$$

convergent für alle endlichen Werte von x mit Ausnahme der Werte zwischen 0 und $-\frac{1}{4a}$, wenn die Reihe

$$|b_1| + |b_2| + \cdots, \quad \text{wo} \quad b_n = 1 - \frac{a_n}{a},$$

convergent ist.

Im zweiten Artikel werden dieselben Theoreme aus der Abhängigkeit zwischen der Convergenz verschiedener Reihen abgeleitet. Wi.

A. Hurwitz. Ueber die Entwickelung complexer Grössen in Kettenbrüche. Acta Math. XI. 187-200.

Den Satz von der Periodicität der Kettenbruchentwickelung quadratischer Irrationalitäten erweitert der Verfasser auf folgende Weise. Aus den, wie üblich, durch die Punkte einer Ebene dargestellten complexen Zahlen möge ein System (S) unendlich vieler Zahlen so ausgewählt sein, dass die Summe, die Differenz, das Product je zweier Zahlen des Systems wieder Zahlen des Systems sind, dass ferner 0 und 1 dem System angehören, dass aber in keinem endlichen Teil der Ebene unendlich viele Zahlen des Systems liegen. Dann werde eine beliebige complexe Grösse x_0 in einen Kettenbruch entwickelt nach dem Schema:

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \; \ldots, \; x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \; \ldots,$$

wo die a irgend welche Zahlen aus (S) sind; es sei endlich $\frac{p_n}{q_n}$ der n^{te} Näherungswert und $x_n - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2}$. Falls dann θ_n für alle n kleiner als eine endliche Grösse ϱ bleibt, q_n dagegen

mit wachsendem n über alle Grenzen wächst, so convergirt der Kettenbruch stets und zwar gegen x_0; er bricht nur dann ab, wenn x_0 der Quotient zweier Zahlen aus (S) ist; er wird periodisch, wenn x einer quadratischen Gleichung genügt, deren Coefficienten Zahlen aus (S) sind.

Die vielen Voraussetzungen dieses Satzes sind erfüllt in zwei interessanten Beispielen.

1. (S) sei das System der ganzen complexen Zahlen $m+ni$, wo $i^2=-1$. Die ganze Ebene wird dann in Quadrate geteilt, und jedem Punkte x_λ zugeordnet der Mittelpunkt a_λ des Quadrats, welches x_λ enthält.

2. (S) sei das System der ganzen complexen Zahlen $m+n\varrho$, wo $\varrho^3=1$. Hier wird zu demselben Zwecke die ganze Ebene in reguläre Sechsecke zerlegt. R. M.

G. H. Halphen. Sur la convergence d'une fraction continue algébrique. C. R. CVI. 1326-1329.

In Fortsetzung früherer Untersuchungen (F. d. M. XVII. 1885. 367) hat der Verf. die Function:

$$f(x)=\frac{\sqrt{F(y)}-\sqrt{F(x)}}{y-x}$$

in einen Kettenbruch von der Form:

$$f(x)=a+\gamma x+\cfrac{(x-\xi)^2}{\alpha_1+\gamma_1 x+\cfrac{(x-\xi)^2}{\alpha_2+\gamma_2 x+\cdots}}$$

entwickelt. Hierbei bedeuten $F(x)$ ein Polynom 4ten oder 3ten Grades und ξ eine beliebige complexe Grösse. In dieser Allgemeinheit aber fand der Verfasser nur den Satz: In jedem noch so kleinen Teil der Ebene giebt es unendlich viele Punkte ξ, für welche der Kettenbruch convergirt, und unendlich viele andere, für welche er divergirt. Um zu genaueren Resultaten über die Convergenz und ihre Gleichmässigkeit, über Periodicität etc. zu gelangen, beschränkt der Verfasser sich auf den Fall,

wo die vier Wurzelwerte von $F(x) = 0$ Punkte einer Kreisperipherie sind (die reelle Axe ebenfalls als Kreis betrachtet), und wo ξ auch auf dieser Peripherie liegt. R. M.

H. GYLDÉN. Quelques remarques relativement à la représentation des nombres irrationnels au moyen des fractions continues. C. R. CVI. 1584-1587, 1777-1781.

Der Verfasser geht von dem Erfahrungssatz aus, dass bei der Entwickelung einer Irrationalzahl $u < 1$ in den Kettenbruch

$$u = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

die Quotienten a_x gewöhnlich nicht grosse Zahlen seien. Dies führt ihn zu der Frage, ob es für eine gegebene Zahl a eine Wahrscheinlichkeit giebt, sie als Quotienten anzutreffen. Hier fehlt durchaus eine nähere Begriffsbestimmung dieser Wahrscheinlichkeit; denn zu sagen, dass die Zahl u „zufällig" (par hasard) genommen sei, hat keinen hinreichend genauen Sinn. Es ist nicht ersichtlich, wie der Verfasser sich diesen Uebergang zur Grenze denkt, den man machen muss, wenn man den Begriff der Wahrscheinlichkeit auf unendlich viele und sogar nicht abzählbare Dinge ausdehnen will; ebensowenig, wenn gesagt wird: On a développé plusieurs nombres irrationnels pris occasionnellement (in Kettenbrüche). Dem Menschen ist es schlechterdings unmöglich, eine Irrationalzahl „zufällig" zu nehmen. Er muss sich an einer endlichen Anzahl von Ziffern in der dekadisch geschriebenen Zahl genügen lassen, was zur Folge hat, dass der Zufall nur bei der Wahl der ersten Ziffern spielen kann, während er später völlig ausgeschlossen ist durch die thatsächliche Wahl von lauter Nullen. Der Verfasser, welcher die von ihm gewählten „Irrationalzahlen" nicht anführt, teilt eine Tabelle mit, welche einerseits die theoretisch ausgerechneten, andererseits die wirklich erhaltenen Resultate kurz zusammenstellt, wobei sich eine grosse Uebereinstimmung zeigt.

Wenn scharfe, das Wort Zufall hier ersetzende Begriffe an die Spitze der Untersuchung gestellt würden, so würde sich ganz unzweifelhaft ergeben, dass die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer bestimmten Zahl unter den *a* ganz von der Wahl dieser Begriffe abhängt, genau so, wie man durch Umstellung der Summanden einer convergenten Reihe, deren absolute Werte aber eine divergirende Reihe bilden, jeden Wert darstellen kann, oder auch gar keinen. Dz.

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

ZÜGE. Zur Lehre von den Complexionen. Hoffmann Z. XIX. 16-19.

Es werden die Variationen an die Spitze gestellt und die Combinationen und Permutationen auf dieselben zurückgeführt, während gewöhnlich in den Lehrbüchern der umgekehrte Weg eingeschlagen wird. Lg.

D. ANDRÉ. Étude sur les permutations de deux espèces de lettres. Paris Soc. Phil. 85-42.

Der Verfasser knüpft seine Untersuchungen an die Permutation von α Buchstaben A und β Buchstaben B. Er nennt die Aufeinanderfolge von je zwei Buchstaben, wenn dieselben verschieden sind, eine Variation, wenn sie gleich sind, eine Permanenz, und untersucht die folgenden beiden Fragen:

1. Wie gross ist die Anzahl $P_{\alpha,\beta,\nu}$ der Permutationen, deren jede ν Variationen enthält?

2. Wie gross ist die Gesamtzahl $V_{\alpha,\beta}$ aller Variationen, welche in sämtlichen Permutationen vorkommen?

Er findet

$$P_{\alpha,\beta,2k+1} = 2\frac{(\alpha-1)!}{k!\,(\alpha-1-k)!}\frac{(\beta-1)!}{k!\,(\beta-1-k)!},$$

$$P_{\alpha,\beta,2k+2} = \frac{(\alpha-1)!\ (\beta-1)!\ (\alpha+\beta-2-2k)}{k!\,(k+1)!\,(\alpha-1-k)!\,(\beta-1-k)!},$$
$$V_{\alpha,\beta} = 2\,\frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}.$$

Da bei der Ableitung des letzten Satzes angenommen wurde, dass $\alpha > \beta$, so zeigt der Verfasser noch speciell, dass die Formeln gültig bleiben, auch wenn $\alpha = \beta$ wird. Ls.

WORONTZOFF. Sur un théorème de M. Weill. Nouv. Ann. (3) VII. 97-99.

Das Theorem, für welches der Verfasser einen elementaren Beweis giebt, ist das folgende:

$$C_h^1 - 3C_h^2 + 3^2C_h^3 - \ldots = \pm 2^{h-1},$$

wo C_h^n die Zahl der Combinationen von h Dingen zu je n bedeutet, und $h = 3m+1, 3m+2$ ist. Dabei wird das Zeichen präcisirt, und der Wert 0 für $h = 3m$ bestimmt. No.

PICQUET. Quelques théorèmes sur les nombres figurés et leur application à une question de probabilités. J. de Math. spéc. (3) II. 150-154, 172-176, 196-199.

Es sei $C_{m,p} = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}$, so bestehen die Formeln:

$$\Sigma(-1)^h C_{m,h}\quad C_{m-h,p} = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, m-p),$$
$$\Sigma(-1)^h C_{m-k-1}\, C_{m-h,p} = 0 \qquad (p < m-k),$$
$$\Sigma(-1)^h C_{m,h}\quad C^2_{m-h,p} = 0 \qquad (p < \tfrac{1}{2}m),$$

u. s. w. Endlich

$$m! = m^m - C_{m,1}(m-1)^m + C_{m,2}(m-2)^m - \cdots + (-1)^{m-1}C_{m,m-1}.$$

Diese letzte Formel, welche der Verf. als Uebungsaufgabe zum Beweise vorgelegt hatte, kommt, wie Hr. Catalan S. 236-237 schreibt, schon in Lacroix's Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, T. III. p. 26 vor. Lp.

F. R. J. Hervey. Solution of question 8461. Ed. Times XLIX. 91-93.

Es soll bestimmt werden, auf wie viele Arten n Verszeilen gereimt werden können, 1) falls keine Zeile ungereimt bleibt (φn), 2) falls die Beschränkung in 1) fortfällt (fn). Der Verfasser zeigt, wie die Zahlen φn und fn zu berechnen sind, und giebt die Tabelle der ausgerechneten Werte von $n = 3$ bis 14. Im letzteren Falle, dem des Sonnetts, ist $f = 190\,899\,322$, $\varphi = 24\,011\,157$. Lp.

A. Macfarlane. Problem in relationship. Edinb. Proc. XV. 116-117.

Die von Hrn. Kirkman gestellte Aufgabe lautet: Zwei Knaben Smith und Jones gleichen Alters sind beide Neffen von einander; wie viele gesetzliche Lösungen giebt es? Die Lösung illustrirt des Verfassers „Calculus of relationship" in Edinb. Proc. XI. S. 5 und 162. Cly. (Lp.)

Rusticus, A. Macfarlane, D. Biddle. Solution of question 9403. Ed. Times XLIX. 114-116.

Die zu lösende Aufgabe ist (vgl. den vorigen Bericht):

Baby Tom of baby Hugh
The nephew is and uncle too.
In how many ways can this be true? Lp.

C. Jordan. Sur la marche du cavalier. Palermo Rend. II. 59-68.

Es wird die Frage behandelt, welches die kleinste Anzahl der Züge ist, um einen Springer von einem gegebenen Feld des Schachbrettes nach einem bestimmten anderen Felde zu bringen.

Ls.

G. Platner. Sul numero delle maniere di ottenere una somma *n* o una somma non superiore ad *n* (*n* intiero, positivo) prendendo *r* termini della serie indefinita 1, 2, 3, 4, ... Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 690-695, 702-708.

In der ersten Arbeit werden die Formeln allgemein, nicht für bestimmte Werte von *n* abgeleitet für die Werte von *r* gleich 1, 2, 3, 4, 5, 6.

In dem zweiten Aufsatz werden die Formeln als Functionen von *n* ausgedrückt. Ls.

F. Clauss. Ueber magische Quadrate. Hoppe Arch. (2) VI. 424-436.

Ohne auf frühere Lösungen der Aufgabe Rücksicht zu nehmen, giebt der Verfasser sowohl für ein gerades wie für ein ungerades x die Verteilung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, x^2$ auf den Feldern eines Schachbretts an und erhärtet die Richtigkeit der durch gesetzmässige Vertauschungen erzielten Anordnungen. Weder die Notwendigkeit derselben, noch die Anzahl der Möglichkeiten wird untersucht. Lp.

R. W. D. Christie. Solution of question 9091. Ed. Times XLVIII. 201-202.

R. W. D. Christie. Solution of question 9278. Ed. Times XLVIII. 203-204.

Eine Lösung für die Aufgabe, die ersten n^2 Zahlen zu einem magischen Quadrate anzuordnen, ohne dass frühere Lösungen berücksichtigt werden. Lp.

L. Chambeyron. Théorie des carrés magiques. Paris. 29 S.

J. Venn. The logic of chance. 3rd ed. rewritten and enlarged. London. 530 S. 8°.

OLTRAMARE. Essai sur le hazard. Genf. Burkhardt. 26 S.

J. BERTRAND. La théorie des chances. Nouv. Ann. (3) VII. 553-588.

Es ist dies die Ankündigung des bei Gauthier-Villars & Fils 1889 erschienenen, Calcul des probabilités betitelten Werkes von Bertrand durch Rouché, weniger eine Kritik als eine Analyse des Inhalts, durch welche Rouché glaubt, auch denjenigen Lesern, welchen die Wahrscheinlichkeitsrechnung fremd ist, einen Ueberblick der Grundsätze dieser Theorie und ihrer wichtigsten Anwendungen geben zu können. Ref. ist der Meinung, dass dieser Zweck schwerlich erreicht worden ist, dass aber bei denjenigen, welche sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt haben, durch diese Zusammenstellung der Wunsch wach gerufen wird, das Werk von Bertrand genauer kennen zu lernen.

Ls.

FRITZ HOFMANN. Notiz über zwei Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Schlömilch Z. XXXIII. 375-381.

„Der erste Satz, auf welchen sich die Notiz des Verf. bezieht, lautet in der Einleitung zur Théorie analytique des probabilités von Laplace“:

„Es sei das Eintreffen eines Ereignisses E constatirt worden, das verschiedene Ursachen A, B, C, ... haben konnte. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Ursache A das Ereignis herbeigeführt hat, verhält sich dann zur Wahrscheinlichkeit, dass B das Ereignis herbeigeführt hat, wie die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E, wenn die Ursache A sicher ist, sich verhält zur Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E, wenn die Ursache B sicher ist.“ Zu diesem Satz bringt der Verfasser einen ganz elementaren und sehr anschaulichen Beweis. Für den zweiten Satz: über die Verteilung der weissen und schwarzen Farbe auf den unendlich vielen Kugeln in einer Urne, nachdem man nach unendlich oftmaliger Wiederholung der Versuche das Verhältnis $a:b$ gefunden hat, führt der

Verfasser aus der Chemie ein populäres Beispiel an, durch dessen Betrachtung eine klare Vorstellung von dem mathematischen Satze gewonnen wird. Ls.

Em. Czuber. Zum Gesetz der grossen Zahlen. Prag. Dominicus. 41 S.

Bei den Ereignissen, welche von bekannten Ursachen abhängen, lässt sich die Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens a priori berechnen, und die Ergebnisse einer erst vorzunehmenden Beobachtungsweise lassen sich in dem Sinne vorher bestimmen, dass man die Grenzen, innerhalb welcher diese Ergebnisse mit gegebener Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind, berechnen kann, oder die Wahrscheinlichkeit, mit welcher sie innerhalb gegebener Grenzen fallen werden. Die Vergleichung des wirklichen Erfolges, nachdem die Versuche ausgeführt sind, mit der Vorhersagung der Theorie bietet eine auch dem Laien verständliche Demonstration des Gesetzes der grossen Zahlen. Fällt der Erfolg aber weit über die mit genügend grosser Wahrscheinlichkeit zu erwartenden Grenzen hinaus, dann muss untersucht werden, ob die wirklichen Ursachen mit den vorausgesetzten übereinstimmten, oder ob auch unbekannte Ursachen mitgewirkt haben.

Das Beobachtungsmaterial, welches der Verf. in der vorliegenden Schrift mitteilt und untersucht, besteht aus den Ziehungsergebnissen der Lotterien in Prag und Brünn seit ihrem Beginn 1754 resp. 1771 bis zum Jahre 1886. Es handelt sich um Lotterien von 90 Nummern, von denen bei jeder Ziehung 5 Nummern gezogen werden.

Die Untersuchungen beziehen sich

1. auf die Zusammensetzung der Ziehungen aus ein- und zweizifferigen Nummern,

2. auf die Anordnung der Nummern innerhalb einer Ziehung,

3. auf die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass in i aufeinanderfolgenden Ziehungen sämtliche Nummern der Lotterie erschöpft werden,

4. auf wiederholte Nummern, Amben, Ternen,

5. auf die Gesamtwiederholungszahlen der einzelnen Nummern,

6. auf die Wiederholungszahlen der einzelnen Nummern, geordnet nach der ersten, zweiten, bis fünften Stelle, an welcher sie erschienen sind.

Die Ergebnisse der Beobachtung stimmen sehr gut mit den aus der Rechnung hervorgehenden Resultaten überein.

Ls.

W. G. Imschenetzky. Elementare Ableitung des Gesetzes der grossen Zahlen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Chark. Ges. (2) I. 1-6. (Russisch.)

Herr Tschebyscheff hat im Jahre 1867 (Moskauer Mathematische Sammlung Bd. II) einen elementaren Beweis für das Theorem über die mittleren Grössen gegeben; in der vorstehenden Abhandlung wird dieser Beweis vereinfacht und zur Ableitung des Gesetzes der grossen Zahlen angewandt. Wi.

P. S. Nasimoff. Zum Newton'schen Binome. (Aus den Vorlesungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.) Warsch. Univ. Nachr. 1888. 9. (Russisch.)

Verschiedene Eigenschaften des Newton'schen Binoms, welche zum Beweise des Theorems von Bernoulli dienen, werden abgeleitet. Wi.

Voyer. Note sur un problème du calcul des probabilités. C. R. CVI. 256-257.

Eine Urne enthält a weisse und $m-a$ schwarze Kugeln. Ein Spieler zieht Kugeln, stets je eine, bis er p weisse Kugeln gezogen hat. Er bekommt für jede gezogene Kugel einen Franken. Wie gross ist die mathematische Hoffnung der zu erhaltenden Summe?

Erster Fall. Nach jeder Ziehung wird die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt. Die Lösung ist $p\frac{m}{a}$.

Zweiter Fall. Die gezogene Kugel wird nicht in die Urne zurückgelegt. Die Lösung ist $p\frac{m+1}{a+1}$. Ls.

Sydney Lupton. Michell's problem. Nature XXXVIII. 272-274.

Die von Michell in den Phil. Trans. 1767, S. 243 zuerst aufgestellte und nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung beantwortete Frage nach der Ursache der ungleichförmigen Verteilung der Sterne am Himmel oder der Zusammengehörigkeit einzelner zu Systemen ist wiederholt behandelt worden, u. a. von Forbes (Phil. Mag. 1850) und Struve. Die Resultate stimmen nicht überein. Der Verfasser sucht den Grund der Abweichung in den willkürlichen Annahmen, welche jeder Autor machen muss, um die Aufgabe einer mathematischen Bearbeitung zugänglich zu machen. Ueber den Gegenstand äussert sich Hr. Bertrand (S. 171 des Calcul des probabilités) ungefähr ebenso, jedoch in klarerer Weise. Lp.

J. Kleiber. Michell's problem. Nature XXXVIII. 342.

Verweis auf den Artikel in Phil. Mag. (5) XXIV (F. d. M. XVIII. 1887. 207) und Versuch, die Ansichten des Hrn. Lupton zu widerlegen. Lp.

S. Lupton. Michell's problem. Nature XXXVIII. 414.

Erwiderung auf die vorige Notiz. Lp.

E. Rouché. Sur un problème relatif à la durée du jeu. C. R. CVI. 47-49.

J. Bertrand. Démonstration du théorème précédent. C. R. CVI. 49-51.

Peter und Paul spielen gegen einander so lange, bis einer von beiden ruinirt ist. Die Vermögen, die sie bei Beginn des Spieles besitzen, werden mit A und B bezeichnet, die Einsätze

bei jeder Partie mit a und b, die Wahrscheinlichkeiten, eine Partie zu gewinnen, mit p und q, wo $p+q=1$.

Johann, der nicht am Spiel teilnimmt, soll für jede Partie, die gespielt wird, 1 Franc erhalten. Wie gross ist die mathematische Hoffnung V dieser Zusage?

Vorausgesetzt wird, dass das Spiel nicht nach den Regeln der Billigkeit eingerichtet ist, sondern dass $(a+b)p-a \lesssim 0$.

Angenommen, diese Differenz sei positiv, so ist der Vorteil auf Seiten von Peter, und wenn P die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass Peter den Paul ruinirt, dann findet Rouché

$$V=\frac{(A+B)\,P-A}{(a+b)\;p-a}.$$

Zu dem gleichen Ergebnis kommt Bertrand auf einem etwas andern Wege.

Es wird noch besonders hervorgehoben, dass die Lösung keine Gültigkeit hat, wenn das Spiel nach den Regeln der Billigkeit eingerichtet ist. Ls.

E. Rouché. Sur la durée du jeu. C. R. CVI. 253-256, 338-340.

Delannoy. Sur la durée du jeu. S. M. F. Bull. XVI. 124-128.

E. Rouché. Observations en réponse à une Note de M. Delannoy. S. M. F. Bull. XVI. 149-150.

Es wird angenommen, dass Peter und Paul, die gegen einander spielen, gleiche Wahrscheinlichkeit des Gewinnens haben; jeder von beiden besitzt bei Beginn des Spiels n Francs, bei jeder Partie zahlt der Verlierende dem Gewinner 1 Franc, und das Spiel soll so lange dauern, bis einer der Spieler ruinirt ist. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit P, dass dieser Fall nach einer angegebenen Anzahl von Partien eintritt.

In dem ersten Aufsatz giebt Rouché eine strenge Lösung, und in dem zweiten formt er dieselbe um in eine für die numerische Rechnung geeignete Formel.

Delannoy behandelt das Problem in anderer Weise und

kommt zu einem Resultat, welches von der ungeformten, für die numerische Rechnung bestimmten Formel Rouché's abweicht.

In seiner Antwort darauf nimmt Rouché sein Verfahren und seine Formeln gegen Delannoy in Schutz, behauptet auch die Richtigkeit der von ihm gegebenen Hauptformel, giebt aber zu, dass er sich bei der Umformung im letzten Stadium der Rechnung bei der Division geirrt habe. Ls.

J. Bertrand. Sur l'indétermination d'un problème résolu par Poisson. C. R. CVI. 636-638.

Bekanntlich hat Buffon, um das St. Petersburger Problem experimentell zu prüfen, eine Münze 4040-mal in die Höhe geworfen, wobei er 2048-mal die Bildfläche erhielt. Poisson hat die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass die Münze einen Fehler hatte, und dieselbe gleich 0,81043 gefunden. Dieses Resultat ist dem Verfasser nach zwei Richtungen sehr auffallend, die erste Ziffer 8 ist sehr gross, und er versteht nicht, wie bei einer solchen Aufgabe die Lösung bis zu einem Hunderttausendtel gehen kann. Er gelangt zu dem Schluss, dass die Rechnung, welche Poisson gemacht hat, durchaus nicht auf den Versuch, den Buffon anstellte, angewandt werden kann. Ls.

A. Auric. Problème. Nouv. Ann. (3) VII. 198-199.

Es drehen sich n Zeiger um dieselbe Axe in gleicher Richtung, jedoch mit verschiedenen Geschwindigkeiten; die des nächsten Zeigers ist immer p-mal so gross, wie die des vorhergehenden.

Es handelt sich darum, eine Position der n Zeiger zu finden, welche eine circuläre Permutation zulässt. Ls.

J. Bertrand. Probabilité du tir à la cible. C. R. CVI. 232-234.

J. Bertrand. Seconde note sur la probabilité du tir à la cible. C. R. CVI. 387-391.

Menabrea. Remarque relative aux travaux sur la balistique de M. Siacci. C. R. CVI. 391.

J. Bertrand. Troisième note sur la probabilité du tir à la cible. C. R. CVI. 521-522.

Gius. Jung. A propos de deux récentes communications de M. J. Bertrand „Sur la probabilité du tir à la cible." C. R. CVI. 1001-1003.

J. Bertrand. Note sur le tir à la cible. C. R. CVII. 205-207.

Man hat hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit beim Scheibenschiessen einen Satz gelten lassen, den Bertrand nicht für richtig hält. Der Satz heisst: Wenn man durch das Centrum einer Scheibe eine horizontale und eine verticale Axe legt, um auf dieselben die Coordinaten des getroffenen Punktes zu beziehen, und die Wahrscheinlichkeit, dass die Abscisse zwischen x und $(x+dx)$ enthalten ist, mit $\varphi(x)dx$, entsprechend die Ordinate zwischen y und $(y+dy)$ mit $\psi(y)dy$ bezeichnet, so wird

$$\varphi(x)\psi(y)dx\,dy$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der getroffene Punkt in dem Rechteck $dx\,dy$ liegt, dessen Ordinaten x und y sind.

Die hier gemachte Anwendung des Satzes von dem Product der Wahrscheinlichkeit erklärt Bertrand für unrichtig, weil die Wahrscheinlichkeiten φ und ψ nicht von einander unabhängig sind, und man $\varphi(x)dx$ mit einem Factor multipliciren muss, der eine Function von x und y ist.

Damit werden dann die Formeln von Poisson in dem „Mémorial d'Artillerie" und die Formeln von Bravais über die Lage eines Punktes hinfällig. Des weiteren beschäftigen sich diese Aufsätze mit der Frage, was an die Stelle jener Formeln zu setzen ist, wobei auf die Arbeiten von General Putz und Major Siacci Bezug genommen wird. Endlich wird die grosse Uebereinstimmung der Formeln mit den Ergebnissen von 1000 Schiessversuchen mit 10 Flinten desselben Modells auf 200 m Entfernung nachgewiesen. Ls.

PUTZ. Mémoire sur les principes fondamentaux de l'application du calcul des probabilités aux questions d'artillerie. Nancy. 60 S.

J. BERTRAND. Sur l'association des électeurs par le sort. C. R. CVI. 17-19.

Es ist wiederholt betont worden, dass bei der Vereinigung der Wähler eines Landes durch das Los zu Wahlcollegien die Gewählten keineswegs die verschiedenen Meinungen in ihren wahren Verhältnissen zur Darstellung bringen würden, dass vielmehr die vorherrschende Partei im höchsten Masse dadurch begünstigt würde.

Bertrand demonstrirt die Richtigkeit dieser Behauptung und weist an einem Beispiel nach, dass bei $5\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}$ Millionen Wählern, von denen 500 Abgeordnete gewählt werden sollen, die Wahrscheinlichkeit, dass die Minorität auch nur einen einzigen ihrer Candidaten durchbringt, kleiner ist als die Wahrscheinlichkeit, nach einander zwei Quinen in der Lotterie zu gewinnen, falls die Wähler durch das Los in Gruppen, deren Bildung er angiebt, gebracht werden. Ls.

J. BERTRAND. Sur l'application du calcul des probabilités à la théorie des jugements. Paris Soc. Phil. 69-76.

Der Verfasser erklärt sich gegen die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die richterliche Beurteilung der Straffälle und die Möglichkeit der Vergleichung eines dabei begangenen Irrtums mit dem Ziehen weisser oder schwarzer Kugeln aus einer Urne, und wendet sich mit grosser Schärfe gegen die von Condorcet, Laplace, Poisson und Arago in dieser Hinsicht aufgestellten Behauptungen. Ls.

E. DORMOY. L'écarté. Traité mathématique du jeu de l'écarté. Paris. 8°.

E. Czuber. Mittelwerte, die Krümmung ebener Curven und krummer Flächen betreffend. Hoppe Arch. (2) VI. 294-304.

Der Verfasser entwickelt für ebene Curven den mittleren Krümmungsradius und die mittlere Krümmung eines Bogens. Bei den krummen Flächen werden unterschieden die Schnitte:

1. durch eine Tangente der Fläche,
2. durch eine Normale derselben,
3. durch einen Punkt der Fläche, und für jede dieser Klassen wird der mittlere Krümmungshalbmesser festgestellt, ebenso wie die mittlere Krümmung, und schliesslich wird auch die mittlere Krümmung und der mittlere Krümmungsradius der Fläche bestimmt. Ls.

De Wachter, A. Martin. Solution of question 9271. Ed. Times XLIX. 24.

Eine gegebene Strecke wird in vier Stücke beliebig geteilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die vier Segmente die Seiten eines Vierecks bilden, ist gleich $\frac{1}{2}$. Lp.

J. Neuberg, De Wachter, P. H. Schoute. Solutions of question 9423. Ed. Times XLIX. 69-70.

Zwei Stäbe von den Längen a und b werden willkürlich in je zwei Stücke zerbrochen. Die Wahrscheinlichkeit w, dass ein Stück des ersten und eins des zweiten Stabes zusammen eine kleinere Gesamtlänge als c haben, ist:

1) $w = c^2/2ab$, wenn $b > a > c$;
2) $w = (2c-a)/2b$, „ $b > c > a$;
3) $w = 1-(a+b-c)^2/2ab$, „ $c > b > a$.

Lp.

T. C. Simmons, P. H. Schoute. Solution of question 9015. Ed. Times XLVIII. 74-75.

Die Längen dreier Strecken gehen nicht über a, b, c hinaus;

die Wahrscheinlichkeit, dass sie die Seiten eines Dreiecks bilden, ist $(a < b < c)$:

$$W = \frac{1}{6abc}\left\{6abc - a^3 - b^3 - c^3 + (b-a)^3 + (c-a)^3 + (c-b)^3\right\}.$$

Lp.

De Wachter, J. Beyens. Solution of question 9350. Ed. Times XLIX. 87.

Ein Punkt wird beliebig im Innern eines Dreiecks angenommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass seine Abstände von den Seiten eines Dreiecks selber die Seiten eines neuen Dreiecks bilden können, ist $2abc/\{(b+c)(c+a)(a+b)\}$. Lp.

W. S. B. Woolhouse. Solution of questions 2396, 6931, 8935. Ed. Times XLIX. 41-46.

$ABCD$ sei ein beliebiges convexes Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in E schneiden; man setze $2AE.EC:AC^2 = \varrho$, $2BE.ED:BD^2 = \varrho'$. Fünf Punkte werden im Innern des Vierecks als Ecken eines Fünfecks F_5 angenommen. Die Wahrscheinlichkeit, 1) dass F_5 nur concave innere Winkel hat, ist $\frac{1}{36}(11+5\varrho\varrho')$; 2) dass F_5 eine einzige einspringende Ecke hat, ist $\frac{5}{9}$; 3) dass zwei einspringende Ecken vorhanden sind, ist $\frac{5}{36}(1-\varrho\varrho')$.

Lp.

C. B. Clarke. Solution of question 4251. Ed. Times XLIX. 61-62.

Sind A, B, C drei Kreise, von denen B innerhalb A, C innerhalb B liegt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt von A innerhalb C liegt, gleich $\frac{1}{4}$. Lp.

D. Biddle, W. S. B. Woolhouse. Solution of question 9516. Ed. Times XLIX.

Erörterung über den Sinn der „Willkürlichkeit“ bei der geometrischen Wahrscheinlichkeit über die Annahme eines Kreises nnerhalb eines anderen. Lp.

F. Y. EDGEWORTH. On a new method of reducing observations relating to several quantities. Phil. Mag. (5) XXV. 184-191.

Da manche Einwände gegen den von Hrn. Edgeworth vorgeschlagenen Ersatz für die Methode der kleinsten Quadrate von Hrn. Turner erhoben sind (s. F. d. M. XIX. 1887. 216), so fasst Hr. Edgeworth in dem gegenwärtigen Aufsatz seine Regel in einer Form ab, auf welche die Einwände nicht mehr passen, und lässt sich abermals über den Nutzen seiner vorgeschlagenen Methode aus als einen Ersatz oder doch ein Hülfsmittel für die gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate.

Gbs. (Lp.)

R. H. SMITH. True average of observations. Nature XXXVII. 464.

Statt des arithmetischen Mittels schlägt der Verf. folgendes Verfahren vor. Man schliesse zunächst stark abweichende Beobachtungen aus und setze eine obere und untere Grenze fest. Es seien $x_1, x_2, x_3, \dots$ die Ueberschüsse der verschiedenen Masszahlen über die untere Grenze, x_0 der Ueberschuss des wahrscheinlichsten Wertes. Man gebe jedem x das Gewicht

$$1-\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^2$$

und nehme das Mittel der mit diesem Gewichte behafteten x, so folgt

$$x_0=\frac{2x\Sigma x^2-\Sigma x^3}{2x_0\Sigma x-\Sigma x^2},$$

eine quadratische Gleichung für x_0 mit der Wurzel

$$x_0=\frac{3}{4}\frac{\Sigma x^2}{\Sigma x}\left\{1+\sqrt{1-\frac{8}{9}\frac{\Sigma x\Sigma x^3}{(\Sigma x^2)^2}}\right\}.$$

Lp.

J. BERTRAND. Sur la loi de probabilité des erreurs d'observation. C. R. CVI. 153-156.

F. Tisserand. Remarque à l'occasion d'une communication de M. J. Bertrand. C. R. CVI. 231-232.

Das Gauss'sche Fehlergesetz ist das einzige, aus welchem folgt, dass aus verschiedenen unter gleichen Verhältnissen gemachten unmittelbaren Beobachtungen der mittlere Wert der wahrscheinlichste ist. Der Verf. giebt hierzu weitere Erläuterungen. Ls.

J. A. Kleyber. Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsreihen. Kasan. Ges. VI. 148-239. (Russisch.)

Herr Schiaparelli hat in seiner Abhandlung: „Sul modo di ricavare la vera espressione delle leggi della natura dalle curve empiriche" (Effemeridi Astronomiche di Milano. 1867) eine neue Methode der Ausgleichung der Beobachtungsreihen auseinandergesetzt. Nach dieser Methode wird in dem allgemeinen Falle, welcher zuerst im vorliegenden Aufsatze betrachtet wird, der Wert y_0 irgend einer Function y von x für $x = x_0$ als eine lineare Function der beobachteten Werte $y_1, y_2, \dots, y_n$ dieser Function für die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Variable x dargestellt:

$$y_0 = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_m y_m;$$

die Coefficienten a_i werden unter der Bedingung erhalten, dass der Wert y_0 das grösste Gewicht hat. Wenn wir jetzt $y_1, y_2, \dots, y_m$ durch y_0 mit Hülfe der Taylor'schen Reihe ausdrücken und dabei nur die n ersten Differentialquotienten behalten, so bekommen wir nach der Anwendung der bekannten Methode der Maxima und Minima die gesuchte Formel. In dem Falle dass die Werte y_i ein gleiches Gewicht haben und den äquidistanten Werten von x entsprechen, bekommen wir die Formeln des Herrn Schiaparelli. Der vorliegende Aufsatz hat zum Zweck sowohl eine Verallgemeinerung der Resultate des Herrn Schiaparelli, als auch eine umständliche Anwendung seiner Methode auf die Ausgleichung der Derivirten, die Auffindung der Coefficienten der empirischen Formeln, die Integration und verschiedene andere für die Praxis der Meteorologie sehr wichtige Fragen.

In einem Anhange werden die Eigenschaften der Determi-

nanten von der Form

$$\begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{02} & 0 & \dots \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{13} & \dots \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 & \dots \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{33} & \dots \end{vmatrix}$$

betrachtet, die im Aufsatze eine Anwendung finden. Wi.

J. Bertrand. Sur la détermination de la précision d'un système de mesures. C. R. CVI. 440-443.

Wenn eine Grösse sehr häufig gemessen worden, so schliesst man aus der grösseren oder geringeren Uebereinstimmung der Resultate auf die Güte des Instruments und auf die Geschicklichkeit des Beobachters. Setzt man die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers z proportional dem Ausdruck $e^{-k^2z^2}$, so misst die Constante k die Genauigkeit.

Nach Gauss hat man die Gleichung

$$\frac{1}{2k^2} = \frac{S_2}{n},$$

wo S_2 die Summe der Quadrate der Fehler und n die Anzahl der Messungen bezeichnet.

Bertrand weist darauf hin, dass man k auch in anderer Weise finden kann, und dass keineswegs aus der Bestimmung

$$\frac{1}{2k^2} = \frac{S_2}{n}$$

gefolgert werden darf, dass man immer am besten thut, diesen Wert zu adoptiren; denn der wahrscheinlichste Wert einer Grösse sei keineswegs unter allen Umständen auch der plausibelste.

Dies wird dann weiter ausgeführt. Ls.

J. Bertrand. Sur la rigueur d'une démonstration de Gauss. C. R. CVI. 563-565.

Der Verfasser weist darauf hin, dass Gauss selbst das von ihm 1809 veröffentlichte Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeiten, welches von allen Beobachtern angenommen worden, und be-

ständig durch seine Uebereinstimmung mit der Erfahrung bestätigt wird, später als streng richtig nicht anerkannt habe. Gauss habe zwei Abhandlungen geschrieben, um sich gewissermassen von diesem Gesetz frei zu machen, indem er die aus demselben abgeleiteten Resultate unabhängig von dem Gesetz beweist. Bertrand glaubt die Erklärung dafür gefunden zu haben. Die Gauss'sche Beweisführung gründet sich auf das Postulat, dass der Mittelwert aus den Resultaten einer beliebigen Anzahl von Messungen der wahrscheinlichste Wert sei, den man aus diesen Messungen ableiten kann. Der Verfasser nimmt nun keineswegs an, dass die Unmöglichkeit, diesen Satz zu beweisen, Gauss bestimmt habe; er will auf ein anderes Bedenken aufmerksam machen. Wenn Δ der begangene Fehler ist, so bezeichnet Gauss ohne weiteres durch $\varphi(\Delta)$ die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers. Die Wahrscheinlichkeit hängt allerdings von der Grösse des Fehlers ab, aber nicht minder auch von der gemessenen Grösse. Wenn man das beachtet, und Bertrand giebt dafür Beispiele an, so wird die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Δ gleich $\varphi(X, \Delta)$, wo X die gemessene Grösse ist; dann ist aber die Beweisführung nicht möglich.

Auch zeigt Bertrand an einem Beispiel, dass die Schlussfolgerung wirklich nicht streng, sondern nur näherungsweise richtig ist. Ls.

J. Bertrand. Sur la combinaison des mesures d'une même grandeur. C. R. CVI. 701-704.

Es liegen verschiedene Messungen derselben Grösse vor, aus denen die constanten Fehler eliminirt sind; alle Beobachtungen verdienen gleiches Vertrauen, und man hat den Mittelwert der Messungen als den besten Wert acceptirt, auch gefunden, dass der zu befürchtende Fehler sehr klein ist. Unter diesen Verhältnissen wird man geneigt sein, die Beobachtungen nicht als gleich vertrauenswürdig anzusehen; es erscheint natürlich, diejenigen, welche sich weiter vom Mittelwert entfernen, für minder gut zu halten, sie vielleicht ganz vernachlässigen zu wollen.

Der Verfasser untersucht die Folgen, welche entstehen, wenn man Beobachtungen, die man für minder vertrauenswert hält, ausscheidet, und kommt zu dem Resultat, dass man es thun darf, wenn dadurch das Quadrat des aus der ganzen Beobachtungsreihe abzuleitenden mittleren Fehlers verringert wird.

Ls.

H. Faye. Sur certains points de la théorie des erreurs accidentelles. C. R. CVI. 783-786.

Dies ist ein Schreiben von Hrn. Faye an den Sekretär der Akademie, in welchem er sich über die Gründe ausspricht, die ihn zu der Annahme veranlassen, dass das arithmetische Mittel keineswegs unter allen Umständen das wahrscheinlichste Resultat giebt. Er betrachtet den Satz nur als näherungsweise zutreffend, will aber trotzdem abweichende Beobachtungen nur dann ausschliessen, wenn sie sofort, nachdem sie angestellt, und bevor sie irgend einer Rechnung unterworfen worden, als zweifelhaft erkannt wurden.

Ls.

J. Bertrand. Sur la valeur probable des erreurs les plus petites dans une série d'observations. C. R. CVI. 786-788.

Der Verfasser ist der Meinung, dass man den Mittelwerten eine zu grosse Bedeutung beigelegt hat. Wenn man im Stande wäre, die besten Messungen einer wiederholt gemessenen Grösse zu entdecken, so würden diese den Mittelwerten weit vorzuziehen sein.

Ls.

J. Bertrand. Sur l'évaluation a posteriori de la confiance méritée par la moyenne d'une série de mesures. C. R. CVI. 887-891.

Der Verfasser argumentirt folgendermassen: Wenn die Uebereinstimmung der Beobachtungen besonderes Vertrauen einflösst, so liegt die Ursache darin, dass man daraus mit vollem Recht auf die Güte der Instrumente und die Geschicklichkeit

des Beobachters schliesst. Man habe einen Winkel dreimal gemessen und dreimal dasselbe Resultat bekommen bis auf 0,1 Secunde, so dürfe man das Instrument für vorzüglich und den Beobachter für sehr geschickt erklären. Gauss und Bessel haben den Beobachtungen gegenüber die Genauigkeit als Unbekannte betrachtet. Der zu befürchtende Fehler sei proportional der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den verschiedenen gefundenen Werten und ihrem arithmetischen Mittel. Sind die gefundenen Werte gleich, so erklärt die Formel das Instrument für vollkommen. Der Verfasser will ein anderes Problem lösen, und stellt sich auf einen andern Standpunkt. Das Instrument sei bekannt; vorausgegangene Versuche und sich täglich wiederholende Erfahrungen lassen keine Unsicherheit zu über seinen Genauigkeitsgrad und auch nicht über die Geschicklichkeit des Beobachters. Daran kann nichts durch das Ergebnis von 5 oder 6 neuen Messungen geändert werden. Die Genauigkeit ist als gegeben zu betrachten.

Welches ist der mittlere zu befürchtende Fehler, und wie hängt er von der Uebereinstimmung der Resultate ab?

Es wird gezeigt, dass eine solche Abhängigkeit gar nicht stattfindet. Ls.

E. Carvallo. Sur l'application de la méthode des moindres carrés. C. R. CVI. 924-927.

Die Bemerkungen beziehen sich auf den Fall, wo die Genauigkeit der Beobachtung als variabel betrachtet werden muss, und schliessen sich an Formeln an, welche der Verfasser schon früher veröffentlicht hat. Ls.

J. Bertrand. Sur l'erreur à craindre dans l'évaluation des trois angles d'un triangle. C. R. CVI. 967-970.

Die drei Winkel eines Dreiecks sind gemessen nach Methoden, die für jeden derselben den gleichen Fehler befürchten lassen. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers z sei gleich

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2} dz.$$

Man hat für die drei Winkel gefunden $A+B+C = 180^\circ + \alpha$ und muss also jeden Winkel um $\frac{\alpha}{3}$ verkleinern. Das Quadrat des zu befürchtenden Fehlers ist $\frac{1}{3k^2}$.

Der Verfasser fragt, ob das Vertrauen, welches man den Beobachtungen schenken kann, von dem absoluten Wert von α abhängig ist. Er unterscheidet:

1. Die Instrumente sind unbekannt oder wenig bekannt; dann ist die Winkelsumme ein schätzbares Zeichen, zuweilen das einzige der Güte der Operation.

2. Das Instrument ist gut bekannt, und der Wert von k steht fest; dann ändert die Grösse α nichts an der Schätzung des zu befürchtenden Fehlers. Ls.

J. Bertrand. Sur la méthode des moindres carrés. C. R. CVI. 1115-1118.

Der Verfasser zeigt, worin der Fortschritt besteht, den Gauss in seiner Beweisführung 1821 gemacht, gegenüber derjenigen von 1809, welche ohne Gegenrede von Laplace angenommen worden war. Ls.

J. Bertrand. Sur la précision d'un système de mesures. C. R. CVI. 1195-1198.

J. Bertrand. Sur les conséquences de l'égalité entre la valeur vraie d'un polynôme et sa valeur moyenne. C. R. CVI. 1259-1263.

E. Guyon. Note relative à l'expression de l'erreur probable d'un système d'observations. C. R. CVI. 1282-1285.

Ls.

J. Bertrand. Note sur l'introduction des probabilités moyennes dans l'interprétation des résultats de la statistique. C. R. CVI. 1311-1314.

Wenn man bei den statistischen Beobachtungen die Ver-

hältnisse in Betracht zieht, so pflegt man sie mit den Ziehungen von weissen und schwarzen Kugeln aus einer Urne zu vergleichen. Ein genaueres Studium der Tabellen zeigt jedoch, dass die Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Fall andere sind bei dem Ziehen von Kugeln als bei den statistischen Erhebungen. Soll man deshalb darauf verzichten, diese Resultate als den Ziehungen von Kugeln analog zu betrachten?

Wenn es sich z. B. um die jährlichen Sterbefälle für Personen von 40 Jahren handelt, so könnte man, wie der Verfasser meint, an verschieden zusammengesetzte Urnen denken, verschieden für Männer und für Frauen, für die ländliche und für die städtische Bevölkerung, verschieden endlich nach Berufsarten und Lebensweise; dann würde sich, einerlei wie gross die Anzahl und wie auch die Zusammensetzung der Urnen ist, eine mittlere Wahrscheinlichkeit ergeben, und eine unveränderliche Beziehung zwischen der Zahl der schwarzen Kugeln, die aus den verschiedenen Urnen hervorgegangen sind, und der Gesamtzahl der Ziehungen. Der Verf. teilt mit, dass er das folgende Theorem erwiesen habe.

Einerlei wie gross auch die Zahl der Urnen und ihre Zusammensetzung ist, so bleibt doch das Gesetz der Abweichungen dasselbe wie bei einer einzigen Urne von gegebener Zusammensetzung; aber diese Urne ist nicht diejenige, welche die mittlere Wahrscheinlichkeit giebt. Will man also die Resultate der Statistik mit denen der Rechnung vergleichen, so muss man zwei verschiedene Urnen annehmen; die mittleren Resultate entsprechen den Ziehungen aus der ersten, die Abweichungen denen aus der zweiten Urne. Ls.

F. Crotti. Sulla compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici. Milano. Hoepli. IV und 260 S. 32°.

H. Stadthagen. Ueber die Genauigkeit logarithmischer Berechnungen. Berlin. J. Dümmler. 82 S.

Der Verfasser bemerkt, dass es bei den heutigen Anforderungen an die Genauigkeit astronomischer Resultate unumgänglich geboten sei, jeden der dabei ins Spiel kommenden Factoren, also auch die angewandten Logarithmen, auf ihre Genauigkeit zu prüfen. Bremiker habe das Verdienst, im Jahre 1852 zuerst eine Theorie der Logarithmenfehler gegeben zu haben; seine Schrift sei indes wegen ihrer grossen Fülle von Druckfehlern, sowie ihrer allzugrossen Knappheit der Darstellung für das Studium wenig geeignet. Auch sei es wünschenswert, in den theoretischen Entwickelungen etwas weiter zu gehen, als es Bremiker gethan hat.

Es handelt sich um die Fehler, welche durch die Abkürzung der Logarithmen auf eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen entstehen, und es wird zunächst der Nachweis geführt, dass die Grundbedingungen einer Fehlertheorie bei den logarithmischen Abkürzungsfehlern erfüllt sind. Auf Einzelheiten können wir hier nicht eingehen; wir wollen nur noch hinzufügen, dass der Verfasser selbst darauf hinweist, dass die Abweichung zwischen den Ergebnissen der Praxis und der Theorie noch weitere Untersuchungen wünschenswert macht. Ls.

W. Gosiewski. Ueber die Wahrscheinlichkeit zufälliger Fehler. Prace mat.-fiz. I. 1-4. (Polnisch.)

Es wird die Annahme gemacht, dass der Begriff eines zufälligen Fehlers mit der Ausführung von mindestens zwei Schätzungen der Messungen a und b einer Grösse x untrennbar ist, dass also die Wahrscheinlichkeit p eines solchen Fehlers eine Function zweier Grössen $x-a$ und $x-b$ ist. Der Verfasser bestimmt das Maximum dieser Function und gelangt in weiterer Entwickelung seines Gedankens zu dem Gauss'schen Fehlergesetz, hat aber später (Prace mat.-fiz. II., Referat im nächsten Jahrg.) seine Beweisführung als nicht ganz zulässig erkannt und durch eine andere ersetzt. Dn.

W. Gosiewski. Ueber den Zusammenhang zwischen dem Princip der kleinsten Wirkung und dem wahrscheinlichsten System. Warschau. Prace mat.-fiz. I. 97-110. (Polnisch.)

Das ganze Weltsystem betrachtet der Verfasser als ein zusammengesetztes, beim Zusammentreffen zweier unabhängigen Systeme entstehendes Ereignis, nämlich 1. des Systems s der Elemente (System allgemeiner Coordinaten) $q_1, q_2, \dots, q_n$; 2. des Systems s' der Veränderungen dieser Elemente (System der Geschwindigkeiten) $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$, wo $q'_i = \frac{dq_i}{dt}$. Die Wahrscheinlichkeit des Systems oder, genauer ausgedrückt, die Wahrscheinlichkeit des Zustandes (q, q') ist zusammengesetzt aus den einfachen, den unabhängigen Systemen zukommenden Wahrscheinlichkeiten φ und ψ, ist also gleich dem Producte $\varphi\psi$. Wirft man die Frage auf, unter welchen Bedingungen ist das Weltsystem unter allen denkbaren Systemen das wahrscheinlichste, so wird die Lösung dieser Frage auf das Problem des Maximums des Integrals

$$(1) \qquad P = \int_{t_0}^{t} dt \log(\varphi\psi),$$

also auf die bekannte Frage der Variationsrechnung zurückgeführt. Auf diese Weise gelangt man zum folgenden System von Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial q'}\right) - \frac{\partial \log\varphi}{\partial q} - \frac{\partial \log\psi}{\partial q} = 0,$$

und das Integral (1) erhält dann die Form

$$P = H(t - t_0)t + \int_{t_0}^{t} dt \Sigma q' \frac{\partial \log\varphi}{\partial q};$$

H ist eine Constante. Es ist also neben (2) das Maximum-Werden des Integrals

$$(3) \qquad Q = \int_{t_0}^{t} dt \Sigma q' \frac{\partial \log\varphi}{\partial q}$$

die notwendige und ausreichende Bedingung für das wahrschein-

lichste System. Vergleicht man die Gleichungen (2) mit den bekannten Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}-\frac{\partial U}{\partial q}=0,$$

so gelangt man zur Formel

$$\varphi\psi = ge^{\lambda}(T+U-\Sigma kq');$$

g ist eine willkürliche Constante. Es ist also Q dann ein Maximum, wenn

$$\int_{t_0}^{t} 2T dt$$

ein Minimum wird. Mithin gilt der Satz: „Von allen denkbaren Systemen ist das wahrscheinlichste dasjenige System, in welchem das Princip der kleinsten Wirkung stattfindet".

In den folgenden Teilen der Abhandlung betrachtet der Verfasser die verschiedenen Arten der Systeme, untersucht die Verteilung der Geschwindigkeiten und gelangt zu einer Verallgemeinerung des bekannten Maxwell'schen Gesetzes der kinetischen Gastheorie. Dn.

W. P. Maximowitsch. Ueber das Gesetz der Wahrscheinlichkeiten der zufälligen Grössen und seine Anwendung auf eine Frage der Lehrstatistik. Kiew. Univ. Nachr. 1888. 1. (Russisch.)

Alle individuellen Abweichungen von einem Typus sollen dem Laplace'schen Fehlergesetz folgen; wenn also die Prüfungen uns eine exacte Klassification der geistigen Fähigkeiten der jungen Leute geben, so muss die Summe der Fälle auch demselben Gesetze folgen. Das hat nun wirklich bei den Prüfungen zur Aufnahme in die Polytechnische Schule zu Paris statt, wie der Verfasser es nach den Prüfungslisten für die letzten 20 Jahre bestätigt hat. Wi.

J. Bertrand. Sur les lois de mortalité de Gompertz et de Makeham. C. R. CVI. 1042-1043.

A. Quiquet. Sur la loi de Makeham. C. R. CVI. 1465-1466.

VAN DORSTEN. Quelques remarques relatives à une note sur les lois de mortalité de Gompertz et de Makeham. C. R. CVII. 386.

Die Wahrscheinlichkeit für eine Person vom Alter t, das Alter $(t+\Delta)$ zu erleben, ist nach der Sterblichkeitsformel von Gompertz von der Form $Kq^t(q^\Delta-1)$, nach der Formel von Makeham von der Form $Kq^t(q^\Delta-1)h^\Delta$, wo K, q und h Constanten sind. Diese Formeln bieten dem Lebensversicherungstechniker den Vorteil, dass sich die Berechnung der Verbindungsrenten für zwei oder mehr Personen verschiedenen Alters zurückführen lässt auf diejenige gleichaltriger Personen.

Bertrand wirft die Frage auf, ob Simpson die eine oder die andere dieser Formeln gekannt habe, da er davon spricht, man könne die Verbindungsrente zweier Personen verschiedenen Alters zurückführen auf die Rente zweier gleichaltriger Personen. In grösster Allgemeinheit führt diese Behauptung auf die Gleichung

$$\varphi(a+x)\,\varphi(b+x) = F[\varphi(c+x)],$$

wo $\varphi(z)$ die Anzahl der Lebenden vom Alter z aus der Sterbetafel bedeutet. Bertrand zeigt dann, dass die Bestimmung von φ und F auf die Gleichung führt

$$\varphi(u) = He^{Ge^{Ku}+C_2u},$$

wo H, G, K und C_2 Constanten sind. Dies ist die Formel von Makeham, und setzt man $C_2 = 0$, so geht dieselbe in die Formel von Gompertz über.

Quiquet kommt durch eine etwas abweichende Betrachtung zu dem Resultat, dass der Forderung genügt wird sowohl durch die Form

$$\varphi(u) = He^{mu},$$

wie durch die Form

$$\varphi(u) = He^{mu+m'u^2},$$

wo H, m und m' Constanten.

Die Bemerkungen von van Dorsten beziehen sich auf die Literatur über diesen Gegenstand. Ls.

H. Zimmermann. Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbens-Statistik. III. Heft. Berlin. Puttkammer & Mühlbrecht.

Ebenso wie in den vorhergehenden Heften hat der Verf. den Stoff in drei Teile geteilt:

1. Mathematisch statistische Beiträge,

2. Bericht über die statistischen Ergebnisse des betreffenden Jahres,

3. Tabellen.

Der erste Teil ist derjenige, der uns hier am meisten interessirt. In der Vorbemerkung zu demselben wird es als eine Hauptaufgabe des mathematisch-statistischen Bearbeiters der Dienstunfähigkeits- und Sterbens-Statistik bezeichnet, „das dargebotene Material für den Gebrauch herzurichten und so die Anwendung desselben möglichst weiten Kreisen nahe zu legen", welche Aufgabe sich mit dem Wachsen des Materials immer mehr erweitert, wie das in den Beiträgen selbst dargelegt wird. In dieser Hinsicht möchten wir besonders auf den 6. Beitrag hinweisen, in welchem von der im vorhergehenden Heft besprochenen Methode einer rationellen Ermittelung der Sterbenswahrscheinlichkeit dienstunfähiger Beamte die praktische Anwendung gemacht wird. Es handelt sich dabei um die Erscheinung, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit solcher Personen, welche erst seit kurzem pensionirt worden, erheblich grösser ist, als die Sterbenswahrscheinlichkeit solcher Dienstunfähigen desselben Alters, welche schon längere Zeit vorher dienstunfähig erklärt waren. Will man die Sterbenswahrscheinlichkeit der Dienstunfähigen bestimmen, so müsste man für jedes Alter, in welchem Dienstunfähigkeit erklärt wird, eine besondere Absterbeordnung ermitteln. Für die directe Lösung dieser Aufgabe ist aber das vorhandene Material durchaus nicht genügend, und es müssen daher indirecte Wege versucht werden, von denen der Verf. in dem vorhergehenden Heft einige angegeben hatte, welche in diesem Heft zur Herstellung einer Tabelle benutzt werden.

Ls.

J. P. GRAM. Om Middelfeilen paa Värdien af Livsforsikringer. Zeuthen Tids. (5) VI. 97-120.

J. P. GRAM. Tillag til Afhandlingen om Middelfeil paa Värdien af Livsforsikringer. Zeuthen Tids. (5) VI. 184-187.

Der Zweck dieser Abhandlung ist, die von Bremiker, Wittstein und anderen angefangenen Untersuchungen über die Bestimmung eines Masses des Risicos für die verschiedenen Gattungen der Lebensversicherungen fortzusetzen. Der Verfasser sucht dieses mit Hülfe des sogenannten Mittelfehlers zu bewerkstelligen. Dieser wird definirt durch die Formel

$$\mu^2 = g_1^2 w_1 + g_2^2 w_2 + g_3^2 w_3 + \cdots,$$

wo w_1, w_2, w_3, ... die Wahrscheinlichkeit in beziehungsweise 1, 2, 3, ... Jahren zu sterben, g_1, g_2, g_3, ... die entsprechenden Verluste bedeutet. Diese Formel kann als eine Grenzformel des Ausdruckes

$$g_1^2 w_1 (1-w_1) + g_2^2 w_2 (1-w_2) + \cdots$$

betrachtet werden, welcher u^2 darstellen würde, wenn $w_1, w_2, \ldots$ von einander unabhängig wären.

Die Untersuchung wird in hohem Grade durch die Anwendung der continuirlichen Methode vereinfacht. Diese giebt

$$\mu^2 = \int_0^\infty - \frac{1}{l_x} \frac{dl_{x+t}}{dt} g_t^2 \, dt,$$

wo x das Alter des Versicherten, t die Zeit und l_x die Anzahl der jetzt lebenden x-jährigen Personen ist.

Für die gewöhnliche Versicherung mit einer Versicherungssumme gleich 1 bekommt man

$$\mu = \left(\frac{p+\delta}{\delta}\right)^2 (\mathcal{A}_x - A_x)^2,$$

wo p die continuirliche Prämie bedeutet, δ den continuirlichen Zinsfuss, A_x den Kapitalwert der prämienfreien Versicherung gleich 1, $\mathcal{A}_x$ denselben Kapitalwert unter der Voraussetzung, dass der Zinsfuss 2δ ist.

Eine Reihe ähnlicher Formeln für die verschiedenen gewöhnlichsten Versicherungsgattungen wird entwickelt und so transformirt, dass die Formeln bequem zur Bestimmung des Mittelfehlers der gesammelten Prämienreserve einer Versicherungsgesellschaft verwendet werden können. Endlich zeigt der Verfasser, wie eine solche Bestimmung in der Praxis ausgeführt werden kann, und welche Verkürzungen in den Rechnungen man sich erlauben darf.

Eine kleine Tabelle ist beigefügt zur Erleichterung der Anwendung. V.

JUL. KAAN. Anleitung zur Berechnung der einmaligen und terminlichen Prämien für die Versicherung der Leibrenten, Activitäts-, Invaliditäts- und Witwenrenten, sowie zur Berechnung der bezüglichen Prämienreserven zum Zwecke der Bilanz-Berechnung der Bruderladen. Wien. Hof- u. Staatsdruckerei. 133 S. 8°.

Der Verfasser, welcher der Vorstand des versicherungstechnischen Departements des österreichischen Ministeriums des Innern ist, hat diese Schrift im Auftrage des Ackerbauministeriums verfasst.

Aus dem Titel ersehen wir den Inhalt derselben. Wie der Verfasser in dem Vorwort bemerkt, lag die Aufgabe vor, zu zeigen, durch welche mathematischen Entwickelungen man zu den im „Bericht über die im Auftrage des Ackerbauministers vorgenommenen Berechnungen, betreffend die österreichischen Bruderladen" (veröffentlicht 1885 als Beilage der österr. Ztschr. für Berg- und Hüttenwesen) erhaltenen Werte gelangen kann.

Die Arbeit zerfällt in drei Capitel. Das erste, welches kaum drei Seiten umfasst, enthält einige wenige Sätze der Zinseszinsrechnung und eine kurze Erläuterung der Mortalitäts- und Invaliditätstafeln.

Das zweite Capitel beschäftigt sich mit der Rentenversicherung einzelner Personen und zwar mit Leibrenten, Activitäts- und Invalidenrenten, sowie den terminlichen Prämien zur Deu-

tung derselben. Die Begriffe der Lebenswahrscheinlichkeit, der Activitätswahrscheinlichkeit, der wahrscheinlichen und mittleren Lebens- und Activitätsdauer werden erklärt, und sodann werden die Formeln für Verbindungsrenten und Ueberlebungsrenten sowie für die terminlichen Prämien derselben entwickelt.

Das dritte Capitel endlich behandelt die Reserve und deren Berechnung. Nach vorangestellten ungemein treffenden allgemeinen Bemerkungen werden die Reserveformeln entwickelt, und schliesslich wird gezeigt, wie die Bilanzaufstellung und Reserveberechnung der humanitären Institute ohne versicherungstechnische Basis (Bruderladen, Knappschaftskassen) vorzunehmen ist.

Es handelt sich überall mehr um die praktische Anwendung als um die möglichst grosse theoretische Vollkommenheit, und es wird überall auf die bei den Bruderladen und den Knappschaftskassen getroffenen Einrichtungen Bezug genommen.

Ein Anhang von neun Tafeln enthält die Zahlen, welche bei der Anwendung der in der Schrift enthaltenen Theorien, d. h. also bei der Bilanzaufstellung für eine Bruderlade benutzt werden sollen. Ls.

G. Jahn. Ueber die Ermittelung der Beiträge für die Wittwen-Versicherung beim Bergbau. Inaug.-Diss. Freiberg.

Der Verfasser unterscheidet zwischen der Witwenversorgung, wie sie durch die Rentenanstalten erfolgt, und derjenigen bei Knappschaftskassen oder ähnlichen Vereinigungen. Bei den ersteren handelt es sich um einige Ueberlebensrenten der Verheirateten, bei den letzteren haben alle männlichen Mitglieder, verheiratet oder unverheiratet, gleichmässig für die Versorgung der künftigen Witwen beizutragen; dabei handelt es sich keineswegs um die Versorgung im voraus bestimmter Ehefrauen, sondern um die Versorgung derjenigen Frau, welche der Mann beim Tode, bez. beim Eintritt in die Erwerbsunfähigkeit zurücklässt. Die im Invalidenstand geehelichten Frauen pflegen vom Pensionsgenuss ausgeschlossen zu sein. Man muss daher vor allen Dingen wissen, wie viel Mitglieder beim Tode, bez. beim Beginn der Erwerbsunfähigkeit im Besitz einer Frau sein werden.

Die Grundlagen für diese Zahlen bilden die Invaliditäts- und Sterbenswahrscheinlichkeiten der Männer, die Lebenswahrscheinlichkeiten der Frauen, und die Wahrscheinlichkeiten der Verheiratung activer Bergleute. Diese letzteren sind bis jetzt nur ungenügend ermittelt. Der Verfasser beabsichtigt, die von Küttner aufgestellte „Heiratswahrscheinlichkeit für die Bergleute Sachsens" in seiner Abhandlung „Die Eheschliessungen im Königreiche Sachsen mit besonderer Berücksichtigung des Bergmannsstandes" und die aus dieser Arbeit sich ergebenden mittleren Altersdifferenzen von Mann und Frau zur Bestimmung des für die Wittwenversicherung der Knappschaftskassen erforderlichen Beitrages zu verwerten.

Die Arbeit zerfällt in vier Abschnitte. Im ersten wird die „Heiratstabelle" abgeleitet, eine Tabelle, welche angiebt, wie die von einer gegebenen Gesamtheit von activen Bergleuten im Laufe der Zeit noch activ bleibenden sich nach Verheirateten und Unverheirateten verteilen. Es werden dabei verschiedene Voraussetzungen gemacht. Der zweite Abschnitt handelt von der Ermittelung der die Witwenkasse belastenden Ehefrauen bez. Witwen, die man kennen muss, um die Verpflichtungen der Kasse festzustellen, was im dritten Abschnitt geschieht, während der vierte Abschnitt endlich sich mit der Ermittelung des für die Witwenversicherung erforderlichen Beitrags beschäftigt.

In einem Anhang sind die ermittelten Zahlenwerte als Tabellen beigefügt. Ls.

C. L. Landré. Lyfrente in Termynen en dorloopend.
Nieuw Archief. XV. 1-15.

Der Verfasser untersucht die Genauigkeit der verschiedenen Formeln, welche man anwendet, um aus den Werten der jährlich zahlbaren Leibrente (die pränumerando zahlbare Leibrente soll mit R bezeichnet werden) die Werte der Leibrente, welche pränumerando n-mal im Jahr bezahlt wird ($\overset{n}{R^{\overline{n}}}$), zu bestimmen. Der Zinsfuss sei i.

Wenn man die zweiten Potenzen von i berücksichtigt und erst

die dritten und höheren Potenzen vernachlässigt, so kommt man je nach der Annahme, welche man über die Zahlung der Zinsen macht, zu verschiedenen Formeln, von denen diejenige von Lobatto

$$R^{\frac{n}{n}} = (1 + \frac{n^2-1}{12n^2} i^2) R - \frac{n-1}{2n} - \frac{n^2-1}{6n^2} i + \frac{n^2-1}{24n^2} i^2$$

die beste ist. Vernachlässigt man aber auch die zweite Potenz von i, so führen alle diese Formeln auf

$$R^{\frac{n}{n}} = R - \frac{n-1}{2n} - \frac{n^2-1}{6n^2} i$$

und

$$R^{\frac{\infty}{\infty}} = R - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} i.$$

Der Unterschied in den nach diesen Formeln berechneten Werten gegen die nach den genaueren Formeln berechneten ist so gering, dass die Werte bis auf 0,01 genau sind, und der Fehler im Verhältnis zum Rentenwert 0,0002 nicht übersteigt. Wendet man aber die Formeln

$$R^{\frac{n}{n}} = R - \frac{n-1}{2n} \text{ und } R^{\frac{\infty}{\infty}} = R - \tfrac{1}{2}$$

an, so kann man nicht sicher sein, dass die Werte bis auf 0,01 genau sind.

Daran knüpft der Verfasser noch einige allgemeine Betrachtungen, um zu zeigen, dass es zwecklos wäre, die Leibrentenwerte überhaupt auf mehr als 0,0001 genau bestimmen zu wollen.

Ls.

C. L. Landré. Over Correctie van Getaalreeksen door middel van tweede Verschillen. Nieuw Archief XV. 15-22.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass für die Correction von Zahlenreihen hin und wieder Regeln aufgestellt worden sind, welche weit über ihren Zweck hinausgehen, indem sie an die Stelle der zu corrigirenden Zahl eine andere setzen, welche von der ursprünglichen ganz und gar unbeeinflusst ist und lediglich von den Nachbarzahlen abhängt. Er zeigt das an

einer für die Ausgleichung von Sterblichkeitstafeln empfohlenen Methode, indem er den dort begangenen Missgriff beleuchtet.

Ls.

C. L. Landré. Over den infloed der Levenskansen en van den rentevoet op tarief en reserve by levensverzekering. Nieuw Archief. XV. 22-36.

Der Verfasser untersucht zuerst den Einfluss, welcher durch eine Veränderung des rechnungsmässigen Zinsfusses i ausgeübt wird auf den Wert der vorschussweisen Leibrente R, der einmaligen Prämie C für die Ablebensversicherung und der jährlichen Prämie P für dieselbe.

Aus den für R und C entwickelten Formeln geht ohne weiteres hervor, dass diese Werte kleiner werden, wenn i wächst, und grösser, wenn i abnimmt. Für den Wert von $P = \frac{C}{R}$ bleibt die Veränderung jedoch unentschieden. Bringt man jedoch P auf die Form

$$P = \frac{1}{R} - \frac{i}{1+i},$$

so lässt sich unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahr zu sterben, mit dem wachsenden Alter beständig zunimmt, zeigen, dass auch der Wert von P abnimmt mit steigendem Zinsfuss, und umgekehrt. Bei der Untersuchung, welche Veränderung der Reservewert der Lebensversicherung mit jährlicher Prämienzahlung erleidet, wenn man der Rechnung einen anderen Zinsfuss zu Grunde legt, wird vorausgesetzt, dass man es mit einer mit dem zunehmenden Alter stets wachsenden Sterblichkeit zu thun hat, und für die Versicherung einer Person, die beim Eintritt x Jahr alt gewesen und seit n Jahren versichert ist, wird die Reserveformel

$$1 - \frac{R(x+n)}{R(x)}$$

angewendet. Dann ergiebt sich, dass der Reservewert sich bei dem höhern Zinsfuss vermindert, bei dem geringeren erhöht.

Bleibt der Zinsfuss unverändert, und wird der Rechnung eine andere Sterblichkeitstafel zu Grunde gelegt, welche durchweg, d. h. für alle Altersklassen, eine grössere Sterblichkeit zeigt, so vermindert sich der Wert von R, während der Wert von C wächst, folglich wird auch $P = \frac{C}{R}$ grösser. Das Umgekehrte tritt ein, wenn die neue Sterblichkeitstafel durchweg eine geringere Sterblichkeit zeigt. Hinsichtlich des Reservewerts kommt es darauf an, ob die Aenderung der Sterblichkeit in den Altersklassen bis zu $(x+n)$ Jahren oder in den höheren Altersklassen überwiegt. Es kann sehr wohl der Fall sein, dass der Reservewert trotz höherer Jahresprämien geringer ausfällt und umgekehrt, weil derselbe keineswegs von der absoluten Höhe der Prämien, sondern von dem Grad der Steigerung der Sterblichkeit mit dem wachsenden Alter abhängt.

Zum Schlusse behandelt der Verfasser auch noch den Fall, dass zwei oder mehrere ganz verschiedene Sterblichkeitstafeln für alle Altersklassen und für jede Versicherungsdauer genau denselben Reservewert ergeben können. Seine Entwickelungen sind dieselben, welche bereits früher von englischen Autoren, insbesondere von Sprague, über diese Frage gegeben worden sind.

Ls.

F. J. Studnička. Grundzüge der national-ökonomischen oder juridisch-politischen Arithmetik. Prag. 1887. 312 S. (Böhmisch.)

Der reichhaltige Stoff wird in vier Abschnitten verarbeitet, wovon der erste vorbereitender Natur ist, der zweite Rechnungen betrifft, welche reine Procenterträgnisse bedingen, wobei auch die continuirliche Verzinsung eine allseitige Beachtung erfährt, während der dritte Abschnitt den Rechnungsbedürfnissen der Sparkassen, der letzte hingegen den Banken gewidmet ist. Zwölf reichhaltige Tabellen bilden den Schluss des originell angelegten und mit zahlreichen, vollständig durchgerechneten Beispielen versehenen Werkes.

Std.

Hr. Bleicher. Grundriss der Theorie der Zinsrechnung. Berlin. Springer. 75 S.

Der Verfasser will einen kurzgefassten Grundriss für eine vollständige Theorie der Zinsrechnung geben, und wir glauben, dass er seine Aufgabe auch gelöst hat. Er giebt nach einer ausführlichen Erläuterung der Zinsfunction eine systematische Entwickelung der Grundformeln, wobei der Ausgangspunkt in der continuirlichen oder augenblicklichen Verzinsung liegt. Am Schlusse des Buches sind einige Tabellen betreffend die augenblickliche Verzinsung, welche von anderen Autoren mehr in den Hintergrund gestellt zu werden pflegt, hinzugefügt. Ls.

F. Ronchitti. Calcolo del valore, al netto, di titoli soggetti a tassa di circolazione e dritto di provvigione come le obbligazioni ferroviarie. Batt. G. XXVI. 133-154. Ls.

G. King. Institute of actuaries' textbook of the principles of interest, life annuities and assurances, and their practical application. Part II. Life contingencies (including life annuities and assurances). London. C. and E. Layton. 1887.

Anzeige in Nature XXXVII. 457-458. Danach ist der erste Teil 1882 erschienen. Lp.

Prosper de Lafitte. Essai d'une théorie rationnelle des sociétés de secours mutuels. Paris.

E. Gelin. La monnaie. Mathesis VIII. Suppl. I. 16 S.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

J. L. W. Jensen. Sur un théorème de convergence. Nouv. Ann. (3) VII. 196-198.

J. L. W. Jensen. Sur un théorème général de convergence. C. R. CVI. 729-731.

P. du Bois-Reymond. Sur les caractères de convergence et de divergence des séries à termes positifs. C. R. CVI. 941-944.

E. Cesaro. Sur deux récentes communications de M. Jensen. C. R. CVI. 1142-1143.

J. L. W. Jensen. Sur un théorème général de convergence. Réponse aux remarques de M. Cesaro. C. R. CVI. 1520-1522.

E. Cesaro. Sur un théorème de Kummer. C. R. CVI. 1791-1794.

E. Cesaro. Remarques sur divers articles, concernant la théorie des séries. Nouv. Ann. (3) VII. 401-404. (No. 5.)

Die bekannten Convergenzkriterien Cauchy's, Duhamel's und Bertrand's sind specielle Fälle des von Herrn Jensen gefundenen Satzes: Enthält die Reihe Σu_n nur positive Glieder, bedeutet

a_n eine positive Function der ganzen positiven Zahl n und μ eine positive Constante, so ist Σu_n convergent, wenn

$$(1) \qquad a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \mu$$

ist. Die Richtigkeit dieses Satzes ist leicht ersichtlich, da aus (1) unmittelbar folgt:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} < \frac{1}{\mu} a_n u_n.$$

Da man, so fährt Herr Jensen fort, a_n so wählen kann, dass (1) befriedigt und gleichzeitig $\Sigma \frac{1}{a_n}$ divergent wird, so hat sowohl dieser Satz allgemeine Gültigkeit, wie auch der folgende: Die Reihe positiver Glieder Σu_n ist convergent oder divergent, je nachdem von einem bestimmten Werte von n an

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$$

grösser als μ oder kleiner als Null ist, wobei a_n und μ positiv sind und $\Sigma \frac{1}{a_n}$ divergirt.

Diese Sätze sind, wie du Bois-Reymond ausführt, soweit sie die Convergenz betreffen, in einer von ihm im J. für Math. LXXVI. veröffentlichten Arbeit enthalten; soweit sie die Divergenz betreffen, sind sie allgemeiner. Die sich in letzterer Hinsicht ergebende Verschiedenheit wird von du Bois-Reymond besprochen und im Anschluss daran die Frage gestellt, ob eine Function λ_p von der Beschaffenheit existire, dass die Reihe Σu_p convergirt, wenn

$$1 - \frac{u_{p+1}}{u_p} > \lambda_p$$

ist; er zeigt, dass eine solche Function nicht existirt.

Herr Cesaro giebt an, wie er seit zwei Jahren das Jensen'sche Convergenzkriterium beweist; er behauptet, dass dasselbe nicht neu sei, es stimme vielmehr mit dem von Herrn Kummer (J. für Math. XIII.) gegebenen, von Herrn Dini (Annali dell' Univ. Torino 1867) modificirten und vervollständigten überein; aus der Arbeit des letzteren ergebe sich auch, dass dem zwei-

ten Satze des Herrn Jensen keineswegs allgemeine Gültigkeit zukomme.

Herr Jensen weist in seiner Entgegnung darauf hin, dass $\lim a_n u_n = 0$ für $n = \infty$ unmittelbar aus der Ungleichung (1) folge (dies hatte auch schon Herr Cesaro angegeben); mithin bezeichne seine Darstellung, durch welche die durch den Kummer'schen Satz geforderte, oft sehr schwierige Untersuchung von $\lim a_n u_n$ als überflüssig nachgewiesen sei, eine neue und grosse Vereinfachung der Convergenztheorie.

Dagegen bemerkt Herr Cesaro, dass der Kummer'sche (resp. Jensen'sche) Satz nur eine beschränkte, nicht eine allgemeine Anwendbarkeit zulasse. Er sei unzureichend, wenn $a_n u_n$ keine bestimmte Grenze habe; es könne durch denselben die Divergenz derjenigen Reihen, für welche $a_n u_n$ abnehmend oder oscillirend gegen Null convergire, nicht nachgewiesen werden, während sich dieselbe aus der Existenz von $\lim a_n u_n$ leicht ergebe. Wz.

E. Cesaro. Sur la convergence des séries. Nouv. Ann. (3) VII. 49-59.

E. Cesaro. Sur la comparaison des séries divergentes. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 115-118.

E. Cesaro. Sur une distribution de signes. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_2. 133-138.

J. Bagnera. Sur une propriété des séries simplement convergentes. Darboux Bull. (2) XII. 227-228.

E. Cesaro. Remarques sur divers articles, concernant la théorie des séries. Nouv. Ann. (3) VII. 401-407. (No. 4.)

Zur Entscheidung der Divergenz gewisser Reihen können folgende Sätze dienen:

1. Eine Reihe $u_1 + u_2 + \cdots$ ist divergent, wenn (für $n = \infty$) $\lim nu_n = \lambda\,(\lambda \gtrless 0)$ ist.

2. Teilt man das System der ganzen Zahlen in Systeme $A_1, A_2, \ldots, A_r$; ist dann (für $n = \infty$) $\lim a_n = \lambda_i$, falls a_n die Zahlen von A_i durchläuft; bedeutet n_i die Anzahl, σ_i die Summe

der Zahlen von A_i, welche kleiner sind als n, ω_i die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig herausgegriffene Zahl dem System A_i angehört, so muss, wenn die Reihe $u_1+u_2+u_3+\cdots$ convergent sein soll, $\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2+\cdots+\lambda_r\omega_r=0$ sein.

Aus 2. ergiebt sich z. B.: Damit die harmonische Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ convergent sei (ferner auch Reihen, die nicht weniger divergent sind als diese), müssen ebensoviel Glieder mit positivem wie mit negativem Vorzeichen versehen werden.

Herr Cesaro nennt von zwei divergenten Reihen $u_1+u_2+\cdots$ und $v_1+v_2+\cdots$ die erste weniger divergent als die zweite, wenn

$$V=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{v_1+v_2+\cdots+v_n}$$

für $n=\infty$ gegen Null convergirt. Falls $u_n:v_n$ eine Grenze λ besitzt, muss auch V gegen dieselbe Grenze convergiren. Gemäss dieser Erklärung sind z. B. diejenigen Reihen, für welche $\lim nu_n=0$ ist, weniger divergent als die harmonische Reihe. Allgemein kann man leicht divergente Reihen angeben, welche weniger divergent sind als eine gegebene Reihe. Herr Cesaro bespricht das Kummer'sche Convergenzkriterium (J. für Math. XIII. 171) und den Fall, dass $u_n:v_n$ zwischen einer endlichen Anzahl von endlichen Grenzwerten schwankt.

Bedeutet $u_1+u_2+\cdots$ eine divergente Reihe positiver Glieder, $a_1, a_2, \ldots$ Zahlen, welche beständig und unbegrenzt wachsen, so convergirt für $n=\infty$ das Verhältnis V gegen dieselbe Grenze wie

$$\lim\frac{a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n}{a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n},$$

falls dieser letzte Ausdruck existirt.

Hieraus ergiebt sich — und dies ist der Satz, den Herr Bagnera auf anderem Wege ableitet — dass die Wahrscheinlichkeit (ω), „in einer einfach convergenten Reihe ein positives Glied zu treffen", gleich $\frac{1}{2}$ ist, oder dass in derselben die positiven Glieder ebenso häufig sind wie die negativen, falls dieselben ihrem absoluten Werte nach beständig abnehmen.

Hierin ist die Existenz von ω stillschweigend angenommen;

aber auch, wenn ω nicht existirt, bietet die Verteilung der Vorzeichen eine gewisse Regelmässigkeit dar. Wz.

J. L. W. Jensen. Sur une généralisation d'un théorème de Cauchy. C. R. CVI. 833-836.

E. Cesaro. Sur deux récentes communications de M. Jensen. C. R. CVI. 1142-1143.

J. L. W. Jensen. Sur un théorème général de convergence. Réponse aux remarques de M. Cesaro. C. R. CVI. 1520-1522.

Die von Herrn Jensen bewiesene Verallgemeinerung des Cauchy'schen Satzes lautet: Bedeuten φ_n und a_n derartige Functionen der ganzen positiven Zahl n, dass φ_n eine bestimmte Grenze φ_∞ hat, während $|a_\infty| = \infty$ und $\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu - a_{\nu-1}| : a_n$ bebeständig kleiner ist, als eine gegebene Zahl, so ist:

$$\varphi_\infty = \lim_{n=\infty} \frac{(a_1-a_0)\varphi_1 + (a_2-a_1)\varphi_2 + \cdots + (a_n-a_{n-1})\varphi_n}{a_n}.$$

Hieraus folgt: Bedeutet Σu_n eine convergente Reihe, so ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n}{a_n} = 0,$$

woraus sich noch Verallgemeinerungen eines Satzes von Abel und eines solchen des Herrn Stieltjes ergeben.

Herr Cesaro behauptet, dass die Verallgemeinerung des Cauchy'schen Satzes schon früher (Rendiconti dei Lincei) gegeben sei, worauf Herr Jensen entgegnet, dass er dieselbe bereits im Jahre 1884 (Tidsskrift for Mathematik (5) II. 81-84; vergl. F. d. M. XVI. 1884. 193) veröffentlicht habe. Wz.

O. Stoltz. Ueber Verallgemeinerung eines Satzes von Cauchy. Math. Ann. XXXIII. 237-245.

Es seien $g(n)$ und $\varphi(n)$ reelle Functionen, $\varphi(n)$ ändere sich bei wachsendem n stets im nämlichen Sinne und habe bei

$\lim n = +\infty$ einen unendlichen Grenzwert. Wenn $g(n)$ bei $\lim n = +\infty$ eine endliche obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze $O(U)$ besitzt, so ist die entsprechende Unbestimmtheitsgrenze von

$$F(n) = \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{r=1}^{n} [\varphi(r)-\varphi(r-1)]\, g(r),$$

entweder $-\infty(+\infty)$ oder eine endliche Zahl $O'(U')$, welche nicht grösser (kleiner) als $O(U)$ ist. Hat $g(n)$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $+\infty(-\infty)$, so auch die Function $F(n)$.

Dieser Satz wird bewiesen und in Beziehung gesetzt zu Arbeiten der Herren Jensen (C. R. CVI. 833) und Cesaro (Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 116, Nouv. Ann. (3) VII. 54, Palermo Rend. I. 225, vgl. die voranstehenden Berichte).

Dem hieraus über das Verhalten von $f(n):\varphi(n)$ sich ergebenden Satze stellt der Herr Verfasser einen analogen an die Seite, der sich mit dem Quotienten zweier für jeden endlichen Wert von x definirten reellen Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ für $x = +\infty$ beschäftigt. Wz.

A. Pringsheim. Ueber die Convergenz unendlicher Producte. Math. Ann. XXXIII. 119-154.

Der Herr Verfasser will in dieser Abhandlung die Hauptsätze über die Convergenz unendlicher Producte, welche zuerst von Cauchy mit Hülfe der Theorie der Logarithmen und der logarithmischen Reihe bewiesen sind, unmittelbar aus der Definition des Productes rein elementar ableiten, d. h. ohne Benutzung der Logarithmen und der trigonometrischen Form der complexen Zahlen. Nachdem er die Convergenz eines unendlichen Productes definirt hat, zeigt er:

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die absolute Convergenz des unendlichen Productes $\Pi(1+u_\nu)$ besteht in der absoluten Convergenz der unendlichen Reihe Σu_ν.

Das absolut convergente Product convergirt auch stets unbedingt.

Dabei heisst ein unendliches Product $\Pi(1+u_\nu)$ absolut con-

vergent, wenn $\Pi(1+|u_\nu|)$ convergirt, unbedingt convergent, wenn es unabhängig von der Anordnung der Factoren convergirt. Die Grössen u_ν sind beliebig reell oder complex.

II. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz des Productes $\prod_1^\infty{}_\nu(1+p_\nu+q_\nu i)$, wo die p_ν unter sich, desgleichen die q_ν unter sich gleiches Vorzeichen besitzen, besteht in der Convergenz der Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu(p_\nu+q_\nu i)$.

Ein Product dieser Art ist, wenn überhaupt, stets absolut und unbedingt convergent.

Nachdem der Herr Verfasser sodann die vollständige Identität zwischen absoluter und unbedingter Convergenz eines unendlichen Productes dargethan hat, leitet er einige Hülfssätze über gewisse endliche Producte ab, um schliesslich zur bedingten Convergenz reeller Producte überzugehen; hierfür zeigt er den von Cauchy mit Hülfe der logarithmischen Reihe bewiesenen Satz:

Convergirt die Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu c_\nu$ bedingt in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung, so convergirt $\prod_1^\infty{}_\nu(1+c_\nu)$ oder divergirt nach Null, je nachdem $\sum_1^\infty{}_\nu c_\nu^2$ convergirt oder divergirt.

Wz.

Ch. Méray. Sur l'impossibilité de franchir par la formule de Taylor les cercles de convergence de certaines séries entières. Darboux Bull. (2) XII. 248-252.

Es habe die Reihe

$$f(x)=1+x^{1^2}+x^{2^2}+\cdots+x^{m^2}+\cdots$$

den Charakter einer ganzen Function (der Convergenzradius derselben ist höchstens gleich Eins), es bedeute a eine beliebige Grösse, deren Modul <1 ist, dann hat die mit Hülfe des Taylor'schen Satzes gefundene Entwickelung von $f(a+h)$ höchstens $1-\text{mod.}\,a$ zum Convergenzradius.

Für diesen Satz des Herrn Weierstrass wird vom Herrn Verfasser ein elementarer Beweis gegeben. Wz.

HADAMARD. Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. C. R. CVI. 259-262.

Der Convergenzkreis der Reihe $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ wird mit Hülfe der Folge $|a_1|$, $|\sqrt[2]{a_2}|$, ..., bestimmt und der von Herrn Lecornu (vergl. F. d. M. XIX. 1887. 228) gegebene Satz modificirt. Wz.

CH. BIEHLER. Sur les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable. Nouv. Ann. (3) VII. 200-203.

Unter der Voraussetzung, dass für alle innerhalb des Convergenzkreises der Reihe $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ gelegenen Werte der Veränderlichen x auch die Reihe $a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$ convergirt, wird bewiesen, dass für dieselben Werte von x die zweite Reihe die Ableitung der ersten ist. Wz.

S. PINCHERLE. Una transformazione di serie. Palermo Rend. II. 225-226.

Wenn a_n so beschaffen ist, dass $f(x)=\Sigma a_n x^n$ in einem Kreise, dessen Radius grösser als 2 ist, convergirt, so kann die Function

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z+n} \text{ durch } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^n(1)}{z.(z+1)\cdots(z+n)}$$

dargestellt werden. Wz.

M. WORONTZOF. Sur le développement en séries des fonctions implicites. Nouv. Ann. (3) VII. 362-365.

Sind die beiden Gleichungen $m=f(y)$; $x=\varphi(y)$ gegeben, so wird eine Function von x mittelst der Maclaurin'schen Reihe und des Lagrange'schen Restes nach Potenzen von m entwickelt

und das Resultat auf zwei Beispiele:

$$x = e^{ay},\ m = e^{cy} - h \text{ und } x = y^a,\ m = y^c - h$$

angewandt. Wz.

A. Gutzmer. Ein Satz über Potenzreihen. Math. Ann. XXXII. 596-600.

Es sei die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$$

für den durch die Ungleichung $|x| \leqq R$ definirten Bereich absolut convergent. Dann ist das arithmetische Mittel aus den Quadraten der absoluten Beträge aller Werte, welche $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Kreise $|x| = r$ $(r < R)$ annimmt, gleich der Summe aus den Quadraten der absoluten Beträge der einzelnen Glieder.

Wz.

A. Harnack. Ueber Cauchy's zweiten Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihen und eine damit verwandte ältere Methode von Poisson. Math. Ann. XXXII. 175-202.

Nach dem Vorgange Dirichlet's und Riemann's werden in den historischen Darstellungen der Theorie der Fourier'schen Reihen gewöhnlich die umfassenden Versuche Poisson's, welche sich auf die Convergenz der Reihen mit trigonometrischen Functionen und mit Cylinderfunctionen beziehen (Journal de l'Ecole Polytechnique vom Jahre 1823; XII. Cah. XIX.), nicht erwähnt; ebenso wenig wird einer ausführlichen Abhandlung Cauchy's gedacht, welche die Theorie der Residuenrechnung schliesst (Exercices de Math. II. 1827. 341-376; Oeuvres (2) VII. 345ff.) und einen neuen Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihe enthält. Von einer Priorität kann wegen Mangels an Strenge bei beiden Autoren keine Rede sein. Trotzdem sind diese Arbeiten von Interesse; es handelt sich in ihnen nicht bloss um die gewöhnliche Reihe, welche nach ganzzahligen Vielfachen des Argumentes fortschreitet; sondern es werden auch die Reihen in Betracht

gezogen, bei welchen die Parameter von den Wurzeln irgend einer vorgeschriebenen transcendenten Gleichung abhängen.

Der Beweis Cauchy's lässt sich nun — und dies geschieht im ersten Abschnitt der Harnack'schen Arbeit — vervollständigen; man hat zu diesem Zwecke nur die Voraussetzungen über die Beschaffenheit der darzustellenden Function zu betonen, unter welchen gewisse Umformungen bestimmter Integrale, die bei Cauchy vorkommen, allein und überdies in etwas anderer Form als dort zulässig werden.

Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, dass in den von Cauchy behandelten Beispielen die Convergenz der Reihen immer auf der Convergenz des bekannten Dirichlet'schen Integrales beruht, so dass ebenso, wie für die gewöhnliche Fourier'sche Reihe, diese Bedingung die notwendige und hinreichende auch bei den allgemeinen Reihen dieser Art ist.

Im dritten Abschnitt wird gezeigt, dass die von Poisson angegebene Methode im Grunde nichts anderes als eine Residuenrechnung ist. Wz.

Dirichlet. On the convergency of the trigonometrical series which serves to represent an arbitrary function between given limits. Tokio. Math. Ges. III. 249-266.

Englische Uebersetzung der bekannten, im 4. Bande des Journals für Math. erschienenen Abhandlung von Dirichlet.

E.

M. Lerch. Sur une fonction discontinue. Batt. G. XXVI. 375-376.

Beispiel einer Reihe: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$, durch welche eine überall unstetige Function der reellen Veränderlichen x dargestellt wird, während die Glieder $\varphi_n(x)$ dieser Reihe stetige Functionen einer reellen Veränderlichen sind. Wz.

S. Zurakowski. Beweis eines Satzes von H. Wronski. Krak. Denkschr. XIV. 56-58. (Polnisch.)

Die Wronski'sche Formel

$$F(x) = F - \frac{\lambda}{1}\frac{1}{\varphi'}fF' + \frac{\lambda^2}{1.2}\frac{1}{\varphi'^3}\begin{vmatrix}\varphi' & f^2F' \\ \varphi'' & (f^2F')'\end{vmatrix}\frac{1}{1}$$
$$-\frac{\lambda^3}{1.2.3}\frac{1}{\varphi'^6}\begin{vmatrix}\varphi' & (\varphi^2)' & f^3F' \\ \varphi'' & (\varphi^2)'' & (f^3F')' \\ \varphi''' & (\varphi^2)''' & (f^3F')''\end{vmatrix}\frac{1}{1.1.2}+\cdots$$

[φ und f sind durch die Gleichung

$$\varphi(x)+\lambda f(x) = 0$$

verbunden, deren eine Wurzel gleich a ist; F, f, F' u. s. w. bedeuten $F(a), f(a), \frac{dF(a)}{da}, \cdots$] erhält der Verfasser durch eine geeignete Umformung der bekannten Bürmann'schen Reihe. Es ist aber zu bemerken, dass die Formel von Wronski die allgemeinere ist, und dass in ihr sowohl die Bürmann'sche wie auch die bekannte Lagrange'sche Reihe enthalten ist. Dn.

G. Teixeira. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Darboux Bull. (2) XII. 272-276.

Wenn innerhalb des Intervalls $(a \dots b)$ 1) $\varphi(x), \psi(x), u_1, u_2, \dots$ stetige Functionen bedeuten und 2) $\varphi(x)$ in eine gleichmässig convergente Reihe entwickelt werden kann, so ist:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \int_a^b u_1\psi(x)dx + \int_a^b u_2\psi(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n\psi(x)dx + \cdots$$

Setzt man $\psi(x) = 1$, so ergiebt sich hieraus ein bekannter Satz der Analysis. Der Herr Verfasser macht auf die Vorzüge seines Beweises aufmerksam und leitet aus demselben einen bequemen Ausdruck für den Fehler ab, der entsteht, wenn man die Entwickelung beim n^{ten} Gliede abbricht. Wz.

E. Picard. Sur la convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles. Darboux Bull. (2) XII. 148-156.

Es sei $f(x, y)$ eine Function, welche für alle Werte von x und y innerhalb der mit den Radien a und b um die Punkte x_0 resp. y_0 beschriebenen Kreise holomorph ist; M sei der grösste Wert des Moduls von $f(x,y)$, wenn x und y Punkte des Umfangs dieser Kreise bedeuten; dann giebt es ein Integral der Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

welches für x_0 den Wert y_0 annimmt und durch eine Reihe dargestellt werden kann, deren Convergenzradius

$$a\left(1 - e^{\frac{-b}{2aM}}\right)$$

ist. Der Herr Verfasser erweitert den Convergenzbereich, indem er zeigt, dass diese Reihe innerhalb eines Kreises convergirt, dessen Radius die kleinere der Grössen

$$a \text{ und } \frac{b}{M}$$

ist. Wz.

J. Puzyna. Anwendungen der verallgemeinerten Lagrange'schen Interpolationsformeln. Krak. Denkschr. XIV. 1-55. (Polnisch.)

Ist

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Sigma a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_m^{\lambda_m}$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades mit m Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ und $s+1$ Coefficienten, und sind

$$x_{1(1)}, x_{2(1)}, \ldots x_{m(1)},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_{1(s)}, x_{2(s)}, \ldots x_{m(s)},$$

s Systeme der Wurzeln dieser Gleichung, so kann jedes Glied $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_m^{\lambda_m}$ linear durch s Werte

$$x_{1(1)}^{\lambda_1} x_{2(1)}^{\lambda_2} \ldots x_{m(1)}^{\lambda_m}, \quad \ldots, \quad x_{1(s)}^{\lambda_1} x_{2(s)}^{\lambda_2} \ldots x_{m(s)}^{\lambda_m}$$

dargestellt werden, so dass

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_m^{\lambda_m} = \alpha_1 x_{1(1)}^{\lambda_1} x_{2(1)}^{\lambda_2} \ldots x_{m(1)}^{\lambda_m} + \cdots + \alpha_s x_{1(s)}^{\lambda_1} x_{2(s)}^{\lambda_2} \ldots x_{m(s)}^{\lambda_m};$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ sind rationale Functionen aller anderen Glieder $x_1^{\lambda_1^1} x_2^{\lambda_2^1} \ldots x^{\lambda_m^1}$ der Gleichung $G = 0$ und genügen der Bedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = 1.$$

Diese Formel nennt der Verfasser die verallgemeinerte Lagrange'sche Interpolationsformel.

Die Schrift behandelt ausführlich die Anwendungen dieser Formel auf die Theorie einiger geometrischen Gebilde, nämlich der Punktreihen zweiten Grades und der Parameter der Curven dritten Grades und dritter Klasse. Dn.

Carvallo. Formules d'interpolation. C. R. CVI. 346-349.

Es giebt zwei Methoden, um aus Gleichungen von der Form:

$$y_i = au_i + bv_i + cw_i + \cdots \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Grössen $a, b, c, \ldots$, zu bestimmen, deren Anzahl kleiner ist, als diejenige der Gleichungen, nämlich die Cauchy'sche und die Legendre'sche. Der Herr Verfasser giebt ein Verfahren an, welches die Vorzüge beider vereinigt. Wz.

N. Ekholm. Zur Ableitung einer periodischen Function aus einer Reihe nach gleichen Zeitintervallen beobachteter Grössen. Met. Zeitschr. (2) V. 51-62.

P. Nekrassoff. Der Modul des Maximum Maximorum einer Function $\psi(re^{\varphi i})$ in Bezug auf φ und die Anwendung seiner Eigenschaften auf die Reihe von Lagrange. Math. Ann. XXXI. 337-358.

Der vorliegende Aufsatz enthält einige Resultate der in russischer Sprache veröffentlichten, in F. d. M. XVII. 212 besprochenen Arbeit: Die Reihe von Lagrange. Wz.

O. Stolz. Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn Professor Dr. E. Weiss: „Entwickelungen zum Lagrange'schen Reversionstheorem etc.“ Wien. Ber. XCV. 199-204. (1887).

Ueber die Arbeit des Hrn. Weiss ist F. d. M. XVI. 1884. 219 und 1099 berichtet worden. Aus dem Baue der in den §§ 2-4 enthaltenen Reihenentwickelungen hatte Hr. Weiss bereits geschlossen, dass dieselben einer Verallgemeinerung fähig sind. Herr Stolz erhält diese als die zunächst liegenden Resultate bei der Auflösung gewisser Aufgaben, die mit der Lagrange'schen Gleichung $z = x + \alpha f(z)$ in Verbindung stehen. Lp.

E. Cesaro. Remarques sur divers articles, concernant la théorie des séries. Nouv. Ann. (3) VII. 401-407.

Bemerkungen über gewisse von den Herren M. Lerch und E. Cesaro im Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas mitgeteilte Reihen (vergl. F. d. M. XVII. 1885. 207 und 208) und über eine Eigenschaft derselben, welche von den Herren Gutzmer, E. Cesaro und E. Weyr (F. d. M. XVIII. 1886. 195 und 199) abgeleitet ist. Wz.

W. Láska. J. Lieblein's Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis zum Selbstunterricht. Zweite verbesserte und vermehrte Aufl. hrsg. von W. L. Prag. G. Neugebauer. VIII u. 180 S. 8°. (1889).

Die erste Auflage war von J. Lieblein 1867 für das polytechnische Institut zu Prag herausgegeben. Hr. Láska hat neue Aufgaben hinzugefügt und, soweit es ihm gelang, die Quellen der Aufgaben angegeben. Der Inhalt erstreckt sich auf das ganze Gebiet der Einleitung in die Analysis, so wie Euler sie in dem ersten Bande seiner Introductio verstanden hat. Zur Einübung und Aneignung des Stoffes ist die Sammlung recht gut geeignet. Zuweilen sind dem Referenten störende Druckfehler aufgestossen. Lp.

Capitel 2.
Besondere Reihen.

J. L. W. Jensen. Sur une généralisation d'une formule de Tchebycheff. Darboux Bull. (2) XII. 134-135.

Bedeuten $u_1, u_2, \ldots; v_1, v_2, \ldots; w_1, w_2, \ldots$ drei Folgen positiver Grössen von der Art, dass

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3, \ldots; \quad \frac{v_1}{w_1} \geqq \frac{v_2}{w_2} \geqq \frac{v_3}{w_3} \geqq \cdots$$

ist, so ist:

$$\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n}{v_1 + v_2 + \cdots + v_n} > \frac{u_1 w_1 + u_2 w_2 + \cdots + u_n w_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}.$$

Wz.

L. J. Rogers. An extension of a certain theorem in inequalities. Mess. (2) XVII. 145-150.

Der Verf. beweist den Satz, dass

$$\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} > b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_n^{a_n},$$

wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ alle positiv sind; und aus diesem folgert er viele andere mit Einschluss der gewöhnlich in den Lehrbüchern gegebenen Sätze. Einige der Ergebnisse beziehen sich auf die Integralrechnung; so wird u. a. gezeigt, dass

$$\left\{\int y^m dx\right\}^{r-t} \left\{\int y^t dx\right\}^{m-r} > \left\{\int y^r dx\right\}^{m-t}$$

ist, wo $m > r > t$, y eine beliebige Function von x, die Grenzen so beschaffen sind, dass für alle Werte zwischen ihnen y^m, y^r, y^t endlich und positiv bleiben. Als ein besonderer Fall ist zu erwähnen, dass für $y = x$:

$$\left(\frac{r}{t}\right)^m \left(\frac{t}{m}\right)^r \left(\frac{m}{t}\right)^t > 1,$$

wenn $m > r > t$. Glr. (Lp.)

F. C. WACE. Notes on inequalities. Mess. (2) XVIII. 90-94.

Einfache Beweise bekannter Ungleichheiten, z. B.:

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n} > \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+\dots+a_n},$$

$$\frac{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^q}{(a_1^q + a_2^q + \dots + a_n^q)^p} > \frac{1}{n^{p-q}},$$

wenn $p > q$; u. s. w. Glr. (Lp.)

H. SIMON. Ueber einige Ungleichungen. Schlömilch Z. XXXIII. 56-61.

Der Verf. geht von dem Quotienten

$$(a_1^{k+\delta} + a_2^{k+\delta} + \dots + a_n^{k+\delta}) : (a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k)$$

aus, in welchem die a und δ positiv sind; er beweist, dass der Quotient mit k wächst. Daraus folgt

$$\left[\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right]^p > \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \qquad (0 < p < 1),$$

$$\left[\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right]^p < \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \qquad (p > 0,\ p > 1).$$

Am Schluss wird mitgeteilt, dass Herr Bienaymé 1840 ähnliche Resultate ohne Beweise angegeben habe. No.

CHRYSTAL. On the inequality

$$mx^{m-1}(x-1) \gtrless x^m - 1 \gtrless m(x-1),$$

and its consequences. Edinb. M. S. Proc. VI. 29-33.

Der Beweis schliesst den Gebrauch unendlicher Reihen aus. Zuerst wird gezeigt, dass, wenn x, p, s alle positiv sind, p und s ausserdem ganz, dann $(x^p - 1)/p \gtrless (x^s - 1)/s$, je nachdem $p \gtrless s$ ist. Es ist nämlich

$$s(x^p - 1) \gtrless p(x^s - 1),$$

je nachdem $X \gtrless 0$, wo X für

$$(x-1)\{s(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1) - p(x^{s-1} + x^{s-2} + \dots + x + 1)\}$$

gesetzt ist. Ist $p > s$, so ist X gleich

$$(x-1)\{s(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x^s) - (p-s)(x^{s-1} + x^{s-2} + \dots + x + 1)\},$$

und falls $x > 1$:

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x^{\varepsilon}>(p-\varepsilon)x^{\varepsilon},$$
$$x^{\varepsilon-1}+x^{\varepsilon-2}+\cdots+1<\varepsilon x^{\varepsilon-1},$$

mithin

$$X>(x-1)\{\varepsilon(p-\varepsilon)x^{\varepsilon}-(p-\varepsilon)x^{\varepsilon-1}\}>0,$$

und ähnlich, wenn $x<1$, $X<0$; in beiden Fällen daher

$$(x^p-1)/p>(x^{\varepsilon}-1)/\varepsilon.$$

Dasselbe folgt für $x<1$. Indem nunmehr $x^{\frac{1}{\varepsilon}}$ statt x und m statt p/ε gesetzt wird, dehnt der Verf. die Ungleichheit auf positive Werte von m aus und beweist sie darauf für negative. Der Satz wird in einer etwas allgemeineren Form als sonst bewiesen und seine Bedeutung hervorgehoben. Gbs. (Lp.)

H. Simon. Zur Theorie der harmonischen Reihe. (Fortsetzung.) Hoppe Arch. (2) VI. 220-222.

Der Herr Verfasser vergleicht einige von Herrn Mildner abgeleitete Formeln (F. d. M. XIV. 1882. 182) mit der seinigen (F. d. M. XIX. 1887. 242) und begründet den Satz: Man erhält immer eine divergente Reihe, wenn man in der harmonischen Reihe auf p positive Glieder immer $p+q$ negative folgen lässt.

Wz.

F. J. Studnička. Ueber die Veränderlichkeit der Summe einer unendlichen Reihe mit ungleich bezeichneten Gliedern. Casop. XVII. 256. (Böhmisch.)

Bildet die Ergänzung einer Abhandlung, über welche in Bd. XIV. dieses Jahrbuches pag. 227 referirt wurde, betreffend die Reihe

$$S=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{k+i},$$

welche Schlömilch in seinem Uebungsbuch (II. pag. 171) vorführt.

Std.

E. Cesaro. Sur les transformations de la série de Lambert. Nouv. Ann. (3) VII. 374-382.

Herr Cesaro macht einige Bemerkungen zu der Clausen'schen Transformation (J. für Math. III) der Lambert'schen Reihe. Die Clausen'sche und eine von Herrn Cesaro gegebene Form dieser Reihe sind durch eine sehr schnelle Convergenz ausgezeichnet und daher für numerische Berechnungen sehr geeignet.

Wz.

E. CATALAN. Sur un cas particulier de la formule du binôme. Belg. Bull. XVI. 194. Mn.

J. DERUYTS. Sur certains systèmes de polynômes associés. Liège Mém. (2) XIV. 16 S.

Verallgemeinerung einer früheren Arbeit „Sur une classe de polynômes conjugués", welche im Bande XLVI. der Mém. couronnés in 4° der Belgischen Akademie erschienen ist (F. d. M. XVIII. 1886. 212, XVII. 1885. 218). Mn. (Lp.)

WELLMANN. Die Binomialcoefficienten und einige wichtigere Reihen. (Pensum der Prima.) Pr. Domgymn. Colberg.

Es werden behandelt die Binomialcoefficienten, die arithmetischen Reihen erster, zweiter, dritter und p^{ter} Ordnung, endlich die geometrischen Reihen. Wz.

McCULLOCH. A theorem in factorials. Annals of Math IV. 161-163.

Es ist:

$$\prod_{\nu=0}^{n-1}(a-\nu d) = a^n+\varphi_1(n)a^{n-1}d+\varphi_2(n)a^{n-2}d^2+\cdots+\varphi_{n-1}(n)ad^{n-1}.$$

Setzt man nun für beliebige Werte von a, d, n

$$a^n+\varphi_1(n)a^{n-1}d+\varphi_2(n)a^{n-2}d^2+\cdots = d^{a_n},$$

so gilt der Satz:

$$d^{(x+y)_n} = d^{x_n}+nd^{x_{n-1}}d^{y_1}+\binom{n}{2}d^{x_{n-2}}d^{y_2}+\cdots,$$

vorausgesetzt, dass dem numerischen Werte nach y kleiner als x ist. Wz.

V. Jamet. Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes. Mathesis VIII. 40-44, 89-91.

I. Ist $n = 2^p$, wobei p ganz sei, und a grösser als 1, so nimmt der Ausdruck $a_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$ ab, wenn gleichzeitig p wächst; man hat ferner $a_n > 1 - \frac{1}{a}$; folglich hat a_n eine endliche Grenze oberhalb $1 - \frac{1}{a}$. Nach Definition ist $\lim a_n = \log a$.

II. Ohne auf die Newton'sche Binomialreihe zurückzugreifen, beweist man, dass

$$a_n > \log a > a_n - \frac{1}{2n} a_n^2.$$

III. Die so definirten Logarithmen besitzen die folgenden Eigenschaften: 1. $\log(ab) = \log a + \log b$. 2. $\log\infty = \infty$, $\log 0 = -\infty$. 3. $\log a$ ist eine continuirliche Function von a. 4. Ist $\log x = 1$, so ist $x = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$.

Mn. (Lp.)

F. Giudice. Alcune formole ottenibili semplicemente che possono servire al calcolo approssimato delle funzioni circolari. Besso Per. mat. III. 1-7.

Es ist für $x \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$:

$$\sin x < \tfrac{1}{3}\left[8\sin\frac{x}{2} - \sin x\right]$$

$$< x < \sin x \left[1 + \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1 + \cos\frac{x}{2}\right) - 1}\right] < \operatorname{tang} x.$$

Ferner gelten für $n \overline{\overline{>}} 1$, $x \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2(n+1)}$ die folgenden Unglei-

chungen:

$$\frac{2(4n+1)^2}{(4n+1)^2-16n^2}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}$$

$$-\frac{16n^2}{(4n+1)^2-16n^2}\,\text{tang}\,x > x > \tfrac{4}{3}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}-\tfrac{1}{3}\,\text{tang}\,x;$$

$$\text{cotg}\,x+\frac{4n+1}{2(3n+1)}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}<\frac{1}{x}<\text{cotg}\,x+\tfrac{2}{3}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}.$$

Vi.

E. Ricordi. Sull' approssimazione dell' ordinaria interpolazione nelle tavole di logaritmi delle funzioni goniometriche. Besso Per. mat. III. 97-103, 137-144.

Ist a' ein angenäherter Wert von a und $|a-a'|<\alpha$, so ist:

$$|\log a-\log a'|<\tfrac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a'-\alpha},$$

$$|\sin a-\sin a'|<\alpha\cos\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$|\log\sin a-\log\sin a'|<\tfrac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\text{tang}\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha},$$

$$|\text{tang}\,a-\text{tang}\,a'|<\frac{\alpha}{\cos a'\cos(a'+\alpha)},$$

$$|\log\text{tang}\,a-\log\text{tang}\,a'|<\frac{\alpha}{\sin(2a'+\alpha)-3\alpha},$$

wo log den Briggs'schen Logarithmus bezeichnet.

Aus diesen Resultaten ergiebt sich mit Hülfe eines von Herrn Besso aufgestellten Satzes Folgendes:

Sind $\log\sin a$ und $\log\sin(a+d)$ genau bis auf g bekannt, und ist $0<h<d$, so ist der Maximalfehler bei der Berechnung von $\log\sin(a+h)$ durch die gewöhnliche Interpolation:

$$g+\tfrac{1}{2}\,\frac{d^2}{\sin^2 a}.$$

Ist dagegen $\log\sin(a+h)$ genau bis auf ε bekannt, so ist der Maximalfehler bei der Berechnung von $a+h$ durch die gewöhn-

liche Interpolation:

$$\frac{d}{\log\sin(a+d)-\log\sin a-2g}\left\{\tfrac{1}{2}\frac{d^2}{\sin^2 a}+\varepsilon+g\right\}.$$

Die entsprechenden Grössen für logtang sind:

$$g+\frac{2d^2}{\sin^2 2a}$$

bezw.:

$$\frac{d}{\log\operatorname{tang}(a+d)-\log\operatorname{tang} a-2g}\left\{\frac{2d^2}{\sin^2 2a}+\varepsilon+g\right\}.$$

Es möge hier, der Vollständigkeit wegen, der oben erwähnte Satz von Besso (Sulla approssimazione dell'ordinaria interpolazione nelle tavole di logaritmi; Annuario del R. Istituto Tecnico di Roma 1883) angeführt werden.

Sind $\log a$ und $\log(a+d)$ genau bis auf g bekannt, und ist $0 < h < d$, so ist der Maximalfehler bei der Berechnung von $\log(a+h)$ durch die gewöhnliche Interpolation:

$$g+\frac{d}{a}\log\left(1+\frac{d}{a}\right).$$

Vi.

Ed. Weyr. Extrait d'une lettre à M. Hermite. Darboux Bull. (2) XII. 25-28.

Der Herr Verfasser zeigt direct die auf anderem Wege von Herrn Hermite bewiesene Uebereinstimmung zweier Productdarstellungen für $\cos x$ und entwickelt nach zwei verschiedenen Methoden $\frac{1}{\cos x}$ in eine absolut convergirende Reihe. Wz.

De Presle. Au sujet du développement de $\cot z$ en série de fractions. S. M. F. Bull. XVI. 143-144.

Durch Anwendung eines Satzes von Herrn Mittag-Leffler ergiebt sich

$$\cot z = G(z)+\frac{1}{z}+\Sigma\frac{z}{n\pi(z-n\pi)} \qquad (n=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots);$$

$G(z)$ bedeutet hierin eine holomorphe Function von z. Der Herr Verfasser zeigt, dass $G(z)$ gleich Null ist. Wz.

L. SAALSCHÜTZ. Ueber die Entwickelung von $e^{-1:(1-x)}$ in eine Potenzreihe nebst einigen Anwendungen derselben. Hoppe Arch. (2) VI. 305-350.

Der Herr Verfasser setzt

$$e^{-1:(1-x)} = \frac{1}{e}(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)$$

und bestimmt die Grössen b_n. Die numerischen Werte für die b_n und $\beta_n = nb_n$ ergeben, dass die β_n in Gruppen von abwechselnd positiven und negativen Gliedern zerfallen; die Anzahl der Glieder einer Gruppe nimmt von Gruppe zu Gruppe zu; in jeder Gruppe nimmt der absolute Wert der Glieder anfangs zu, erreicht ein Maximum und nimmt dann wieder ab. Denkt man nun für grosse Werte von n den Zuwachs 1 von n durch dn bezeichnet, so ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\beta}{dn^2}+\frac{\beta}{n}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\beta}{d\xi^2}+\frac{\beta}{\lambda+\xi}=0,$$

wo $n=\lambda+\xi$ gesetzt ist und λ den Index des grössten Wertes von β (absolut genommen) in einer bestimmten Gruppe bedeutet. Diese Differentialgleichung wird für die ersten Annäherungen von $1:(\lambda+\xi)$, nämlich

$$\frac{\beta}{\lambda},\ \frac{\beta}{\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\lambda}\right),\ \frac{\beta}{\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\lambda}+\frac{\xi^2}{\lambda^2}\right)$$

integrirt; sodann die Convergenz der Reihe $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$ untersucht; dabei zeigt sich, dass sie für $x=1$ den Wert Null erhält. Zum Schluss werden als Anwendung die Integrale:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y},\quad \int_1^\infty e^{-y^4}dy,\quad \int_0^1 e^{-\frac{1}{z^p}}dz$$

in Reihen entwickelt. Wz.

A. CAYLEY. The investigation by Wallis of his expression for π. Quart. J. XXIII. 165-169.

Wallis geht von einer Formel aus, die in neuerer Bezeichnung

$$\int_0^1 (x-x^2)^n dx = \frac{1}{\varphi(n)}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

lautet; für $n = 1, 2, 3$ ist entsprechend $\varphi(n)$ gleich 2, 6, 20; für $n = \frac{1}{2}$ dagegen ist das Integral gleich $\frac{\pi}{8}$, daher $\frac{4}{\pi} = \varphi(\frac{1}{2})$. Um nun $\varphi(\frac{1}{2})$ zu berechnen, stellt Wallis eine Tabelle auf, deren Diagonalglieder $\varphi(-\frac{1}{2}), \varphi(0), \varphi(\frac{1}{2}), \varphi(1), \ldots, \varphi(\frac{7}{2}), \varphi(4)$ sind. Hierin sind die 1te, 3te, 5te, 7te Reihe unvollständig, werden jedoch nach Analogie des für die übrigen Reihen gültigen Gesetzes vervollständigt; die 3te Reihe lautet dann $\left(\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{4}{\pi}\right)$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi},\ 1,\ \frac{4}{\pi};\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{\pi};\ \frac{3.5}{2.4},\ \frac{4.6}{3.5}\cdot\frac{4}{\pi};$$
$$\frac{3.5.7}{2.4.6},\ \frac{4.6.8}{3.5.7}\cdot\frac{4}{\pi};\ \ldots;$$

wird diese beliebig weit fortgesetzt, so nähern sich die Glieder derselben, beständig wachsend, der Einheit, während für drei auf einander folgende x, y, z das Gesetz zu gelten scheint: $y:x > z:y$, oder $y^2 > xz$, daraus ergiebt sich die bekannte Formel für $\frac{4}{\pi}$. Wz.

W. H. H. Hudson, R. F. Davis. Solution of question 8913. Ed. Times XLVIII. 45-46.

Ist $\sin(x+h) = \sin x + h\cos(x+\theta h)$, so ist der Coefficient von h^4 bei der Entwickelung von θ nach Potenzen von h: $\frac{1}{5760}(57\operatorname{cotg} x + 55\operatorname{cotg}^3 x)$. Lp.

F. J. Studnička. Sur l'analogie hyperbolique du nombre π. Liège Mém. (2) XIV. 12 S.

Die Zahl $\Pi = 2\operatorname{argsh} 1 = 2\log(1+\sqrt{2})$ und nicht der doppelte Wert hat analoge Eigenschaften wie π. Mn. (Lp.)

R. E. Allardice. On Stirling's approximation to $n!$ when n is large. Edinb. M. S. Proc. VI. 22-24.

Ein durch elementare Methoden erbrachter Beweis für die Näherungsformel $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. Gbs. (Lp.)

A. Pánek. Ueber eine besondere unendliche Reihe. Casop. XVII. 227. (Böhmisch.)

Behandelt die combinirte Reihe

$$C+iS=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{n^{x,1}}{x!}\frac{a^x}{c^x}e^{i\beta x},$$

um daraus C und S zu finden, sowie specielle Reihensummirungen abzuleiten. Std.

Axel Thue. Om Irrationaliteten af Tallet e. Zeuthen Tids. VI. (4) 200-202.

Liouville hat bekanntlich zuerst bewiesen, dass die Zahl e keine Wurzel einer Gleichung zweiten Grades mit rationalen Coefficienten sein kann.

Durch ähnliche Betrachtungen wie die von Liouville angewandten wird hier nachgewiesen, dass e^2 keine Wurzel einer Gleichung zweiten Grades mit rationalen Coefficienten sein kann. V.

M. Martone. Dimostrazione della trascendenza del numero π. Napoli. Trani. 31 S.

Es ist dem Verfasser unbekannt, dass die Transcendenz der Zahl π schon seit 1882 von Lindemann (Ueber die Ludolph'sche Zahl, Math. Ann. XX. 213-225; F. d. M. XIV. 1882. 369) bewiesen worden ist. Er arbeitet ohne jedes Bedenken mit divergenten und mit halbconvergenten Reihen und scheint auch nicht zu wissen, dass die Summe von unendlich vielen rationalen Zahlen eine transcendente Zahl sein kann (siehe S. 29). Zur weiteren Charakterisirung seiner Untersuchungen mag Folgendes wohl genügen. Er gelangt zu den folgenden Formeln, die wir ohne jede Formänderung abschreiben wollen:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{-1}}\left\{(1+\sqrt{-1})^{\frac{\log\frac{\pi}{2m}}{\frac{1}{2}\log 2 \log e + \frac{1}{2}\log\frac{2}{\pi}}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{\log\frac{\pi}{2m}}{\frac{1}{2}\log 2 \log e + \frac{1}{2}\log\frac{2}{\pi}}}\right\},$$

$$e = \frac{2}{\sqrt{-1}}\left\{(1+\sqrt{-1})^{\frac{\log\frac{\pi}{m_1}}{\frac{1}{2}\log 2 \log e + \frac{1}{2}\log\frac{2}{\pi}}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{\log\frac{\pi}{m_1}}{\frac{1}{2}\log 2 \log e + \frac{1}{2}\log\frac{2}{\pi}}}\right\},$$

wo m, m_1 zwei zwischen 0,44 und 1,45 liegende Grössen bedeuten, und schliesst hieraus, wegen der bekannten Transcendenz der Zahl e, dass auch π eine transcendente Zahl ist!

Die Formel:

$$e = M_0 + M_1\frac{1}{\pi^2} + M_2\frac{1+\pi^2}{\pi^4} + M_3\frac{(1+\pi^2)(1+4\pi^2)}{\pi^6} + M_4\frac{(1+\pi^2)(1+4\pi^2)(1+9\pi^2)}{\pi^8} + \cdots$$

$\left(\text{wo } M_i = \frac{(2i-1)! + 2^{2i-1} i!(i-1)!}{(i!)^2(2i-1)!}\right)$, welche der Verfasser als einen besonderen Fall der von ihm aufgestellten Relation:

$$e^{\frac{\pi}{m}} = S_0 + S_1\frac{1}{m^2} + S_2\frac{1+m^2}{m^4} + S_3\frac{(1+m^2)(1+4m^2)}{m^6} + S_4\frac{(1+m^2)(1+4m^2)(1+9m^2)}{m^8} + \cdots$$

$\left(\text{wo } S_i = \frac{\frac{\pi}{m}(2i-1)! + 2^{2i-1} i!(i-1)!}{(i!)^2(2i-1)!}\right)$ erhält, ist schon längst bekannt; siehe Montferrier, Dictionnaire des sciences mathématiques, T. III, p. 270. Vi.

L. Hoesch. Ueber die Coefficienten des Ausdrucks $\Delta^n x^k$ und einige mit ihnen verwandte Zahlenverbindungen. Pr. Gymn. z. grauen Kloster Berlin.

Bei der Berechnung der Coefficienten des aus der Differenzenrechnung bekannten Ausdrucks für $\Delta^n x^k$ führt der Herr Verfasser die Grössen

$$\beta_\lambda^n = n^\lambda - \binom{n}{1}(n-1)^\lambda + \binom{n}{2}(n-2)^\lambda - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1},$$

$$\alpha_\lambda^n = \Sigma \frac{1}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_n!}, \quad \gamma_\lambda^n = \Sigma \frac{1}{\varepsilon_0!\,\varepsilon_1!\ldots\varepsilon_{n-1}!}$$

ein, worin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die Zahlen 1, 2, 3, ..., $\lambda-(n-1)$; $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ die Zahlen 0, 1, 2, ..., λ bedeuten, und die Summe der ε gleich λ ist; er leitet Beziehungen zwischen diesen Grössen und den Bernoulli'schen Zahlen ab und benutzt die α, β, γ einerseits zur Summirung der Potenzen der natürlichen Zahlen, andererseits zur Berechnung gewisser Determinanten, welche von den α, β, den Bernoulli'schen Zahlen oder den Binomialcoefficienten abhängen. Wz.

Williot. Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres de Bernoulli. S. M. F. Bull. XVI. 144-149.

Unter Benutzung einer von Herrn Seidel gegebenen Formel wird die Bernoulli'sche Zahl B_{2n} durch eine Determinante dargestellt; diese Determinante wird mittels des Staudt-Clausen'schen Gesetzes (vergl. F. d. M. XII. 1880. 128) umgeformt und zu drei Formeln specialisirt, welche für die Berechnung der Zahlen $B_{10}, B_{12}, \ldots, B_{24}$ sehr bequem sind. Wz.

F. J. van den Berg. Eenige formulen voor de berekening van de Bernoulliaansche en van de tangenten-coëfficiënten. Amst. Versl. en meded. (3) V. 388-397.

Nach Anleitung seiner früheren Untersuchungen über Reihenentwickelung (siehe F. d. M. XIII. 1881. 193) behandelt der Verfasser die Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen und der Tangenten-Coefficienten mittels der Entwickelung von zwei der einfachsten goniometrischen Functionen, nämlich von $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ und $\cot\frac{x}{2}$. In sehr symmetrischer Weise leitet er daraus die Reihen ab, welche die gewünschte Entwickelung liefern, und zeigt so-

dann, wie die Bernoulli'schen Zahlen in verschiedenen goniometrischen Reihenentwickelungen auftreten. Am Schluss der Abhandlung stellt er die über den Gegenstand vorhandene Literatur zusammen. G.

A. Berger. Sur une généralisation des nombres et des fonctions de Bernoulli. Stockh. Vetensk. Bihang. XIII. 43 S.

Der Herr Verfasser entwickelt

$$\frac{v}{e^v-1} \quad \text{und} \quad v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}$$

nach Potenzen von v und bezeichnet die Coefficienten:

$B(0)$, $B(1)$, $B(2)$, ..., resp. $\varphi(z,0)$, $\varphi(z,1)$, $\varphi(z,2)$, ...

als Bernoulli'sche Zahlen resp. Functionen; ebenso entwickelt er

$$\frac{v}{e^v-1}\sum_{r=1}^{\varepsilon\varDelta-1}\left(\frac{\varDelta}{r}\right)e^{\frac{rv}{\varepsilon\varDelta}} \quad \text{und} \quad \frac{e^{zv}-1}{e^v-1}\sum_{r=1}^{\varepsilon\varDelta-1}\left(\frac{\varDelta}{r}\right)e^{\frac{rv}{\varepsilon\varDelta}}$$

nach Potenzen von v und nennt die Coefficienten:

$B(0,\varDelta)$, $B(1,\varDelta)$, $B(2,\varDelta)$, ..., resp. $\varphi(z,0,\varDelta)$, $\varphi(z,1,\varDelta)$, $\varphi(z,2,\varDelta)$, ...

die zur Discriminante $\varDelta$ gehörigen Bernoulli'schen Zahlen und Functionen; $\varDelta$ bedeutet dabei eine fundamentale Discriminante, $\left(\frac{\varDelta}{r}\right)$ das Legendre'sche, durch Herrn Kronecker verallgemeinerte Zeichen, ε das Vorzeichen von $\varDelta$, so dass $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon\varDelta > 0$ ist. Die Eigenschaften dieser Zahlen und Coefficienten werden in acht Sätzen zusammengefasst, während ein neunter Satz sich mit der Function $-\varphi(z,1,\varDelta)$, $-B(1,\varDelta)$ beschäftigt. Wz.

De Presle. Dérivées successives d'une puissance entière d'une fonction d'une variable, dérivées successives d'une fonction de fonction et application à la détermination des nombres de Bernoulli. S. M. F. Bull. XVI. 157-162.

Der Herr Verfasser geht von dem bekannten Ausdruck für die m^{te} Ableitung eines Products von n Factoren einer Veränderlichen aus, erhält daraus durch Gleichsetzung aller Functionen

die m^{te} Ableitung der n^{ten} Potenz einer Function einer Veränderlichen und specialisirt diese Formel durch Gleichsetzung von n und m; er bestimmt die m^{te} Ableitung einer Function von einer Function einer Veränderlichen und giebt als Anwendung einen Ausdruck für die Bernoulli'schen Zahlen, nach welchem er B_6 numerisch berechnet. Wz.

M. Mollini. Formole sulle annualità in progressione aritmetica. Besso Per. mat. III. 14-19.

Wird am Ende des ersten Jahres die Summe a, am Ende des zweiten die Summe $a+d, \ldots$, am Ende des n^{ten} die Summe $a+(n-1)d$ bezahlt, so wird dadurch eine Schuld getilgt, deren gegenwärtiger Wert ist:

$$\Sigma_1 = \frac{q^n-1}{q^n(q-1)}a + \frac{d}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q^n(q-1)} - \frac{n}{q^n}\right),$$

wo $q = 1+r$ und r den Zins bezeichnet. Geschehen die Zahlungen am Anfang jedes Jahres, so kommt Σ_2 statt Σ_1 vor, wo $\Sigma_2 = q\Sigma_1$. Die gegenwärtige Schuld Σ_1 bezw. Σ_2 würde nach n Jahren bis zu $\Sigma_3 = q^n\Sigma_1$, bezw. $\Sigma_4 = q^n\Sigma_2 = q^{n+1}\Sigma_1$ steigen. Diese Relationen zwischen Σ_2 und Σ_1, Σ_3 und Σ_1, Σ_4 und Σ_2 sind ganz evident, und daher ist die selbständige Berechnung von Σ_2, Σ_3 und Σ_4 eine nutzlose Mühe. Vi.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.)

CH. STURM. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Revu et corrigé par E. Prouhet et augmenté de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques par H. Laurent. IXe édition, revue et mise au courant du nouveau programme de la Licence par A. de Saint-Germain. 2 vol. Paris. Gauthier-Villars et Fils. XXXII u. 563, X u. 657 S. gr. 8°.

Herr A. de Saint-Germain, welcher ausser einer Reihe wissenschaftlicher Abhandlungen in verschiedenen Zeitschriften den sehr guten Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle 1877 veröffentlicht hat, ist der dritte in der Folge der Herausgeber von Ch. Sturm's Cours d'Analyse; er beginnt sein Vorwort mit den Sätzen: „Der von Sturm an der École Polytechnique vorgetragene und von Prouhet herausgegebene Cours d'Analyse ist seit seinem ersten Erscheinen im Jahre 1857 eines der Werke geblieben, die am liebsten von denen benutzt werden, welche in die Infinitesimalrechnung eindringen wollen. Seine Klarheit und seine Einfachheit haben ihm einen Erfolg verschafft, der anhält und noch heute als gerechtfertigt erscheint.“ Obschon dieses

Urteil zunächst nur für Frankreich ausgesprochen ist, so muss man ihm auch für Deutschland beipflichten. Seit der Zeit, wo Ref. zu Anfang der sechziger Jahre studirte, ist das Werk wegen der vom letzten Herausgeber gerühmten Vorzüge, zu denen der fortwährende Hinweis auf die Bearbeitung von beigefügten Aufgaben zugesellt werden kann, auch an den deutschen Hochschulen ein beliebtes Lehrbuch gewesen. Mag auch ein Vergleich mit noch älteren Werken, wie z. B. mit Cournot's vortrefflichem Elementarlehrbuch der Theorie der Functionen, zeigen, dass St.'s Vorlesungen, die ja von dem zu früh verschiedenen Verfasser nicht mehr redigirt werden konnten, viel ärmer in der Entwickelung der philosophischen Grundlagen und der furchtbaren Gedanken der Infinitesimalrechnung sind; mögen deutsche Arbeiten des letzten Jahrzehnts wiederholt darauf hingewiesen haben, dass bei der Aufstellung der Begriffe und bei der Ableitung der grundlegenden Sätze eine gründlichere Fassung und eine grössere Strenge, als in den gangbarsten Lehrbüchern hergebracht ist, mit der Klarheit und Verständlichkeit nicht unverträglich sei: dennoch muss man zugestehen, dass ein Werk wie das vorliegende, von dem viele Mathematiker dankbar rühmen, dass sie ihm die ersten Anregungen zum Arbeiten schulden, das sich neben der Flut französischer „Cours d'Analyse" länger als dreissig Jahre behauptet hat und nicht unter dem Einflusse der äusseren Stellung seines Verfassers, sondern erst nach dem Tode seines geistigen Urhebers es zur neunten Auflage gebracht hat, dass dieses Werk einen wirklich tüchtigen Kern in sich bergen muss.

Um einzelne Lücken im Vortrage von St. auszufüllen, hatte schon Prouhet mehrere Noten zugefügt; später hat H. Laurent eine elementare Theorie der elliptischen Functionen (175 S. in Bd. II) angehängt, welche er ursprünglich für die Nouvelles Annales (1877-79) verfasst hatte. Gegenwärtig hat Herr de St.-G. den Stoff durch vier „Ergänzungsnoten" vermehrt, von denen zwei dem ersten, zwei dem zweiten Bande einverleibt sind. Die erste (26 S.) betrifft die Curven doppelter Krümmung, die zweite (15 S.) bezieht sich auf die unicursalen Curven und

die Reduction der elliptischen Integrale. Die dritte (17 S.) liefert Ergänzungen zur Theorie der krummen Oberflächen, die vierte endlich (9 S.) ist den Reihen von Fourier und Lagrange gewidmet. In der That sind besonders die in den beiden letzten Noten behandelten Gegenstände früher etwas zu kurz weggekommen, und bei den Fourier'schen Reihen vermisst man auch jetzt noch die Dirichlet'schen Kriterien, deren Existenz bloss erwähnt wird. Im übrigen hat der Herausgeber das algebraische Capitel über die Einheitswurzeln unterdrückt, dafür aber nach einer anderen Niederschrift von St.'s Vorlesungen ein neues Capitel über die Elimination der Constanten und die Vertauschung der Variabeln eingeschaltet. Ferner ist der ältere Beweis für die Taylor'sche Reihe durch den von Rouché ersetzt. Andere kleine Aenderungen, die übrigens mit grosser Vorsicht angebracht sind, müssen hier unerwähnt bleiben. Zu den Uebungsaufgaben, die schon immer den einzelnen Capiteln beigegeben waren, sind endlich noch viele neue hinzugetreten, die der Herausgeber teils dem anregenden Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal von Tisserand entlehnt, teils den questions de licence entnommen und am Ende der beiden Bände zusammengestellt hat. Lp.

H. Laurent. Traité d'analyse. Tome III. Calcul intégral. Intégrales définies et indéfinies. Paris. Gauthier-Villars et Fils. IV + 511 S. 8°.

Der dritte Band des umfangreichen Werkes, dessen beide ersten Teile in F. d. M. XVII. 236 u. XIX. 251 angezeigt sind, behandelt die Integralrechnung ohne die geometrischen Anwendungen, welche einem späteren Bande vorbehalten bleiben. Nach einem einleitenden Capitel über die Zerlegung der rationalen Brüche in Partialbrüche wird im zweiten Capitel die Berechnung der unbestimmten Integrale gelehrt, im dritten die Theorie der bestimmten Integrale gegeben, im vierten die Lehre von den vielfachen Integralen entwickelt und im fünften zu den Integralen der totalen Differentiale fortgeschritten. Hierauf folgt nach einer

Erweiterung des Functionsbegriffes von reellen Variabeln auf complexe das sechste Capitel mit der Theorie der zwischen complexen Grenzen genommenen Integrale und der Residuenrechnung von Cauchy. Die Integration durch Reihen bildet den Gegenstand des siebenten Capitels, in welchem die Ableitung und der Zusammenhang sehr vieler Reihen beleuchtet wird. Die Eigenschaften der monogenen und monodromen Functionen, welche im achten Capitel entwickelt werden, werden nach Berücksichtigung der Cauchy'schen Sätze und auch einiger Weierstrass'schen Untersuchungen bis zum Satze von Mittag-Leffler und seinen Anwendungen geführt. Das neunte Capitel handelt von den periodischen Functionen, insbesondere von den trigonometrischen Reihen, den Fourier'schen Integralen und zuletzt von der Weierstrass'schen Function ohne Ableitung, die der Verfasser im ersten Bande noch nicht kannte und zu der er sich auch jetzt noch skeptisch verhält. Im zehnten Capitel, das der Interpolation der numerischen Functionen gewidmet ist, wird auch die Gammafunction näher behandelt, ferner die Ableitungen mit beliebigem Index. Das elfte Capitel mit Formeln zur mechanischen Quadratur ist unvollständig, da es nur die elementarsten Formeln wirklich giebt, die Ableitung der Cotesischen bloss andeutet und die der Gauss'schen auf einen anderen Band verschiebt. Paradox ist der Ausspruch, dass die Simpson'sche Methode eine der schlechtesten sei, die man anwenden könnte. Wie in den früheren Bänden sind den einzelnen Capiteln Uebungsaufgaben und Noten beigegeben.

Lp.

A. Kleyer. I [illegible] Differentialrechnung. Bear-
[illegible]ch [illegible]tem. Stuttgart. Julius Maier.

[illegible]umgrösse [illegible]kalischen Natur
[illegible]sse, betra[illegible]rfasser dieselbe
[illegible]änderlic[illegible]stehend. Solche
[illegible]sind d[illegible]tiale. H.

P. Dziwiński. Die wichtigsten Sätze und Formeln der höheren Analysis. Lithographirt. Lemberg. (Polnisch.)

Algebraische Analysis, Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendungen. Dn.

O. Schlömilch. Handbuch der algebraischen Analysis. 6. Aufl. 2. Druck. Stuttgart. VIII u. 413 S.

S. Newcomb. Elements of the differential and integral calculus. New-York. (1887.)

H. St. J. Hunter. Key to Todhunter's Differential Calculus. London. Macmillan and Co. 152 S.

Anzeige in Nature XXXVII. 412. Lp.

A. Fuhrmann. Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Lehrbuch und Aufgabensammlung. In sechs Teilen, von denen jeder ein selbständiges Ganzes bildet. Teil I. Naturwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. Berlin. Ernst u. Korn. XII u. 148 S. 8°.

Das Buch, welches als selbständiges Werk den zweiten Titel trägt „Naturwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. Lehrbuch und Aufgabensammlung", soll wie die übrigen geplanten Teile eine Ergänzung und Erweiterung der vorhandenen Aufgabensammlungen bilden, indem die behandelten Beispiele den Fachgebieten der Studirenden entnommen sind. Für „Studirende und Ausübende der Naturwissenschaften" bestimmt, behandelt die vorliegende Schrift in fünf Capiteln 1) Differenzen und Differentiale, einfache und mehrfache Differentiation; 2) Linien und Flächen; 3) vieldeutige Symbole; 4) Maxima und Minima; 5) Reihen. Ein alphabetisches Sachverzeichnis er-

leichtert die Benutzung, und ein Literaturverzeichnis, welches die benutzten Quellen angiebt, soll zum Selbstschaffen anregen. Die aufgenommenen Beispiele sind solche, die in der Mechanik, Physik, Geodäsie etc. behandelt zu werden pflegen, von denen daher auch Autenheimer aus den gleichen Gründen wie der Verfasser manche in sein Elementarlehrbuch der Differential- und Integralrechnung aufgenommen hat. Wie ansprechend auch der Gedanke ist, die Anwendungen der Infinitesimalrechnung den Studirenden interessanter zu gestalten, so ist doch nicht zu leugnen, dass viele der vorgeführten Betrachtungen dadurch unbefriedigend wirken, dass sie mit Formeln beginnen, deren Begründung in anderen Vorträgen gegeben wird; danach ist es wohl natürlich, diesen Vorträgen auch die Ausnutzung des Instrumentes der Infinitesimalrechnung zu überlassen. Wie von einem langjährigen bewährten Lehrer zu erwarten war, ist die Auswahl der Beispiele eine sehr vielseitige. Vielleicht hätte die Astronomie auch Berücksichtigung finden können, wozu Brünnow's sphärische Astronomie geradezu einladet. Ebenso hätten manche Aufgaben aus den Schellbach'schen Sammlungen wohl Beachtung verdient. Von Einzelheiten sei u. a. erwähnt, dass die Lösung der Aufgabe § 66 nicht bis zum einfachsten Resultate durchgeführt ist. Wenn ein Punkt U einer gegebenen Geraden zu finden ist, von welchem aus eine gegebene Strecke AB unter dem grössten Winkel BUA erscheint, so ist U Berührungspunkt des durch A und B gehenden Kreises, der die gegebene Gerade tangirt.

Lp.

O. Stolz.* Ueber zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen. Math. Ann. XXXI. 601-607.

Ist ζ eine Grösse, die kleiner als jede absolute reelle Zahl ist, und sind sowohl die Vielfachen $\zeta . n$, wo n jede natürliche Zahl, als auch die Producte $\zeta . \nu$, wo ν jede transfinite Ordnungszahl sein darf, erklärt, so muss jedes der letzten Producte kleiner als jede noch so kleine absolute reelle Zahl sein. Der Herr Verfasser zeigt, dass mit diesem Satze des Herrn G. Cantor

(Zeitschrift für Philos. XCI. 121; cf. F. d. M. XIX. 1887. 46) die Theorie der bisher aufgestellten zwei Arten von unendlich kleinen Grössen (cf. des Verfassers Vorlesungen über allgemeine Arithmetik I. 205-214) keineswegs in Widerspruch steht. T.

P. Mansion. Méthode des infiniment petits. Mathesis VIII. 149-157.

Genauer Sinn des Princips der Substitution unendlich kleiner Grössen. Mn. (Lp.)

R. Bettazzi. Sulla derivata totale delle funzioni di due variabili reali e sull' inversione delle derivazioni. Batt. G. XXVI. 21-32.

Fortsetzung der Arbeit Batt. G. XXII. 133 ff., über welche man F. d. M. 1884. XVI. 227 vergleiche. Es handelt sich um den Zusammenhang zwischen der Existenz der totalen Ableitung und der der gemischten zweiten Ableitungen einer Function von zwei reellen Veränderlichen. T.

F. J. Stieltjes. Sur une généralisation de la formule des accroissements finis. Nouv. Ann. (3) VII. 26-31.

Für die von Herrn H. A. Schwarz (Annali di Mat. (2) X. 129 ff.) gegebene Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes, worüber man das Referat F. d. M. XIII. 1881. 311 f. vergleiche, wird ein elementarerer (Integrationen nicht erfordernder) Beweis gegeben. Derselbe ergiebt sich sehr einfach aus der wiederholten Anwendung des Lemmas: Wenn eine Function $f(t)$, welche nebst ihren Ableitungen bis zur $(n-2)^{\text{ten}}$ einschliesslich innerhalb eines gewissen Intervalls endlich, eindeutig und stetig ist und auch eine endliche $(n-1)^{\text{te}}$ Ableitung besitzt, für n verschiedene Werte dieses Intervalls $t_1, t_2, \dots, t_n$ verschwindet, so giebt es eine zwischen dem kleinsten und dem grössten dieser Werte ge-

legene Zahl ξ, für welche $f^{(n-1)}(\xi) = 0$ ist. (Man vergleiche den für den Mittelwertsatz gegebenen Beweis von Serret, Cours de calcul diff. et intégr. T. I. éd. II. p. 17 ff.) T.

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

P. S. Nekrassoff. Allgemeines Differentiiren. Mosk. math. Samml. XIV. 45-163. (Russisch.)

Die dem Andenken von Lettnikoff gewidmete Arbeit verallgemeinert die Theorie der Differentiation zwischen Grenzen, die Lettnikoff in die Analysis eingeführt hatte, und führt sie auch auf dem Gebiete der complexen Veränderlichen durch.

Das erste Capitel beschäftigt sich mit der Klassification der Functionen in Bezug auf eine Kontur L, welche eine gegebene Gruppe der singulären Punkte umschliesst. Wenn eine Function $f(z)$ bei der Umschreibung der Kontur L in positiver Richtung den Factor $e^{2\pi q i}$ annimmt, so heisst sie eine Function der Klasse $(q, 0)$; jede solche Function hat die Form $(z-u)^q\varphi(z)$, wo u ein Punkt innerhalb der Fläche der Kontur L (Focus) und $\varphi(z)$ eine Function von der Klasse $(0,0)$ ist. Eine Function, die in der Form

$$(z-u)^q \log^\mu(z-u)\varphi(z)$$

sich darstellen lässt, heisst eine Function der Klasse (q,μ). Die Function, welche als eine Summe der n Functionen verschiedener Klassen in Bezug auf die Kontur L und den Focus u darstellbar ist, heisst eine reductible Function. Die Darstellung der Function $f(z)$ durch die Summe der Functionen verschiedener Klassen wird immer mit Hülfe analytischer Operationen gewonnen. Die Klassification der Functionen kann auch auf die

zweifach zusammenhängende Fläche T bezogen werden, welche die Kontur L enthält, und ausserhalb welcher die gegebene Gruppe der singulären Punkte der Function liegt. Die Function $f(z)$ ist eine mehrdeutige Function der Punkte der Fläche T, kann aber als eindeutig betrachtet werden, wenn man anstatt der Fläche T die correspondirende mehrblättrige Riemann'sche Fläche T_1 betrachtet.

Die Betrachtung dieser mehrblättrigen Fläche erleichtert die Ableitung verschiedener wichtiger Relationen; es folgt z. B. für die complexen Integrationswege eine Erweiterung der fundamentalen Formel von Lettnikoff:

$$(A) \qquad \int_a^x dz \int_a^z F(z,y)dy = \int_a^x dy \int_y^x F(z,y)dz.$$

Diese Formel (A) benutzt Lettnikoff zum Studium der Differentialquotienten zwischen Grenzen bei beliebigem p:

$$[D^p f(x)]_a^x \text{ und } [D^p f(x)]_\infty^x.$$

Der Verfasser verallgemeinert diese Symbole, indem er als neu einführt:

$$[D^p f(x)]_{(ax)} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \int_{(ax)} (x-z)^{n-p-1} f(z)dz \right\},$$

$$[D^p f(x)]_{(\infty x)} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{(\infty x)} (x-z)^{n-p-1} f(z)dz.$$

Hier bedeuten (ax) und (∞x) gewisse complexe Integrationswege zwischen den Punkten a und x, resp. ∞ und x; n muss grösser als der reelle Teil von p sein, und $f(x)$ muss gewissen Bedingungen in Betreff des Unendlichwerdens genügen.

Der eigentlichen „Grunddifferentiation mit beliebigem Index", auf eine zweifach zusammenhängende Fläche T bezogen, ist das zweite Capitel gewidmet. Hier wird das Symbol

$$M(p,n,x) = \frac{A_q}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \int_a^{(x)} (x-z)^{n-p-1} f(z)dz \right\}$$

studirt, wenn $f(x)$ eine Function der Klasse $(q,0)$ und n grösser als der reelle Teil von p ist; das Integral erstreckt sich über die Kontur L vom Punkte x; $A_q = e^{2\pi q i}{}^{\frac{1}{}}-1$. Es wird bewiesen,

dass der betrachtete Ausdruck von n und von der Form der Kontur L unabhängig ist, wenn nur diese Kontur immer durch den Punkt x geht. Diesen Ausdruck kann man daher betrachten als eine Derivirte der Ordnung p, bezogen auf die zweifach zusammenhängende Fläche T, und er wird durch das Symbol $\left[\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right]_T$ bezeichnet. In der That wird bewiesen, dass dieses Symbol alle Eigenschaften des gewöhnlichen Differentialquotienten hat: 1. $\left[\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right]_T = f^{(m)}(x)$, wenn m eine ganze positive Zahl ist.

2. $\left[\frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right)\right]_T = \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right]_T = \left[\frac{d^{p+m} f(x)}{dx^{p+m}}\right]_T$, wenn m eine ganze positive Zahl ist.

3. $\left[\frac{d^{p_1}}{dx^{p_1}} \cdot \frac{d^p f(x)}{dx^p}\right]_T = \left[\frac{d^{p+p_1} f(x)}{dx^{p+p_1}}\right]_T = \left[\frac{d^p}{dx^p} \cdot \frac{d^{p_1} f(x)}{dx^{p_1}}\right]_T$, wenn die Differenzen $q-p$ und $q-p_1$ nicht Null oder ganze Zahlen sind.

4. Die Formel von Leibniz hat auch für das neue Symbol statt.

Das Symbol $\left[\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right]_T$ kann in verschiedener Weise dargestellt werden; z. B. haben wir

$$\left[\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right]_T = \frac{A_q}{\Gamma(n-p)} \int_{(L)}^{(x)} (x-z)^{n-p-1} f^n(z)\,dz$$

$$= \frac{A_q}{\Gamma(-p)} \int_L^{(x)} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{p+1}}$$

(unter der Bedingung, dass der reelle Teil von p positiv ist). Es stellt eine endliche und stetige Function der Klasse $(q-p, 0)$ dar und kann, wie ein bemerkenswertes Theorem zeigt, auf das Symbol $\left[\frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{(x-u)^q}{y-x}\right)\right]_T$ reducirt werden, wenn man das bekannte Theorem von Cauchy für die Darstellung der Function durch ein complexes Integral benutzt.

Für eine reducible Function

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots,$$

wo $f_0(x), f_1(x), \ldots$ Functionen verschiedener Klassen $(q_0, 0), (q_1, 0), \ldots$ sind und ausserdem kein q Null oder eine ganze Zahl ist, wird das Symbol $\left[\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right]_T$ durch die Summe definirt:

$$\left[\frac{d^p f_0(x)}{dx^p}\right]_T + \left[\frac{d^p f_1(x)}{dx^p}\right]_T + \cdots,$$

und es zeigt sich, dass dieses Symbol alle Eigenschaften des gewöhnlichen Differentialquotienten hat, wenn nur keine der Differenzen $q_0 - p, q_1 - p, \ldots$ Null oder eine ganze Zahl ist. Falls die Function $f(x)$ von der Klasse (q, μ) ist, wo q nicht Null oder eine ganze Zahl ist, wird diese Function betrachtet als

$$\lim \{ h^{-\mu} [(x-u)^h]^\mu (x-u)^q \varphi(x) \}_{h=0}.$$

Das in solcher Weise auch für diesen Fall eingeführte Symbol besitzt auch unter gewissen Bedingungen alle Eigenschaften des gewöhnlichen Differentialquotienten. Endlich wenn einige der q Null oder ganze Zahlen sind, so werden die früher eingeführten Symbole unendlich. Das führt zu einem neuen Symbole „der Grenzdifferentiation mit dem Hauptfocus a". Dieses Symbol wird definirt durch die Gleichung

$$\left[\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right]_T^{(a)} = \lim \left\{\left[\frac{d^p (x-a)^h f(x)}{dx^p}\right]_T\right\}_{h=0}.$$

Falls die Bedingungen der Möglichkeit dieses Symbols erfüllt sind, bestehen auch für dasselbe alle Eigenschaften der früheren.

Die „Grenzdifferentiation" kann noch verallgemeinert werden. Es sei nämlich das Symbol $D^p\{(x-u)^q \varphi(x)\}$ durch die Gleichung definirt:

$$D^p\{(x-u)^q \varphi(x)\} = F(p,q) \left[\frac{d^p (x-a)^q \varphi(x)}{dx^p}\right]_T.$$

Damit dieses Symbol D alle Eigenschaften des gewöhnlichen Symbols der Differentiation besitzt, muss die Function $F(p,q)$ den Gleichungen:

$$F(p,q) . F(p_1, q-p) = F(p+p_1, q) \text{ und } F(m,q) = 1$$

(wo m eine beliebige ganze Zahl ist) genügen.

Die Function $F(p,q)$ heisst dann der Modul der Differentia-

tion. Der Fall, in welchem man hat

$$F(p,q) = \frac{e^{\pi pi}\sin \pi q}{\sin \pi(q-p)},$$

verdient besondere Beachtung. Dann wird das Symbol $D^p f(x)$ durch $\left[\frac{\partial^p f(x)}{\partial x^p}\right]_T$ bezeichnet, und es werden die Bedingungen der Möglichkeit sowohl dieses Symbols als auch des Grenzfalls $\left[\frac{\partial^p f(x)}{\partial x^p}\right]_T^{(a)}$ untersucht.

Die Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen

$$\left[\frac{d^p y}{dx^p}\right]_T = f(x) \text{ und } \left[\frac{\partial^p y}{\partial x^p}\right]_T = f(x)$$

bilden das Ende des Capitels.

Das dritte Capitel widmet der Verfasser der Erklärung der Beziehungen zwischen den neuen Symbolen und den im ersten Capitel erweiterten Lettnikoff'schen Symbolen. Es wird gezeigt, dass die letzteren entweder als Grenzfälle der neuen betrachtet werden können, oder dass sie unter gewissen Bedingungen vollkommen mit ihnen coincidiren. Die neuen Symbole unterscheiden sich aber wesentlich von den alten dadurch, dass sie noch in den Fällen bestehen, in welchen die alten Symbole unmöglich werden. Diesen Vorteil der Einführung neuer Symbole zeigt der Verfasser durch die Anwendung auf die Integration der Differentialgleichung:

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2y}{dx^2} + (c+hx)\frac{dy}{dx} + ky = 0.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung können durch die neuen Symbole auch bei solchen Werten der Parameter ausgedrückt werden, bei welchen die Symbole von Lettnikoff unmöglich werden.

Es werden am Ende des Capitels die Beziehungen auch zu den anderen Theorien des „allgemeinen Differentiirens" (Liouville, Kelland, Euler, Peacock) gezeigt.

Im vierten Capitel beschäftigt sich der Verfasser mit den Eigenschaften der Symbole:

$$[\Delta(p,\varrho)f(x)]_T^{(u)} = (x-u)^{p-\varrho}\left[\frac{d^p\{(x-u)^\varrho f(x)\}}{dx^p}\right]_T^{(u)},$$

$$[\nabla(p,\varrho)f(x)]_T^{(u)} = (x-u)^{p-\varrho}\left[\frac{\partial^p\{(x-u)^\varrho f(x)\}}{\partial x^p}\right]_T^{(u)},$$

und in einem Anhange zu der Arbeit zeigt er, dass in der neuen Theorie die Frage der „complementären Functionen" nicht zu Missverständnissen Anlass geben kann. Wi.

O. Schlömilch. Ueber die Differentiation der Potenz, des Logarithmus und der Exponentialgrösse. Hoffmann Z. XIX. 81-83.

Die drei Differentialformeln werden ohne Anwendung der Binomialformel mit Benutzung des Satzes gefunden, dass die Differenz zweier gleich hohen ganzen Potenzen durch die Differenz der Grundgrössen teilbar ist. Lg.

W. Kretkowski. Ueber Differentiation gewisser unendlicher Ausdrücke. Lemberg. „Muzeum". 495-498. (Polnisch.)

Ist

$$u = F\{z, F[z, F(z\ldots)]\}$$

ein convergenter unendlicher Ausdruck, so hat man

$$u = F(z, u)$$

und daraus

$$\frac{du}{dz} = \frac{dF}{dz}\left(1-\frac{dF}{du}\right)^{-1}.$$

Der Verfasser wendet diese Formel auf unendliche Kettenbrüche und Ausdrücke von der Form

$$u = \sqrt{f(z)+\sqrt{f(z)+\sqrt{f(z)+\cdots}}}$$

an. Dn.

R. Hoppe. Bemerkung zu der Formel für das Differential einer Function mehrerer Variabeln. Hoppe Arch. (2) VI. 351-352.

Ist $f(x, y)$ nebst seinen partiellen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung stetig in Bezug auf x und y einzeln, so ist

$$\lim_{u=0, v=0} \frac{f(x+u, y+v)-f(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v}$$

gleich 1, wenn die beiden Terme des Nenners gleiche Vorzeichen haben; dagegen kann, wenn diese Einschränkung fallen gelassen wird, der Grenzwert jeder vorgegebenen Grösse gleich, auch unendlich gross und unendlich klein gemacht werden. T.

Marchand. Développement de l'accroissement d'un polynôme entier suivant les puissances des accroissements des variables. Nouv. Ann. (3) VII. 456-461.

Als symbolische Bezeichnung wird gesetzt:

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_p x_p)^n = b_x^n.$$

Haben $x_1, \ldots, x_p$ Incremente $y_1, \ldots, y_p$, so wird der Dignand $= b_x + b_y$, und das Increment von b_x^n geht aus der Entwickelung von $(b_x + b_y)^n$ hervor, deren Coefficienten dieselben sind wie die der partiellen Differentialquotienten von b_x^n. H.

R. Perrin. Sur quèlques familles d'opérateurs différentiels. C. R. CVI. 1131-1135.

Der Verfasser betrachtet folgende auf die $\mu+1$ Veränderlichenreihen $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n'}$; $a^\mu_0, a^\mu_1, \ldots, a^\mu_{n(\mu)}$ bezüglichen Differentiationsprocesse

$$\zeta_p = \sum_\mu \left[a_0 \frac{d}{da_p} + \frac{(p+1)!}{p!\,1!} a_1 \frac{d}{da_{p+1}} + \frac{(p+2)!}{p!\,2!} a_2 \frac{d}{da_{p+2}} + \cdots\right],$$

$$\omega_p = \sum_\mu \left[a_1 \frac{d}{da_p} + \frac{(p+1)!}{p!\,1!} a_2 \frac{d}{da_{p+1}} + \frac{(p+2)!}{p!\,2!} a_3 \frac{d}{da_{p+2}} + \cdots\right],$$

$$\eta = \sum_\mu \left[n a_1 \frac{d}{da_0} + (n-1) a_2 \frac{d}{da_1} + \cdots\right].$$

Für die wechselseitige Anwendung dieser Processe gelten die

Formeln

$$\zeta_p \zeta_q - \zeta_q \zeta_p = 0,$$

$$\omega_p \omega_q - \omega_q \omega_p = (p-q)\frac{(p+q-1)!}{p!\,q!}\omega_{p+q-1},$$

$$\zeta_q \omega_p - \omega_p \zeta_q = \frac{(p+q-1)!}{(p!\,q-1)!}\zeta_{p+q+1},$$

$$\zeta_p \eta - \eta \zeta_p = (n-p+1)\zeta_{p-1} - 2p\omega_p.$$

Ht.

G. Ricci. Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nella analisi applicata. Aus dem III. Bde. der Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario della origine della Università di Bologna. 3 Vol. Padova. Tipografia del Seminario. 1888. 23 S. 4°.

Die Definition der covarianten Ableitung wurde vom Verfasser in einer früheren Arbeit (Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale, Rom. Acc. L. Rend. (4) III_1. 15-18) aufgestellt, über welche im vorigen Jahrgange S. 128 berichtet wurde. Ist:

$$\varphi^2 = \sum_{r,s} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

eine quadratische Differentialform mit n Variabeln $x_1, \dots, x_n$, $|a^{(pq)}|$ die reciproke Determinante von $|a_{pq}|$, setzt man:

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial a_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{si}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i}\right\} = a_{rs,i},$$

und bezeichnet:

$$[U_{r_1 \dots r_m}] \qquad (r_1 = 1, \dots, n; \dots; r_m = 1, \dots, n)$$

ein m-faches Functionensystem, d. i. ein System von n^m Functionen, $U_{r_1 \dots r_m}$, welche infolge jeder beliebigen Coordinatentransformation eine lineare Substitution erleiden, so ist die „zur Form φ^2 covariante Derivation" diejenige Operation, welche $[U_{r_1 \dots r_m}]$ in $[U_{r_1 \dots r_{m+1}}]$ überführt, wo:

$$U_{r_1 \dots r_{m+1}} = \frac{\partial U_{r_1 \dots r_m}}{\partial x_{m+1}} - \sum_{p,q} a^{(pq)} \sum_{h=1}^{m} a_{r_h r_{m+1}, p}\, U_{r_1 \dots r_{h-1} q r_{h+1} \dots m}.$$

Ist $[U^{(r_1 \dots r_m)}]$ ein System von derselben Beschaffenheit wie $[U_{r_1 \dots r_m}]$, so führt die „zu φ contravariante Derivation“ $[U^{(r_1 \dots r_m)}]$ in $[U^{(r_1 \dots r_{m+1})}]$ über, wo:

$$U^{(r_1 \dots r_{m+1})} = \sum_s a^{(r_{m+1} s)} \left\{ \frac{\partial U^{(r_1 \dots r_m)}}{\partial x_s} + \sum_{p,q} a_{qs,p} \sum_{h=1}^{m} a^{(r_h p)} U^{(r_1 \dots r_{h-1} q r_{h+1} \dots m)} \right\}.$$

Werden die Variabeln x_i durch die Variabeln ϱ_i ersetzt, und schliesst man die auf die neuen Variabeln bezüglichen Ausdrücke in (runde) Klammern ein, so dass z. B.:

$$\varphi' = \sum_{p,q} (a_{pq})\, d\varrho_p\, d\varrho_q$$

ist, so heisst $[U_{r_1 \dots r_m}]$ oder $[U^{(r_1 \dots r_m)}]$ ein covariantes oder contravariantes m-faches System, je nachdem für dasselbe die Transformationsgleichungen:

$$(U_{r_1 \dots r_m}) = \sum_{h_1, \dots h_m} U_{h_1 \dots h_m} \frac{\partial x_{h_1}}{\partial \varrho_{r_1}} \cdots \frac{\partial x_{h_m}}{\partial \varrho_{r_m}},$$

oder:

$$(U^{(r_1 \dots r_m)}) = \sum_{h_1, \dots h_m} U^{(h_1 \dots h_m)} \frac{\partial x_{r_1}}{\partial \varrho_{h_1}} \cdots \frac{\partial x_{r_m}}{\partial \varrho_{h_m}}$$

gelten. Z. B. ist $[a_{pq}]$ ein covariantes zweifaches System, weil:

$$(a_{pq}) = \sum_{r,s} a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial \varrho_p} \frac{\partial x_s}{\partial \varrho_q};$$

dagegen ist $[a^{(pq)}]$ ein contravariantes zweifaches System, weil:

$$(a^{(pq)}) = \sum_{r,s} a^{(rs)} \frac{\partial x_p}{\partial \varrho_r} \frac{\partial x_q}{\partial \varrho_s}.$$

Es gilt nun der Satz: Aus einem co(contra)varianten m-fachen Systeme entsteht durch co(contra)variante Derivation ein co(contra)variantes $(m+1)$-faches System.

Der Uebergang von einem covarianten m-fachen Systeme $[U_{r_1 \dots r_m}]$ zu einem contravarianten m-fachen Systeme $[U^{(q_1 \dots q_m)}]$ und umgekehrt kann durch folgende Gleichungen bewerkstelligt werden:

$$U^{(q_1 \dots q_m)} = \sum_{r_1, \dots, r_m} a^{(r_1 q_1)} \dots a^{(r_m q_m)} U_{r_1 \dots r_m},$$

$$U_{r_1 \dots r_m} = \sum_{q_1, \dots q_m} a_{r_1 q_1} \dots a_{r_m q_m} U^{(q_1 \dots q_m)}.$$

Die co(contra)variante Derivation ist distributiv. Dagegen ist sie in Bezug auf die Indices nicht commutativ; man findet nämlich:

$$U_{r_1 \dots r_{m-2} r_{m-1} r_m} - U_{r_1 \dots r_{m-2} r_m r_{m-1}} = \sum_{p,q} a^{(pq)} \sum_{h=1}^{m-2} a_{p r_h, r_{m-1} r_m} U_{r_1 \dots r_{h-1} q r_{h+1} \dots r_{m-2}},$$

$$U^{(r_1 \dots r_{m-2} r_{m-1} r_m)} - U^{(r_1 \dots r_{m-2} r_m r_{m-1})} = \sum_{p,q,s,t} a^{(r_m s)} a^{(r_{m-1} t)} \sum_{h=1}^{m-2} a^{(r_h p)} a_{pq,st} U^{(r_1 \dots r_{h-1} q r_{h+1} \dots r_{m-2})},$$

wo:

$$a_{ih,gk} = \frac{\partial a_{ig,h}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{ik,h}}{\partial x_g} + \sum_{r,s} a^{(rs)} (a_{ik,r}\, a_{hg,s} - a_{ig,r}\, a_{hk,s}).$$

Die Commutativität findet nur in zwei Fällen statt; erstens, wenn $m = 2$, weil jedes Glied an der rechten Seite der obigen Gleichungen eine Summe $\sum_{h=1}^{m-2}$ als Factor enthält; zweitens, wenn der n-dimensionale Raum, dessen Linienelement φ ist, ein euklidischer ist, weil dann sämtliche $a_{ih,gk}$ identisch verschwinden. Im allgemeinen besteht die Commutativität nur zwischen den zwei ersten Indices; d. h. es ist:

$$U_{r_1 r_2 r_3 \dots r_m} = U_{r_2 r_1 r_3 \dots r_m}, \qquad U^{(r_1 r_2 r_3 \dots r_m)} = U^{(r_2 r_1 r_3 \dots r_m)}.$$

Eine weitere Eigenschaft der co(contra)varianten Ableitungen ist folgende: Bestehen die Relationen:

$$U_{r_1 \dots r_m} = U_{r_1 \dots r_i} U_{r_{i+1} \dots r_m},$$

oder:

$$U^{(r_1 \dots r_m)} = U^{(r_1 \dots r_i)} U^{(r_{i+1} \dots r_m)},$$

so folgt hieraus:

$$U_{r_1 \dots r_m r_{m+1}} = U_{r_1 \dots r_i} U_{r_{i+1} \dots r_m r_{m+1}} + U_{r_{i+1} \dots r_m} U_{r_1 \dots r_i r_{m+1}},$$

bezw.:

$$U^{(r_1 \dots r_m r_{m+1})} = U^{(r_1 \dots r_i)} U^{(r_{i+1} \dots r_m r_{m+1})} + U^{(r_{i+1} \dots r_m)} U^{r_1 \dots r_i r_{m+1})}.$$

Nachdem der Verfasser die Principien seiner Theorie auseinandergesetzt hat, wendet er dieselbe auf folgende Gegenstände an: a) Gleichungen der Krümmungslinien; b) Gleichungen der conjugirten und der asymptotischen Linien; c) Bedingungsgleichungen für die Coefficienten der Deformation eines elasti-

schen Körpers; d) Formeln aus der Kinematik der elastischen Körper; e) Elasticitätsgleichungen im euklidischen Raume; f) Gleichung der Bewegung der Wärme im euklidischen Raume.

Eigentlich werden statt der Gleichungen c), d) allgemeine, in einem beliebigen n-dimensionalen Raume geltende Gleichungen aufgestellt, welche sich für den gewöhnlichen Raum auf c) bezw. d) reduciren.. Die Gleichungen c) sind gleichzeitig von Herrn Padova (Sull' uso delle coordinate curvilinee in alcuni problemi della teoria matematica della elasticità; Bericht in diesem Bande) für den Fall eines 3-dimensionalen Raumes von constantem Krümmungsmasse, später aber von demselben (Sulle deformazioni infinitesime, Rom. Acc. L. Rend. (4) V_1. 174-8) für den allgemeinsten Fall gefunden worden. Es ist noch zu bemerken, dass die Gleichungen 21, 22 und 23 S. 18 durch die folgenden zu ersetzen sind:

$$G_{hl,ji} - G_{jl,hi} = 0,$$
$$G_{hl,ji} + G_{hj,li} + G_{hl,ij} = 0,$$
$$a_{ih,ljk} = 0,$$

wonach die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen E sich in jedem Falle zu $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ reducirt. (Siehe die zuletzt erwähnte Note von Padova, S. 176 Anm.) Vi.

G. Ricci. Sulla classificazione delle forme differenziali quadratiche. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV. 203-207.

Unter der Klasse der quadratischen Differentialform

$$\sum^{r,s} a_{rs}dx_r dx_s \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

versteht der Verfasser die kleinste ganze Zahl h, für welche es möglich ist, dieselbe in die Gestalt

$$\sum^{t} dy_t^2 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n+h)$$

zu transformiren, wo die y geeignet gewählte Functionen der Veränderlichen x sind.. Die Bestimmung dieser Klasse wird — unter Benutzung der Theorie der orthogonalen Substitutionen — auf die Untersuchung eines Systems von Gleichungen zurückge-

führt, deren Coefficienten aus den gegebenen Functionen a_{rs} und deren Differentialquotienten nach den Veränderlichen x zu bilden sind. In den speciellen Fällen $h = 0$ und $h = 1$ findet der Verfasser diejenigen Kriterien wieder, zu denen er bereits in einer früheren Arbeit gelangt ist. Ht.

HAZZIDAKIS. Ueber invariante Differentialausdrücke.

J. für Math. CIV. 102-115.

Bezeichnet man mit X, Y, Z die rechtwinkligen Coordinaten einer Raumcurve, so ist der Ausdruck für den Krümmungsradius

$$\frac{(dX^2+dY^2+dZ^2)^{\frac{3}{2}}}{[(dXd^2Y-dYd^2X)^2+(dYd^2Z-dZd^2Y)^2+(dZd^2X-dXd^2Z)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

gegenüber der Substitution

$$\begin{aligned} dX &= wdx, & d^2X &= wd^2x+dwdx,\\ dY &= wdy, & d^2Y &= wd^2y+dwdy,\\ dZ &= wdz, & d^2Z &= wd^2z+dwdz \end{aligned}$$

eine Invariante; d. h. bei Anwendung dieser Substitution erhält man denselben Ausdruck in $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z$, multiplicirt mit dem Factor w. Der Verfasser fragt nun allgemein nach denjenigen Ausdrücken $\varphi(X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \dots, X_n, Y_n, Z_n)$, welche sich nur um eine Potenz von w ändern, wenn man die Substitution

$$\begin{aligned} X_1 &= wx_1, & X_2 &= wx_2+w_1x_1, & X_3 &= wx_3+2w_1x_2+w_2x_1, \dots,\\ Y_1 &= wy_1, & Y_2 &= wy_2+w_1y_1, & Y_3 &= wy_3+2w_1y_2+w_2y_1, \dots,\\ Z_1 &= wz_1, & Z_2 &= wz_2+w_1z_1, & Z_3 &= wz_3+2w_1z_2+w_2z_1, \dots \end{aligned}$$

anwendet. Alle solchen invarianten Ausdrücke genügen den Differentialgleichungen

$$\Sigma\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}\left\{X_{r-2}\frac{\partial\varphi}{\partial X_r}+Y_{r-2}\frac{\partial\varphi}{\partial Y_r}+Z_{r-2}\frac{\partial\varphi}{\partial Z_r}\right\}=0,$$

$$\Sigma\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3}\left\{X_{r-3}\frac{\partial\varphi}{\partial X_r}+Y_{r-3}\frac{\partial\varphi}{\partial Y_r}+Z_{r-3}\frac{\partial\varphi}{\partial Z_r}\right\}=0,$$

. . . . ,

und jeder diesem Systeme von Differentialgleichungen genügende homogene Ausdruck ist eine Invariante in dem vorhin festge-

setzten Sinne. Es wird ferner gezeigt, dass es für jede Zahl n gewisse 2 von einander unabhängige Invarianten Q_n, R_n giebt, welche in den ersten n Ableitungen zusammen vom Gesamtgrade n sind, die n^{ten} Ableitungen X_n, Y_n, Z_n nur linear enthalten und die Eigenschaft besitzen, dass mit ihrer Hülfe und durch X_1, Y_1, Z_1 sich jede andere Invariante rational darstellen lässt. Diese „elementaren" Invarianten Q_n, R_n werden in Determinantenform aufgestellt. Den Schluss bilden Anwendungen auf die Integration von solchen Differentialgleichungen, welche man erhält, wenn man Invarianten der betrachteten Art gleich einer Constanten setzt. Beispielsweise werden alle Curven gesucht, deren zweiter Krümmungsradius constant ist, oder für welche die beiden Krümmungsradien ein constantes Product haben. Ht.

R. Harley. On the general quartine, or the incritoid of the fourth degree. Phil. Mag. (5) XXVI. 456-458.

Da Criticoide solche Functionen der Coefficienten einer linearen Differentialgleichung sind, welche ungeändert bleiben, wenn die Gleichung durch eine Vertauschung einer der Variabeln transformirt wird, so wird der Name Decriticoid auf die Formen angewendet, welche durch eine Vertauschung der abhängigen Variabeln ungeändert bleiben, Incriticoid auf die entsprechenden Formen für die unabhängige Variable. Ein Decriticoid m^{ten} Grades wird eine „m-ide", ein Incriticoid desselben Grades eine „m-ine" genannt. Der vorliegende Artikel giebt bloss die Form der Quartine; eine allgemeine Erörterung wird einer anderen Abhandlung vorbehalten. Gbs. (Lp.)

A. Mukhopadhyay. The geometric interpretation of Monge's differential equation to all conics. Nature XXXVIII. 173.

R. B. H. Interpretation of the differential equation to a conic. Nature XXXVIII. 197.

Für die geometrische Deutung der Differentialgleichung

aller Kegelschnitte liegen zwei Versuche vor, einer von Boole (Diff. eq. S. 19-20) und ein anderer von Sylvester (American J. IX. 19). Beide leisten nach des Verfassers Ansicht nicht, was sie bezwecken, wie er dies in zwei Artikeln ausgeführt hat, die in den Proc. Asiatic Soc. Bengal, 1888 S. 74-86 und im Journ. Asiatic Soc. Bengal, 1887, Tl. II. S. 143 veröffentlicht sind. Er selbst giebt dagegen folgende Auslegung:

Man betrachte den osculirenden Kegelschnitt in einem beliebigen Punkte *P* einer gegebenen Curve. Der Mittelpunkt *O* des Kegelschnitts ist das „Abweichungscentrum" (centre of aberrancy) in *P*, und wenn *P* sich auf der gegebenen Curve bewegt, so ist der Ort von *O* eine neue Curve, welche die „Abweichungscurve" genannt wird. Mit Benutzung dieser Benennungen lautet die geometrische Auslegung der Monge'schen Gleichung:

„Der Krümmungsradius der Abweichungscurve verschwindet für jeden Punkt jedes Kegelschnitts". Für die Parabeln wird der reciproke Wert von *OP* der Index der Abweichung genannt, und der Satz bewiesen: „Der Index der Abweichung verschwindet in jedem Punkte jeder Parabel". Lp.

A. Cunningham. Geometric meaning of differential equations. Nature XXXVIII. 318-319.

Der Verfasser nimmt Hrn. Mukhopadhyây in Schutz gegen einen anonymen Angriff, zeigt jedoch, dass jede Gleichung sich in mehr als einer Weise geometrisch deuten lasse. Lp.

A. Mukhopadhyay. The geometric interpretation of Monge's differential equation to all conics. Nature XXXVIII. 564-565.

R. B. H. Nature XXXVIII. 618.

Erwiderung auf denselben Angriff und Replik. Lp.

ASPARAGUS, J. WOLSTENHOLME. Solution of question 9103. Ed. Times XLVIII. 111.

Die Hüllcurve der Hyperbelschar (θ der Parameter):

$$\frac{x^2}{2-\sin\theta}-\frac{y^2}{2+\sin\theta}=a^2\sin\theta$$

ist die vierspitzige Hypocykloide. Lp.

G. PEANO. Teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie. Palermo Rend. II. 189-192.

Der erste der sieben Sätze, aus welchen diese Note besteht, ist folgender; er rührt von Poinsot her:

Bedeuten $r_1, r_2, \dots$ die Abstände eines beweglichen Punktes P von festen Punkten, Geraden und Ebenen, so hat die Normale der Fläche $f(r_1, r_2, \dots) = \text{const.}$ (wo f eine analytische Function bezeichnet) die Richtung der Resultante der Kräfte, deren Grössen bezw. $\frac{\partial f}{\partial r_1}, \frac{\partial f}{\partial r_2}, \dots$ sind, und deren Richtungen durch die festen Punkte gehen, bezw. auf den festen Geraden und Ebenen senkrecht stehen. Hat f in einem Punkte P, welcher mit keinem festen Punkte zusammenfällt und keiner festen Geraden oder Ebene angehört, ein Maximum oder Minimum, so ist die Resultante in P gleich Null.

Von den übrigen Sätzen werden wir nur einen als Beispiel anführen:

Geht die veränderliche Gerade p durch einen festen Punkt P und bildet mit festen Geraden, die durch P gehen, die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, so ist der Ort der Geraden p, für welche $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = \text{const.}$ ist, ein Kegel. Die durch eine Erzeugungslinie p gehende Normalebene enthält die Resultante der Kräftepaare, deren Momente bezw. $\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \dots$ sind, und deren Ebenen durch p und durch die verschiedenen festen Geraden gehen. Hat f für eine Gerade p ein Maximum oder Minimum, so ist die Resultante für diese Gerade gleich Null. Vi.

H. Kummell. The problem of relative maxima or minima under a new point of view. Annals of Math. IV. 33-35.

Reduction des bedingten Problems auf ein unbedingtes mittels Lagrange'scher Multiplicatoren. T.

Ch. Bioche. Sur les minima des sommes de termes positifs dont le produit est constant. Nouv. Ann. (3) VII. 287-288.

Der Verfasser macht die (selbstverständliche) Bemerkung, dass der betreffende Satz und der umgekehrte von dem Maximum eines Products von positiven Factoren, deren Summe constant ist, aus ein und derselben Ungleichheit fliessen. T.

Th. Haebler. I. Maxima und Minima symmetrischer Functionen. II. Betrachtungen über die Determination. Pr. Fürsten- u. Landesschule zu Grimma. 53 S.

I. Es wird der Lehrsatz über den grössten oder kleinsten Wert einer symmetrischen Function bei Gleichheit der Variabeln bewiesen und einige mit demselben sofort zu erledigende Aufgaben angeführt (1-4), darauf werden in (5-7) die sogenannten symmetrischen Mittelgrössen (arithmetisches, geometrisches, harmonisches Mittel etc.) ihrer Grösse nach mit einander verglichen und in (9) entsprechende Betrachtungen bei der Lösung geometrischer Aufgaben angestellt.

II. Nachdem einige wichtige Sätze über das Umformen von Ungleichungen erwähnt sind (1), werden für mehrere Dreiecksstücke die Grenzen gegeben, z. B. (2):

$$m_c < \tfrac{1}{2}(a+b) < s \quad \text{oder} \quad 2\varrho < h_c < 2r;$$

in (3-5) wird der Begriff der Determination erklärt und in (6-8) dieselbe insbesondere bei geometrischen Constructionsaufgaben verfolgt. In (9-10) werden die Wurzeln nicht angewandter, in (11-13) diejenigen angewandter Gleichungen discutirt. (14-22) behandelt das Princip der Zeichen bei Strecken, Winkeln und Dreiecksgebilden, (23-31) die Determination trigonometrischer Auf-

gaben. Besonderen Wert möchte Verfasser darauf legen, dass es ihm durch hülfsweise Einführung des in Abschnitt (19) genau definirten „inneren“ Winkels gelungen ist, alle reellen Resultate der gewöhnlichen trigonometrischen Formeln zu deuten und volle Uebereinstimmung von Rechnung und Construction herbeizuführen, so dass man klar übersehen kann, welche Lösungen von trigonometrischen Aufgaben gelten, welche zu verwerfen sind.

Lg.

D. Edwardes, R. F. Davis. Solution of question 9249. Ed. Times XLVIII. 147.

Die Normale in einem Punkte P einer Ellipse schneide die Curve zum zweiten Male in Q. Das Maximum des Winkels CQP zu finden, wenn C der Mittelpunkt der Ellipse ist. Die Aufgabe führt auf eine kubische Gleichung für die Cotangente des zugehörigen excentrischen Winkels θ. Lp.

Chase, J. Neuberg. Solution of question 9040. Ed. Times XLVIII. 56-57.

Ein Punkt O wird innerhalb eines Dreiecks ABC angenommen; P, Q, R sind die Umkreiscentren für die Dreiecke BOC, COA, AOB. Den Punkt O so zu bestimmen, dass der Inhalt von ΔPQR ein Minimum ist. Für den Fall des spitzwinkligen Dreiecks bestimmt Hr. Neuberg O als den Höhenschnitt von ABC. Lp.

E. M. Langley. Note on a problem in maxima and minima. Nature XXXVII. 605.

E. M. Langley. Further use of Ptolemy's theorem (Euclid VI. D) for a problem in Maxima Minima. Nature XXXVIII. 149.

Elementare Behandlung der Aufgaben: 1) Einen Punkt E innerhalb eines Dreiecks so zu bestimmen, dass

$$l.AE + m.BE + n.CE$$

19*

ein Minimum ist, wobei l, m, n so gewählt sind, dass je zwei zusammen grösser als die dritte Zahl ist. 2) E so zu bestimmen, dass AE . sin BEC + BE . sin CEA + CE . sin AEC ein Minimum ist.

Lp.

R. Chartres. Note on a problem in maxima minima. Nature XXXVII. 320.

Für die Aufgabe, den Punkt kleinster Abstandssumme von drei Punkten zu finden, wird die bekannte elementare Lösung nebst Beweis gegeben. Lp.

Capitel 3.

Integralrechnung.

A. G. Greenhill. A chapter in the integral calculus. London. Fr. Hodgson. 42 S.

Die mit vielen Uebungsbeispielen versehene Schrift, welche als Supplement zu den gewöhnlichen Lehrbüchern der Integralrechnung dienen soll, behandelt die algebraischen Integrale rationaler und irrationaler Functionen und die Integrale von aus Kreisfunctionen und hyperbolischen Functionen gebildeten Ausdrücken. Um den Integrationsprocess systematischer zu gestalten, verwendet der Verfasser durchweg dieselbe Methode, welche darin besteht, die zu integrirende Function selbst oder eine Function, aus welcher diese in einfacher Weise zusammengesetzt ist, als Integrationsvariable einzuführen. Hierbei wird von den hyperbolischen Functionen, deren Haupteigenschaften daher auch entwickelt werden, ein umfassender Gebrauch gemacht. (S. das folgende Referat.) T.

A. G. Greenhill. A chapter in the integration calculus. London. Fr. Hodgson. 42 S.

Die Schrift verfolgt hauptsächlich zwei Ziele: 1) zu zeigen, wie $\int \varphi(x)dx$ als eine Function von $\varphi(x)$ oder von Bestandteilen von $\varphi(x)$ auszudrücken ist, 2) die Vorteile der Hyperbelfunctionen bei der Integration ins Licht zu stellen. Indem die Function $\frac{A+B\sqrt{R}}{P+Q\sqrt{R}}$ (in der A, B, P, Q ganze rationale Functionen von x bedeuten, R eine lineare oder quadratische Function von x ist) in die Form $\frac{M}{D}+\frac{N}{D\sqrt{R}}$ umgewandelt wird, erfolgt die systematische Integration von $\int\frac{Ndx}{D\sqrt{R}}$. Nach Zerlegung von $\frac{N}{D}$ in Partialbrüche wird gezeigt, wie sich ein Integral von der Gestalt $\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{R}}$ als eine Function des Arguments $\frac{\sqrt{R}}{x-p}$ ausdrücken lässt; zahlreiche Belege erläutern die Methode. Darauf wird bei der Integration der Ausdrücke

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n},\quad \int\frac{dx}{(a+b\cosh x)^n}$$

ein weiter Gebrauch von den Hyperbelfunctionen gemacht, und die Resultate werden als Functionen der zu integrirenden Functionen ausgedrückt. Die Schrift liefert einen recht nützlichen Nachtrag zu den gewöhnlichen Lehrbüchern der Integralrechnung.

Gbs. (Lp.)

W. Kapteyn. Note sur les différentielles binômes. Darb. Bull. (2) XII. 44-56.

Es wird der Satz hergeleitet: So oft die Elimination von x und y zwischen den Gleichungen

$$f(x,y)=0;\quad xy=\psi(\vartheta)(=X);\quad x^q=\varphi(\vartheta)(=Y),$$

wo q eine ganze Zahl >1, die Gleichung einer unicursalen Curve $F(X, Y)=0$ ergiebt, ist es möglich $\int y\,dx$ durch die Sub-

stitution

$$x = \varphi(\vartheta)^{\frac{1}{q}}$$

auf das Integral einer rationalen Function zurückzuführen, und in keinem andern Falle. Als Anwendung davon werden die Bedingungen der Integrabilität der Differentiale

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,\quad x^m(a+bx^n+cx^{2n})^p\,dx$$

untersucht, wo m und n ganze Zahlen, n positiv, p ein Bruch.

H.

E. Lebon. Sur le calcul de quelques intégrales. J. de Math. spéc. (3) II. 155-157, 176-180.

Die von Hrn. Hermite in seinem Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (1873) S. 260 und S. 360 angegebenen Integrale, deren directe Ableitung er als unzugänglich durch die gewöhnlichen Methoden bezeichnet, sind seitdem öfter behandelt worden. Ausser Stern (J. für Math. LXXVIII. 340), den der Verfasser citirt, sind u. a. P. da Silva, Steen (F. d. M. XIV. 1882. 211 u. 212), Studnicka, Lindman (F. d. M. XV. 1883. 217-218), Obrastzoff (F. d. M. XVII. 1885. 259) zu nennen. Bei der ersten Methode benutzt der Verf. die Formel:

$$\int \frac{VU'dx}{U^2} = -\frac{V}{U} + \int \frac{V'dx}{U};$$

es ist dasselbe Mittel, welches Hr. Steen angewandt hat, nämlich die partielle Integration. Eine zweite beruht darauf, dass in der Gleichung

$$\int \frac{Ndx}{(P\varphi+Q\psi)^2} = \frac{R\varphi+S\psi}{P\varphi+Q\psi}$$

mit der Bedingungsgleichung

$$N = (PR'-RP')\varphi^2 + (QS'-SQ')\psi^2 + (PS-QR)(\varphi\psi'-\psi\varphi') + (PS'-SP'+QR'-RQ')\varphi\psi$$

die Functionen R, S, φ, ψ passend bestimmt werden. Dies gelingt z. B., wenn die Bedingungsgleichung sich nach den unbekannten Functionen R und S so in Factoren zerfällen lässt, dass integrable Differentialgleichungen für sie entstehen.

Lp.

E. Pomey. Sur quelques intégrales remarquables.
Nouv. Ann. (3) VII. 191-194.

Entgegen einer Aeusserung von Ch. Hermite, der, nachdem er im Cours d'Analyse de l'École Polytechnique die Typen der Functionen aufgestellt hatte, für deren Integration wir eine sichere Methode besitzen, ausser diesem Bezirke insbesondere 4 Integralformeln für specielle transcendente Functionen anführte, die sich nach keiner Methode herleiten liessen, zeigt der Verfasser, dass auch diese durch gewöhnliche teilweise Integration einfach hervorgehen. H.

J. L. Ptaszycki. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Darb. Bull. (2) XII. 262-270.

Es wird der Satz bewiesen: Damit das Integral

$$\int F(x, \sqrt[m]{R})dx,$$

wo R eine ganze, F eine rationale Function ist, sich durch algebraische Functionen und Logarithmen solcher ausdrücken lasse, ist es notwendig und hinreichend, dass R eine der zwei Formen hat:

$$(x-a)^n,\ (x-a_1)^n(x-a_2)^{m-n} \qquad (n<m).$$ H.

Ph. Gilbert. Remarques sur l'intégration par partie.
Nouv. Ann. (3) VII. 365-366.

Sind u und v zwei Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C\varphi(x)y,$$

entsprechend zwei Werten der Constante C, so kann man unter endlicher Form das Integral

$$\int u\frac{d^2v}{dx^2}dx$$

finden. Für constantes $\varphi(x)$ hat man die gewöhnliche Anwendung der teilweisen Integration. H.

W. LÁSKA. Reduction einiger Integrale. Hoppe Arch. (2) VII. 110-112.

Es sind die zwei Integrale

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^6+at^3+1}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^8+at^4+1}},$$

welche auf die Form elliptischer Integrale gebracht werden. Das erstere stellt sich als Differenz zweier Integrale erster Gattung mit irrationalen constanten Coefficienten, das letztere als ein Integral erster Gattung dar. H.

J. L. PTASZYCKI. Sur l'intégration algébrique des différentielles algébriques. Acta Math. XI. 395-400.

J. L. PTASZYCKI. Ueber die algebraische Integration algebraischer Differentiale. Prace mat.-fiz. I. 81-90. (Polnisch), Chark. Ges. I. 61-73. (Russisch.)

J. L. PTASCHITZKY. Ein Theorem über die algebraischen Integrale. Chark. Ges. I. 74-77. (Russisch.)

Den Gegenstand dieser Abhandlungen bildet das folgende bekannte Problem: „Es sei y mit x mittels einer algebraischen Gleichung verbunden; man drücke das Integral $\int y dx$ durch eine algebraische Function von x aus oder zeige, dass dann eine solche Darstellung unmöglich ist." Dasselbe ist von Liouville, Briot u. Bouquet, Zeuthen, Raffy, Humbert u. a. gelöst worden.

Die Beantwortung dieser Frage gründet der Verfasser auf den folgenden Satz:

Es sei P eine ganze Function von x, welche einer irreductiblen Gleichung

$$z^n + \varphi_1(x)z^{n-1} + \varphi_2(x)z^{n-2} + \cdots = 0$$

mit ganzen Coefficienten genügt; es mögen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Werte von z sein, und es bedeute $\sqrt{\Delta}$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2, & \ldots, & z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2, & \ldots, & z_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1, & z_n, & z_n^2, & \ldots, & z_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir

$$\Delta = D^2 E,$$

wo D, E ganze Functionen sind, deren zweite keine vielfachen Wurzeln hat, so besteht der Satz:

„Ist das Integral

$$\int \frac{z}{P}\, dx$$

algebraisch, so ist

$$\int \frac{z}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

wo 1) Y gleich ist dem Producte des Polynoms D und des grössten gemeinschaftlichen Teilers der Polynome P und $\frac{dP}{dx}$, 2) $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ aus den Gleichungen

$$(a) \quad X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2, & \ldots & z_1^{i-1}, & \int \frac{z_1}{P} dx, & z_1^{i+1}, & \ldots, & z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2, & \ldots & z_2^{i-1}, & \int \frac{z_2}{P} dx, & z_2^{i+1}, & \ldots, & z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & z_n^2, & \ldots & z_n^{i-1}, & \int \frac{z_n}{P} dx, & z_n^{i+1}, & \ldots, & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$(i = 0, 1, 2 \ldots, n-1).$$

zu bestimmen sind.

Will man also das aufgestellte Problem lösen, so bringe man die Function y auf die Form $\frac{z}{P}$, das Polynom Δ auf die Form D^2E, bestimme das Product von D mit dem grössten gemeinschaftlichen Teiler der Functionen P und $\frac{dP}{dx}$, so erhält man auf diese Weise die Function Y. Man entwickle weiter die Ausdrücke (a) nach den fallenden Potenzen von x, so geben die ganzen Teile dieser Entwickelungen die Polynome $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$. Die Coefficienten dieser Polynome enthalten m unbekannte Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$; die eine von ihnen nimmt man willkürlich an, die übrigen bestimme man aus der Bedin-

gung, dass

$$\frac{d}{dx}\left[\int \frac{z}{P}dx - \frac{X_0+X_1z+\cdots+X_{n-1}z^{n-1}}{Y}\right]$$

identisch gleich Null sei. Wenn die Constanten dieser Bedingung gemäss nicht bestimmt werden können, so folgt daraus, dass das Integral keine algebraische Function von x ist.

Der Verfasser erläutert jene Theorie durch Beispiele.

Dn.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

T. J. Stieltjes. Note sur l'intégrale $\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx$.

Nouv. Ann. (3) VII. 161-171.

Es wird der Satz aufgestellt: Ist $f(x)$ eine von $x = a$ bis $x = b$ nie abnehmende Function, so ist es stets möglich, n Constanten $x_1, x_2, \dots, x_n$ in der Grössenfolge $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ und $n+1$ Constanten $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, enthalten resp. in den $n+1$ Intervallen zwischen den $n+2$ Grössen

$$f(a), f(x_1), \dots, f(x_n), f(b),$$

so zu bestimmen, dass man hat:

$$\int_a^b f(x)G_{2n}(x)dx = a_1\int_a^{x_1} G_{2n}(x)dx + a_2\int_{x_1}^{x_2} G_{2n}(x)dx + \cdots$$

$$\cdots + a_n\int_{x_{n-1}}^{x_n} G_{2n}(x)dx + a_{n+1}\int_{x_n}^{b} G_{2n}(x)\,dx,$$

wo $G_{2n}(x)$ ein beliebiges Polynom höchstens vom Grade $2n$ bezeichnet. Die Grössen x und $a_1, \dots, a_{n+1}$ werden bestimmt und der Satz bewiesen.

H.

Ph. Gilbert. Sur la convergence des intégrales à limites infinies. Darb. Bull. (2) XII. 66-76.

Es wird durch Beispiele die Möglichkeit bewiesen, dass $\int_a^\infty f(x)dx$ convergirt, wenn $f(x)$ bei unbegrenztem Wachsen von x nicht aufhört, endliche und unbegrenzt wachsende Werte für einzelne x zu erlangen. Die Beispiele sind:

$$f(x) = (\sin^2\pi x)^x,\ (\sin^2\pi x)^{\varphi(x)},\ \psi(x)(\sin^2\pi x)^{\varphi(x)}.$$

Im ersten Falle divergirt das Integral; im zweiten convergirt es, wenn für $x = \infty$

$$(3)\qquad \lim\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < 1$$

ist, z. B. wenn $\varphi(x) = \Gamma(x), x^k$ $(k>2)$; im dritten convergirt es, wenn die Bedingung (3) erfüllt ist, und $\int_0^1 \psi(n+x)^2 dx$ für keine ganze Zahl n eine constante Grenze übersteigen kann, z. B. für $\psi(x) = -\log\cos^2\pi x$, wo $f(x)$ nicht aufhört, unendliche Werte zu passiren, während im zweiten Falle $f(x) \overline{\overline{<}} 1$ bleibt.

H.

W. H. L. Russell. On certain definite integrals. Lond. R. S. Proc. XLIV. 311-314.

Fortsetzung früherer Untersuchungen. Das hier angewandte Verfahren ist das der Differentiation oder Integration in Bezug auf eine Constante. Cly. (Lp.)

G. A. Gibson. Extension of a theorem of Abel's in the summation to integration. Edinb. M. S. Proc. VI. 40-42.

Der fragliche Satz ist das Theorem III der Einleitung zu der Abhandlung über die Binomialreihe. (Ges. Werke, Bd. I. 222).

Gbs. (Lp.)

E. Catalan. Rapport sur le mémoire: Sur quelques formules de calcul intégral, par J. Beaupain. Belg. Bull. (3) XVI. 15-19.

Die Integrale von der Form:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^p x \cos qx\, dx,\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^p x \sin qx dx,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^q x \cos qx\, dx,\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^q x \sin qx\, dx$$

werden auf Gammafunctionen zurückgeführt, meistens indem die zu integrirende Function durch eine Entwickelung nach den Sinus oder den Cosinus der Vielfachen von x ersetzt wird.

Mn. (Lp.)

T. C. Simmons, J. Wolstenholme, J. W. Sharpe. Solution of question 9324. Ed. Times XLIX. 25-27.

Zur Herleitung des Integrales (p u. q positiv):

$$U_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(p+q\,\mathrm{tg}^2 x)^n},$$

wo n eine positive ganze Zahl ist, wird zuerst die Reductionsformel:

$$U_n = -\frac{1}{n-1}\frac{d}{dp}(U_{n-1}) = \frac{1}{(n-1)(n-2)}\frac{d^2}{dp^2}(U_{n-2}) = \dots$$

gegeben und U_1 in der Gestalt entwickelt:

$$U_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{q}}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}\right).$$

Dasselbe Verfahren ist auch anwendbar, wenn im Zähler des Integranden noch $\mathrm{tg}^{2m} x$ steht. Darauf wird nach einer zweiten Methode für $\sqrt{q}\,.\,\mathrm{tg}\, x$ der Wert $\sqrt{p}\,.\,\mathrm{tg}\, z$ substituirt.

Lp.

Ch. Méray. Valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ déduite de la formule de Wallis. Darb. Bull. (2) XII. 174-176.

Der Gang des Beweises beginnt mit der Transformation von $S_\mu = \int_0^\infty x^\mu e^{-x^2} dx$ in PT_μ, wo $T_\mu = \int_0^\infty (eye^{-y})^{\frac{\mu-1}{2}} dy$. Aus

einer Grössenscala der T geht für die S eine Ungleichung der Form hervor:

$$LS_1 < MS_0 < NS,$$

woraus durch Uebergang zur Grenze eine Gleichung der Form $S_0^2 = QS_q^2$ entsteht. Einer der Factoren von Q ist nach der Wallis'schen Formel $= \pi$, S_1 ist bekannt $= \frac{1}{2}$, und es ergiebt sich $S_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. H.

A. Markoff. Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$.
St. Pétersbourg. Leipzig. Voss. XXVII + 98 S. gr. 8°.

S. Pincherle. Sopra certi integrali definiti. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 100-104.

Die Arbeit behandelt die formelle Bedeutung der Integrale von der Form

$$\int_0^\infty e^{-tx} \varphi(t) dt$$

für den Fall der Divergenz an der untern Grenze, indem dann für e^{-tx} substituirt wird:

$$\left\{e^{-xt} - \left(1 + \frac{\alpha - x}{1} t + \frac{(\alpha - x)^2}{1.2} t^2 + \cdots + \frac{(\alpha - x)^{\lambda-1}}{(\lambda - 1)!} t^{\lambda-1}\right) e^{-\alpha t}\right\},$$

insbesondere in Anwendung auf das Integral

$$\int_0^\infty e^{-xt} \prod_{\nu=1}^{m} (1 - e^{-a_\nu t})^{r_\nu} dt$$

als Verallgemeinerung des Euler'schen Integrals erster Gattung. H.

G. Giuliani. Aggiunte ad una memoria de Sig. Kummer. Batt. G. XXVI. 234-250.

Setzt man

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1}\omega \cos\left(\frac{x}{2}\operatorname{tg}\omega\right)\cos n\omega\, d\omega,$$

$$V_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{h-1}\omega \sin\left(\frac{x}{2}\operatorname{tg}\omega\right)\sin n\omega\, d\omega,$$

so genügt, wie Kummer im J. für Math. XVII. bewiesen hat,

$$z = U_n - V_n$$

der linearen Gleichung zweiter Ordnung:

$$(1) \qquad 4x\frac{d^2z}{dx^2} - 4(h-1)\frac{dz}{dx} - (x+2n)z = 0,$$

desgleichen dasselbe Integral von 0 bis π. Hieraus leitet der Verfasser die Gleichung vierter Ordnung

$$-4x^2\frac{d^4U}{dx^4} + 8(h-2)x\frac{d^3U}{dx^3} + 2\{x^2 - 2(h-1)(h-2)\}\frac{d^2U}{dx^2}$$
$$-2x(h-2)\frac{dU}{dx} + \left(n^2+1-h+\frac{x^2}{4}\right)U = 0$$

ab, welcher U_n und V_n, mithin $AU_n + BV_n$ genügen. Zur Untersuchung weiterer Eigenschaften von U_n und V_n werden $\cos n\omega$ und $\sin n\omega$ nach Potenzen von $\cos\omega$ entwickelt; die Terme von U_n und V_n sind Integrale, die Serret und Bierens de Haan berechnet haben. Mit Anwendung einer Reihenentwickelung von Dini (Serie di Fourier etc. p. 112) wird gefunden:

$$\cos^{h-1}\omega\sin\left(\frac{x}{2}\operatorname{tg}\omega\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} V_{2n}\sin 2n\omega.$$

Es wird bewiesen, dass U_n und V_n für $n = \infty$ den Grenzwert 0 haben. Ferner wird gefunden:

$$\tfrac{1}{2}U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \frac{\pi}{2};$$

dann, wenn man $U_n(x)$ für U_n schreibt:

$$\frac{\pi}{2}(f(x) - f(0)) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 f'(xn)U_0(n)dn + \sum_{s=1}^{\infty}\int_0^1 f'(xn)U_s(n)dn.$$

Zuletzt wird die Function

$$\varphi(\alpha,\beta,x) = \lim F\left(\alpha,\, m,\, \beta,\, \frac{x}{m}\right) \qquad (m = \infty)$$

untersucht, in welcher Kummer die zwei Lösungen der durch die Substitution $z = e^{-\frac{1}{2}x}y$ transformirten Gleichung (1) darstellt.

H.

M. Lerch. Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe. Batt. G. XXVI. 39-40.

Die Formel lautet:

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+u)dx = u\log u - u + \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Sie wird hier auf sehr einfache Weise hergeleitet. H.

Ch. Hermite. Démonstration nouvelle d'une formule relative aux intégrales Eulériennes de seconde espèce. (Extrait d'une lettre addressée à M. Lerch.) Prag. Ber. 365-366.

Es wird aus einer Formel von Cauchy die Gleichung hergeleitet:

$$\log\Gamma(a) = J - \tfrac{1}{2}\log a + \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{at}dt}{t},$$

wo J das Integral von Raabe bezeichnet. H.

J. C. Malet. On certain definite integrals. Annali di Mat. (2) XVI. 277-290.

Entwickelt man $(1-k\sin^2\vartheta)^{-p}$ im Ausdruck zur Linken der folgenden Gleichung nach Potenzen von k und vollzieht nach Integration die Summirung mittelst der Gauss'schen Function F, so ergiebt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m\vartheta \sin^n\vartheta\, d\vartheta}{(1-k\sin^2\vartheta)^p} =$$

$$\frac{\Gamma\frac{m+1}{2}\,\Gamma\frac{n+1}{2}}{\Gamma p\,\Gamma\left(\frac{m+n}{2}-p+1\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{m'}\vartheta\sin^{n'}\vartheta\, d\vartheta}{(1-k\sin^2\vartheta)^{p'}}$$

$$\left(p' = \frac{n+1}{2};\ n' = 2p-1;\ m'+n' = m+n\right).$$

Hierin wird speciell $m+n=1$ und $p=\frac{1}{2}$ gesetzt; dann erhält man:

$$\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^m\vartheta\sin^{1-m}\vartheta d\vartheta}{\Delta(\vartheta)}=\Gamma\frac{m+1}{2}\Gamma\frac{2-m}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\vartheta d\vartheta}{[\Delta(\vartheta)]^{2-m}},$$

und wenn man dann nach k differentiirt:

$$2\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\vartheta\sin^{1-m}\vartheta d\vartheta\Delta(\vartheta)=$$

$$\Gamma\frac{m+1}{2}\Gamma\frac{2-m}{2}\left\{[1-(1-m)k]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\vartheta d\vartheta}{[\Delta(\vartheta)]^{2-m}}+(1-k)^{\frac{m}{2}}\right\},$$

$$\Delta(\vartheta)=\sqrt{1-k\sin^2\vartheta}.$$

Diese zwei Formeln sind die Quelle sehr vieler bemerkenswerter neuer Relationen elliptischer Integrale, die daraus entwickelt werden. H.

P. A. Nekrassoff. Der Ausdruck der Wurzeln einer trinomischen Gleichung durch bestimmte Integrale. Mosk. math. Samml. XIII. 739-748. (Russisch.)

Es werden mit Hülfe der bestimmten Integrale die Ausdrücke für die Wurzeln der Gleichung $u^m-pu^n-q=0$ und die Bedingungen der Gültigkeit dieser Formeln untersucht. Die hier gegebenen Formeln weichen etwas von den Formeln ab, die Hr. Heymann (Math. Ann. Bd. XXVIII) gegeben hat. Wi.

P. Mansion. Sur la longueur d'une ligne courbe. Mathesis VIII. 262-264.

Die Beweise von Jordan und von Goedseels werden durch den folgenden Hülfssatz vervollständigt: Der Abstand zwischen zwei willkürlich gewählten Punkten auf jedem Curvenbogen, zu welchem eine Seite eines Polygons von hinreichend kleinen Seiten als Sehne gehört, liegt unterhalb einer vorgegebenen Grösse d. Die Curve wird als nicht geschlossen, ohne Schleife und continuirlich vorausgesetzt. Mn. (Lp.)

E. Goedseels. De la longueur d'une ligne. Belg. Bull. (3) XVI. 86-92.

P. Mansion. Rapport. ibid. 120-124.

Auf eine andere Art als Scheeffer (Acta Math. V. 49-92, F. d. M. XVI. 1884. 338), dessen Beweis nicht allgemein ist, und als Hr. C. Jordan (Cours d'analyse, III. Note, n°. 46-51) begründet der Verfasser den folgenden Satz: Alle veränderlichen Vielecke mit ohne Ende abnehmenden Seiten, die einer continuirlichen Curve eingeschrieben sind, besitzen Umfänge, die einer endlichen oder unendlichen Grenze zustreben. Man vergleiche einen Commentar zu dieser kleinen Note in Mathesis VIII. 262-264.

Mn. (Lp.)

E. Goedseels. De la longueur d'une ligne. Mathesis VIII. Suppl. V. 12 S.

Vergl. Belg. Bull. (3) XVI. 20-24, 86-92. Mn.

E. Geoghegan. Problem by Vincentio Viviani. Nature XXXVIII. 78.

Kurze Lösung der bekannten Aufgabe. Lp.

E. Oekinghaus. Zur Rectification der Hyperbel. Hoppe Arch. (2) VI. 223-224.

Der Bogen s der Hyperbel wird, um eine Formel aus der Abhandlung Band IV. No. V. anzuwenden, in der Form entwickelt:

$$\frac{s}{c} = \frac{2\pi}{K}\left(\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^2}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right) - \left(\frac{E}{K} - K'^2\right)u.$$

H.

H. Petrini. Om en Integral av Crofton. Zeuthen Tids. (5) VI. 39-52.

Ein Beweis des Satzes von Crofton, dass

$$\int \varDelta(\omega - \sin\omega) = \tfrac{1}{2} L^2 - \pi S,$$

wo $\varDelta$ ein Flächenelement einer Ebene, ω den Winkel der beiden Tangenten, welche von dem Flächenelement an eine geschlossene convexe Curve gezogen werden können, L die Länge der Curve, S das von der Curve eingeschlossene Flächenstück bedeuten, und die Integration über die ganze Ebene ausserhalb der Curve ausgedehnt wird. Dieser Satz, welchen Crofton durch Betrachtungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bewiesen hat, wird hier mittels rein analytischer Betrachtungen bewiesen. Der Gang des Beweises (welcher sonst sehr sinnreich ist), lässt sich nicht leicht wiedergeben. Uebrigens hat J. A. Serret schon früher einen analytischen Beweis des besprochenen Satzes geliefert.

V.

E. O. Bermann. Zur Lehre vom mittleren Radius. Pr. Gymn. Liegnitz.

Der Aufsatz knüpft an die vom Landwirt H. von Thünen in Bezug auf die Düngerfuhren unter dem Namen „mittlere Entfernung des Ackers vom Hofe" gestellte und geometrisch gelöste Aufgabe an, welche in der Berechnung von $\frac{1}{w}\int r dw$, wo r den Radiusvector des Elements dw hinsichtlich der Ackerfläche w bezeichnet, ihren Ausdruck findet. Der Sinn der Aufgabe ändert sich nicht, wenn w statt einer ebenen Fläche eine Linie, eine krumme Fläche oder einen Körper bedeutet. Das Gegenwärtige beschränkt sich auf Fälle, wo w ebene Linie, und zwar Gerade, Kreis, Kegelschnitt ist, bleibt dagegen bei der ursprünglichen Aufgabe, bei der nach jeder Einheit von dw gleichviel Strahlen gehen, nicht stehen, sondern zieht zwei weitere Annahmen, dass die Anzahl der Strahlen dem Abstande begrenzender Parallelen, und dass sie den Sectoren proportional sei, in Betracht. Die so geschaffene Sammlung ausgeführter Quadraturen vermehrt um einiges dasjenige, was Grunert und Drobisch bereits geliefert haben.

H.

P. Mansion. Sur le calcul approché d'une intégrale définie. Brux. S. sc. XII, A. 63-65.

Die Integrale:

$$I_r = \int_0^r e^{-t^2} dt,\ I_r^2 = \int_0^r dx \int_0^r dy\, e^{-(x^2+y^2)}$$

erhält man leicht in angenäherter Art, wenn man beachtet, dass das zweite zwischen den Rauminhalten eingeschlossen ist, welche zwischen der Oberfläche $z = e^{-(x^2+y^2)}$, den drei Coordinatenebenen und den Cylindern liegen, deren Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2,\ \pi(x^2 + y^2) = 4r^2$$

sind. Mn. (Lp.)

F. G. Teixeira. Extrait d'une lettre à M. Hermite. Darb. Bull. (2) XII. 288-290.

Aus der Identität

$$\int_a^b \varphi^2(x)dx \int_a^b \psi^2(x)dx - \left[\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right]^2 = \tfrac{1}{2}\int_a^b dx \int_a^b \left[\varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)\right]^2 dy$$

ersieht man, dass

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx < \left[\int_a^b \varphi^2(x)dx \int_a^b \psi^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Im Falle aber, wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zugleich wachsen oder abnehmen, hat man auch, wie Tschebyscheff auf analogem Wege gezeigt hat:

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx > \int_a^b \varphi(x)dx \int_a^b \psi(x)dx.$$

Beides lässt sich nun verbinden, um eine obere und untere Grenze des Integrals zur Linken zu erhalten. H.

G. d'Arone. Intorno ad un teorema di Tchebychew. Batt. G. XXVI. 61-64.

Tschebyscheff hat bewiesen, dass, wenn U und V im un-

veränderlichen Sinne mit x variiren, die Grösse

$$(1)\qquad \int_0^1 UV\,dx - \int_0^1 U\,dx \int_0^1 V\,dx$$

positiv oder negativ ist, je nachdem U und V in gleichem oder ungleichem Sinne variiren. Der Verfasser gewinnt nun durch leichte Transformation der Summen, deren Grenzwerte jene drei Integrale bekanntlich darstellen, einen Ausdruck für die Grösse (1), welcher nicht nur den genannten Satz unmittelbar kund giebt, sondern manche näheren Angaben über dieselbe erschliessen lässt. Dass die Grenzen 0 und 1 nur der Einfachheit wegen statt beliebiger constanter Grenzen gewählt sind, ist selbstverständlich. Der Ausdruck lässt auch sogleich erkennen, dass die Bedingung unveränderlichen Sinnes der Variation von U, V überflüssig ist. Ferner giebt er die Grenzen 0 und $\frac{1}{4}uv$ für die Grösse (1), wo $u = U(1) - U(0)$ und $v = V(1) - V(0)$ gesetzt ist. Diese Grenzen lassen sich einander noch näher rücken, wenn man die geringste und stärkste Declivität a_0, a_1 und b_0, b_1 der Curven $U = 0$ und $V = 0$ in Betracht zieht; die Grösse (1) ist dann enthalten zwischen $\frac{1}{12}a_0 b_0$ und $\frac{1}{12}a_1 b_1$. H.

N. N. Zinine. Ueber eine Aufgabe in der Theorie der mehrfachen Integrale. Warsch. Univ. Nachr. 1888. 4. (Russisch.)

Der Verfasser benutzt die Formel

$$\int_0^a dx \int_0^x \varphi(x,y)\,dy = \int_0^a dy \int_y^a \varphi(x,y)\,dx$$

zur Reduction eines n-fachen Integrals, in welchem die Integration auf alle positiven Werte der Veränderlichen ausgedehnt ist, die der Bedingung $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 1$ genügen. Diese Reduction wird dann angewandt zur Ermittelung der Werte folgender n-fachen Integrale:

$$\int x_1^{a-1} x_2^{b-1} \ldots x_n^{l-1}\,dx_1 \,.\, dx_2 \ldots dx_n,$$

$$\int \frac{x_1^{a-1} x_2^{b-1} \ldots x_n^{l-1}(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)^{m-1}}{\{\alpha + \beta x_1 + \gamma x_2 + \cdots + \lambda x_n\}^p}\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n,$$

$$\int x_1^{a-1} x_2^{b-1} \ldots x_n^{l-1} \left(\frac{1-\alpha x_1-\beta x_2-\cdots-\lambda x_n}{1-x_1-x_2-\cdots-x_n}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

unter der Bedingung $x_1+x_2+\cdots+x_n<1, x_1, x_2, \ldots, x_n>0$.

Wi.

W. P. Ermakoff. Eine Aufgabe für junge Gelehrte. Chark. Ges. XVIII. 104-105. (Russisch.)

Es sind drei Functionen P, Q, R dreier Veränderlichen x, y, z gegeben; es soll eine Oberfläche gefunden werden, welche folgende Eigenschaft hat: Das Integral $\int(Pdx+Qdy+Rdz)$, auf irgend einer Linie dieser Oberfläche zwischen zwei gegebenen Punkten genommen, soll von dem Integrationswege unabhängig sein.

Wi.

J. J. Stambach. Die Planimeter Coradi, ihre Theorie, Construction und Genauigkeit. Stuttgart. K. Wittwer, 1889. 8°. 29 S.

Dieser Separatabzug aus der Schweizerischen Bauzeitung macht auf einige neue Planimeterconstructionen aufmerksam, bringt eine einfache, von der höheren Mathematik sehr wenig voraussetzende Theorie der Planimeter und erörtert die Frage, welchen Grad der Genauigkeit wir bei Flächenberechnungen erwarten dürfen, wie sie in der Praxis, insbesondere im Vermessungswesen, vorkommen. Mathematisch Wichtiges enthält der Aufsatz nicht; eine umfassende Theorie der Planimeter gab vor längerer Zeit das Buch von A. Amsler: „Ueber den Flächeninhalt und das Volumen durch Bewegung erzeugter Curven und Flächen und über mechanische Integrationen“, Schaffhausen 1880, auf welches auch hier verwiesen wird.

M.

E. de la Noë. Théorie géométrique du planimètre polaire à suspension indépendante, de Hohmann et Coradi, et du planimètre roulant de Coradi. Nancy (1887).

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

E. GOURSAT. Sur les invariants des équations différentielles. C. R. CVII. 898-900.

Der Verfasser giebt den bisher vermissten allgemeinen Beweis für die Existenz der Invarianten einer Differentialgleichung beliebiger Ordnung und Grades. Er stützt sich dabei auf die von Herrn Lie in seinem Werke „Theorie der Transformationsgruppen" erlangten Resultate. Hr.

L. KÖNIGSBERGER. Der Cauchy'sche Satz von der Existenz der Integrale einer Differentialgleichung. J. für Math. CIV. 174-176.

Die gegebene Differentialgleichung sei

$$(1)\qquad y^{(m)} = \sum_{(\nu,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_{m-1})} A_{\nu\nu_0\nu_1\ldots\nu_{m-1}}\, x^{\nu} y^{\nu_0} y'^{\nu_1}\ldots y^{(m-1)^{\nu_{m-1}}},$$

wo die Potenzreihe rechts auch noch für Werte von

$$|x|,\ |y|,\ \ldots,\ |y^{(m-1)}|$$

convergiren soll, die > 1 sind, und wo für $x = 0$ vorgeschrieben sei $y = 0$, $y' = 0$, $\ldots$, $y^{(m-1)} = 0$ (auf diesen Fall kann man immer durch eine rationale Substitution zurückkommen). Ferner mögen die absoluten Beträge der A die Grenze M nicht überschreiten; es wird alsdann (1) verglichen mit

$$(2)\qquad \eta' = M(1+2\xi+3\xi^2+4\xi^3+\cdots)\,(1+\eta+\eta^2+\cdots)$$
$$\cdot(1+\eta+\eta^2+\cdots)\cdots(1+\eta+\eta^2+\cdots)$$

(wo die letzten gleichen Potenzreihen m-mal wiederholt sind).

Die letzte Gleichung liefert

$$-\frac{(1-\eta)^{m+1}}{m+1}+\frac{1}{m+1}=\frac{M.\xi}{1-\xi},$$

also

$$\eta = \overline{\mathfrak{P}}(\xi),$$

und hieraus folgt durch bekannte Schlüsse die Existenz eines Integrals

$$y = \mathfrak{P}(x)$$

der Gleichung (1) in der Umgebung von $x = 0$. P. G.

L. KÖNIGSBERGER. Ueber algebraische Beziehungen zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen für eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Math. Ann. XXXI. 75-84.

Es sei die irreductible Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0$$

gegeben, so kann zwischen zwei Fundamentalintegralen derselben und deren Ableitungen nur dann eine algebraische Beziehung stattfinden, wenn $f_1(x)$ der logarithmische Differentialquotient einer algebraischen Function ist, und dann ist

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = ae^{-\int f_1(x)dx}$$

die einzige algebraische Relation. Hr.

L. KÖNIGSBERGER. Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. XXXI. 220-226.

$$(1) \quad y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \cdots + p_{m-1} y' + p_m y$$

sei eine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnuug mit algebraischen Coefficienten; es wird die Frage erörtert, ob ein Integral derselben eine algebraische Function eines anderen Integrals und der $m-2$ Ableitungen von der Form

$$y_2 = F(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-2)})$$

sein kann, wenn y_1 nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der m^{ten} genügen soll. Lässt man zunächst in die fragliche Beziehung die Ableitungen

nicht eintreten, so ergiebt sich, dass nur dann $y_2 = F(x, y_1)$ (F algebraische Function) sein kann, wenn die Gleichung (1) ein algebraisches Integral η besitzt, und zwar ist dann die Beziehung von der Form

$$y_2 = cy_1 + \eta \quad (c \text{ eine Constante}).$$

Im übrigen wird die allgemeinere Frage für $m=3$ in folgender Weise erledigt: Die Beziehung $y_2 = F(x, y_1, y_1')$ (F algebraische Function) findet nur dann statt, wenn die Differentialgleichung dritter Ordnung drei Fundamentalintegrale von der Form

$$e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_1-g\right)\frac{dx}{f}},\quad e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_2-g\right)\frac{dx}{f}},\quad e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_3-g\right)\frac{dx}{f}}$$

besitzt, worin c eine Constante, f und g beliebige algebraische Functionen von x sind und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die drei Lösungen der kubischen Gleichung

$$\alpha^3 - \alpha\left(c_1 + \frac{c^2}{3}\right) - c_2 = 0 \quad (c_1, c_2 \text{ Constanten})$$

sind, und zwar hat dann jene Beziehung die Form $y_2 = fy_1' + gy_1$.

Hr.

L. Königsberger. Ueber die Erniedrigung der Ordnung algebraischer Differentialgleichungen mit Hülfe bekannter Integrale. Math. Ann. XXXI. 302-308.

Ist die algebraische Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$y^{(m)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})$$

gegeben, so handelt es sich darum, wie sie beschaffen sein muss, damit sie durch eine Substitutionsgleichung von der Form

$$f(x, y, y', y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-1)}, z) = 0,$$

worin y_1 ein particuläres Integral von (1) bedeutet, auf eine mit Adjungirung von y_1 und dessen Ableitungen algebraische Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für z

$$F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-1)}, z, z', \ldots, z^{(m-1)}) = 0$$

reducirt wird. Die bezügliche Untersuchung, die offenbar die Verallgemeinerung der bekannten Lagrange'schen Reduction der linearen Differentialgleichung zum Ziel hat, wird für $m = 2$ durchgeführt und ergiebt folgenden Satz, der, wie bemerkt wird,

auf algebraische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung übertragbar ist: Unter allen algebraischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die nicht unmittelbare algebraische Zusammensetzungen von Differentialausdrücken erster Ordnung und deren Differentialquotienten sind, haben nur die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Eigenschaft, dass sie mit Hülfe eines Integrals auf algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung reducirt werden können. Hr.

L. Königsberger. Ueber die für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfindenden algebraischen Beziehungen. J. für Math. CIII. 274-320.

Im einleitenden Teil wird folgender auf beliebige algebraische Differentialgleichungen mit x als unabhängiger und y als abhängiger Veränderlichen bezügliche Satz entwickelt: Wenn ein Integral derselben eine irreductible algebraische Function w von $x, y, y'_1, \dots$ ist, wo y_1 ein anderes Integral bedeutet, welches nicht schon einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung genügt, so lassen sich die unendlich vielen Integrale in Gruppen von der Form ordnen

$$\eta_1, \omega(x, \eta_1, \eta'_1, \dots), \omega^2(x, \eta_1, \eta'_1, \dots), \dots,$$
$$\eta_2, \omega(x, \eta_2, \eta'_2, \dots), \omega^2(x, \eta_2, \eta'_2, \dots), \dots,$$

wo $\omega^\varkappa$ die $\varkappa$-fach iterirte Function ω bedeutet. Die Anzahl der Elemente einer Gruppe ist im allgemeinen unendlich gross; ist sie in einer Gruppe endlich, so dass z. B. $\omega^\delta(x, \eta_1, \eta'_1, \dots) = \eta_1$, dann enthält jede Gruppe gleich viele Elemente. Ist die Differentialgleichung linear homogen von der m^{ten} Ordnung, so ist die Anzahl der Gruppen endlich $< m$, und für die Elemente einer Gruppe ergiebt eine höhere Iterirung als die $(\lambda - 1)^{\text{te}}$ der Function ω $(\lambda \leqq m)$ nur eine lineare Function der vorangehenden Elemente derselben Gruppe. Hiervon wird u. a. eine Anwendung gemacht auf die Untersuchung der Möglichkeit einer Beziehung

$$y_2 = f y_1 + g y'_1,$$

wo y_1 und y_2 Integrale einer irreductiblen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung und f eine algebraische Function bedeutet. Es zeigt sich als notwendige Bedingung hierfür, dass die Gleichung zur Fuchs'schen Klasse gehöre. Darauf geht der Verfasser zur Behandlung des eigentlichen Gegenstandes der vorliegenden Arbeit über, betreffend die möglichen allgemeinen Relationen, welche zwischen den particulären Integralen und deren Ableitungen einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung $y'''+p_1y''+p_2y'+p_1y=0$ stattfinden können. Damit eine algebraische Beziehung zwischen der unabhängigen Variablen x, drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen besteht, ist es notwendig und hinreichend, dass die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der reducirten Form mit Adjungirung dieses Integrals, dessen Ableitungen und der Function $e^{\int p_1 dx}$ reductibel ist. Die gesuchten Relationen sind bekannt, wenn man die Differentialgleichungen erster Ordnung aufstellen kann, denen die Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Die Frage der Reductibilität einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, auf die so die vorliegende Untersuchung zurückgeführt ist, wird nun in der verallgemeinerten Fassung, dass Integrale verschiedener algebraischer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung adjungirt sind, behandelt. Für den vorliegenden Fall ergiebt sich zur näheren Feststellung der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Existenz einer Relation gedachter Art, dass die erwähnte Differentialgleichung zweiter Ordnung entweder ein algebraisches Integral besitzen muss, oder dass zwei und nur zwei ihrer Fundamentalintegrale mit Adjungirung derselben Grössen linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, oder dass endlich alle ihre Integrale solchen genügen müssen. Hr.

L. Fuchs. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Berl. Ber. 1115-1126, 1273-1290.

Bildet man aus n von einander unabhängigen Integralen

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Differentialgleichung $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$(1) \qquad \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + p_1 \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} + \cdots + p_{2n}y = 0$$

die $\nu = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}$ Determinanten

$$\begin{vmatrix} y_1^{(x_1)} & \ldots & y_n^{(x_1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(x_n)} & \ldots & y_n^{(x_n)} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \text{ eine Combination zu je } n \text{ aus den} \\ \text{Zahlen } 0, 1, 2, \ldots, 2n-1 \end{pmatrix},$$

die mit $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ bezeichnet seien, so genügen dieselben im allgemeinen einer Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung

$$(2) \qquad \frac{d^\nu u}{dx^\nu} + P_1 \frac{d^{\nu-1}u}{dx^{\nu-1}} + \cdots + P_\nu u = 0,$$

worin $P_1, \ldots, P_\nu$ rationale Functionen von x bedeuten. Es wird vorausgesetzt, dass die Ordnung derselben nicht niedriger als ν ist, wofür notwendig und hinreichend ist, dass ein gewisser hier nicht wiederzugebender Ausdruck als Function von x nicht identisch verschwindet. Alsdann lässt sich eine quadratische Form

$$Z = \sum_{\alpha,\beta} P_{\alpha\beta} u^{(\alpha)} u^{(\beta)} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, \nu-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, \nu-1 \end{pmatrix},$$

wo $P_{\alpha\beta}$ rationale Functionen von x sind, bilden, von der Eigenschaft, dass sie, mit $e^{\int p_1 dx}$ multiplicirt, einer Constanten gleich wird, wenn man für u ein beliebiges Integral der Gleichung (2) einsetzt. Der Wert der Constanten ist von den Anfangswerten des Integrals abhängig. Transformirt man die Differentialgleichung durch die Substitution $u = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} t$, so ist die entsprechende quadratische Form Z' in t und den Ableitungen von t selbst eine Constante für ein beliebiges Integral der Gleichung und $M = \frac{\partial Z'}{\partial t^{\nu-1}}$ ein Multiplicator der Gleichung. Z' lässt sich auf eine bemerkenswerte Gestalt bringen, worin nur die Quadrate linearer Functionen von t und ihrer Ableitungen vorkommen. In der zweiten Mitteilung handelt es sich um die Frage, in welchem Falle die Gleichung (2) reductibel wird nach

der von Herrn Frobenius (J. für Math. LXXVI. 236, F. d. M. V. 1873. 176) eingeführten Festsetzung dieses Begriffs. Hierfür wird folgender Satz entwickelt: Wenn die Differentialgleichung (1), in deren Coefficienten ein Parameter k auftritt, ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ besitzt von der Beschaffenheit, dass in dem ganzen Verlaufe der Variabeln x die Gleichungen bestehen

$$(3) \quad \frac{\partial y_\alpha}{\partial k} = A_0 y_\alpha + A_1 y'_\alpha + \cdots + A_{2n-1} y_\alpha^{(2n-1)} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 2n),$$

wo $A_0, A_1, \dots, A_{2n-1}$ rationale Functionen von x sind, dann ist die Differentialgleichung (2) reductibel. Diese Eigenschaft ist für die Differentialgleichungen (1), die die genannte Bedingung erfüllen, fundamental. Zu ihnen gehören, wie nachgewiesen wird, die Differentialgleichungen $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, welchen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale $\int \frac{g(z)\,dz}{\sqrt{\varphi(z, x)}}$ erster und zweiter Gattung genügen, die der Verf. im J. für Math. LXXI. 91 (F. d. M. II. 1870. 248) aufgestellt hat. $\varphi(z, x)$ ist eine ganze rationale Function von z und x und zwar vom $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grade in z. Es zeigt sich nun, dass die Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln, welche zuerst Herr Weierstrass aus dem Satze von der Umkehrung von Parameter und Argument hergeleitet hat, sich als unmittelbare Folgerungen der Reductibilität der entsprechenden Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung für die aus den Integralen und ihren Derivirten nach x gebildeten Determinanten darstellen. Als Parameter k dient hier ein Verschwindungswert der Function $\varphi(z, x)$. Die Ausführung der erforderlichen Rechnung erfolgt in einer späteren (inzwischen bereits erschienenen) Mitteilung, über die im nächsten Jahrgang berichtet werden wird. Es sei noch bemerkt, dass die Eigenschaft der Integrale einer Differentialgleichung, die Relationen (3) zu erfüllen, mit einer anderen, nämlich dass die Coefficienten der zur Differentialgleichung gehörigen Substitutionsgruppe von k unabhängig sind, in notwendiger Verknüpfung steht. Hr.

W. G. Imschenetzky. Zur allgemeinen Methode für die Auffindung der rationalen gebrochenen particulären Integrale der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. Petersb. Abh. LVI. (Russisch.)

In einer früheren Abhandlung (F. d. M. XIX. 296) hat der Verfasser die Bedingungen angegeben, welche erfüllt sein müssen, damit die Differentialgleichung

$$P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m y = V$$

mit ganzen rationalen Coefficienten rationale Integrale hat. Er zeigt jetzt im ersten Abschnitte die Notwendigkeit dieser Bedingungen mit Hülfe der recurrenten Reihen, in welche sich die rationalen Integrale zerlegen lassen, wenn sie existiren.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage nach der Ermittelung des algebraischen Wertes des Integrals $\int f(x, y)dx$, wo $f(x, y)$ eine rationale Function von x und y und y die Wurzel einer irreductiblen algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten:

$$(1) \qquad y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \cdots + p_{n-1} y + p_n = 0$$

ist. Diese Frage reducirt sich, wie schon Liouville (Journ. de l'École Polytechnique Cah. XXII) gezeigt hat, auf die Auffindung der rationalen Integrale eines Systems der simultanen linearen Differentialgleichungen. Liouville und nach ihm Raffy (Sur les quadratures algébriques et logarithmiques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) II; F. d. M. XVII. 1885. 295) haben eine Methode gegeben, welche auf dem Umstände beruht, dass man den gemeinsamen Nenner der particulären Lösungen des Systems der Differentialgleichungen a priori kennt; dieser Nenner ist nämlich in dem Falle, wo die Coefficienten p_i ganze Functionen sind, die Discriminante der Gleichung (1). Der Verfasser zeigt jetzt, dass die Betrachtung der Discriminante ohne Nutzen ist, sogar die Lösung der Frage erschwert, und er giebt eine einfachere Methode für die Ermittelung der algebraischen Werte der Integrale. Dass die neue Methode eine einfachere ist, zeigt er unter anderem an

dem Beispiele des Herrn Raffy, „den algebraischen Wert des Integrals $\int y dx$ zu ermitteln, wo y der algebraischen Gleichung $y^3-3y+2x=0$ genügt".

Im dritten Abschnitte wird das Theorem bewiesen, welches früher ohne Beweis von Ostrogradsky (Suite du mémoire sur l'intégration des fractions rationnelles. Mém. de l'Ac. Imp. de Saint-Pétersbourg (6) II. 668) gegeben wurde: „Wenn das Integral

$$\int\left(\frac{L_1}{y^{n-1}}+\frac{L_2}{y^{n-2}}+\cdots+\frac{L_{n-1}}{y}\right)dx$$

(wo $y^n=R$, R eine ganze Function und L_1, L_2, ..., L_{n-1} rationale Functionen von x sind) einen algebraischen Wert hat, so sind auch die Integrale

$$\int\frac{L_1}{y^{n-1}}dx,\quad \int\frac{L_2}{y^{n-2}}dx,\quad \cdots,\quad \int\frac{L_{n-1}}{y}dx,$$

jedes einzeln betrachtet, algebraisch; im allgemeinen hat man

$$\int\frac{L_m}{y^{n-m}}dx=Xy^m+C,$$

wo X eine rationale Function von x ist". Wi.

FABRY. Reductibilité des équations différentielles linéaires. C. R. CVI. 732-734, S. M. F. Bull. XV. 135-142.

Es handelt sich darum, bei einer gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten zu untersuchen, in welchem Falle es eine Gleichung der nämlichen Form n^{ter} Ordnung ($n<m$) giebt, deren sämtliche Integrale der ersten Gleichung genügen, und gegebenen Falls dieselbe zu bestimmen. Der Verfasser setzt zu dem Ende die m Integrale der ersteren Gleichung in der Umgebung jedes der singulären Punkte sowie des Unendlichkeitspunktes in der Form an:

$$e^{\varphi(x-a)^{\frac{1}{\nu}}}(x-a)^{\varrho}F[(x-a)^{\frac{1}{\nu}},\log(x-a),x-a],$$

welche für $\nu=1$ in die Thomé'sche Normalform übergeht. Wie bekannt, sind diese Reihen, wenn auch formal genügend, im all-

gemeinen divergent. Man bildet nun alle möglichen Gruppen von je n der m Integrale, wobei jedoch diejenigen, die sich auseinander ableiten, zugleich genommen werden müssen, und bestimmt aus der logarithmischen Ableitung ihrer Differentialdeterminante den Coefficienten q_1 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung in der Gleichung n^{ter} Ordnung (der Coefficient der n^{ten} Ableitung ist $= 1$ gesetzt) durch Berechnung der Glieder mit negativen Potenzen von $(x-a), (x-a'), \dots, \frac{1}{x}$. Die Integrale für $x = \infty$ liefern auch noch die etwaigen ausserwesentlich singulären Punkte $\alpha, \alpha', \dots$ der Gleichung n^{ter} Ordnung und die entsprechenden Glieder in der Entwickelung von q_1. Alsdann bestimmt man die Coefficienten $q_2, q_3, \dots$ für jeden singulären Wert, wobei man weiss, dass q_ν in der Umgebung von $x = \alpha$ mit dem Gliede $(x-\alpha)^{-\nu}$ beginnen muss. Nachdem so ein möglicher Ausdruck für die rationalen Coefficienten der Gleichung n^{ter} Ordnung gebildet ist, hat man zu verificiren, ob die Gleichung m^{ter} Ordnung eine Consequenz der gefundenen ist. Hr.

L. W. Thomé. Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die algebraischen Functionen. J. für Math. CIV. 1-31.

Genügt s einer algebraischen Gleichung n^{ter} Ordnung, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, so kann man nach einem bekannten Eliminationsverfahren eine lineare homogene Differentialgleichung σ^{ter} Ordnung $(\sigma \leqq n)$ mit rationalen Coefficienten finden, der die algebraische Function s genügt. In der Voraussetzung nun, dass die algebraische Gleichung irreductibel sei, wird zunächst aus der durch Elimination erhaltenen Differentialgleichung für s diejenige hergeleitet, deren Ordnung gleich der Anzahl der linear unabhängigen Zweige von s ist. Diese Differentialgleichung wird alsdann zur Untersuchung der Function s, zur vollständigen Darstellung der Zweige von s in den Punkten, für welche mehrere Wurzeln der Gleichung zusammenfallen, und zur Bestimmung der Fortsetzungsweise der Zweige verwandt. Hr.

L. W. THOMÉ. Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. J. für Math. CIII. 346-347.

Der Verfasser erwidert auf die Abwehr, die Herr Poincaré in der Abhandlung „Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires" (Acta Math. VIII, s. F. d. M. XIX. 1887. 305) auf eine Bemerkung des Herrn Thomé im J. für Math. CI. veröffentlicht hatte, dass in dieser Bemerkung keineswegs der Vorwurf enthalten sei, als ob Herr Poincaré die in den formalen Entwickelungen auftretenden Exponenten mit den Exponenten in den wirklich bestehenden Reihen identisch angenommen hätte.

Hr.

M. HAMBURGER. Ueber eine specielle Klasse linearer Differentialgleichungen. J. für Math. CIII. 238-273.

Diese Abhandlung knüpft an die Arbeit des Herrn Cayley „Note on the theory of linear differential equations" (J. für Math. C. 286, F. d. M. XVIII. 279) an. Herr Cayley hatte daselbst, um die „Normalintegrale"

$$y = (x-a)^A \cdot e^{\frac{A_m}{(x-a)^m}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}} \cdot \mathfrak{P}(x-a)$$

einer linearen Differentialgleichung zu bestimmen, ein Verfahren angegeben, in dem Ansatze

$$(1)\ z = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{m\,.\,A_m}{(x-a)^{m+1}} - \cdots - \frac{A_1}{(x-a)^2} + \frac{A}{x-a} + \overline{\mathfrak{P}}(x-a)$$

die Coefficienten A_n zu berechnen, ohne indessen die Bedingungen für die wirkliche Existenz der nur formal aufgestellten Integrale zu untersuchen. Der Herr Verfasser macht darauf aufmerksam, dass der Ansatz (1) nicht ohne weiteres allgemein zulässig sei; wenn nämlich y in der Umgebung von a unendlich viele Nullstellen, also z in jeder Nähe von a noch unendlich viele Unendlichkeitsstellen besitzt, so lässt z überhaupt keine in der Umgebung von a gültige Entwickelung nach positiven und negativen Potenzen von $(x-a)$ zu; vergl. die Abhandlung des Herrn Fuchs: „Ueber die Werte, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können" (Berl. Ber. 1886. 4, F. d. M. XVIII. 280).

Die Untersuchung der Bedingungen, unter welchen der Ansatz (1) zu wirklich gültigen Integralen führt, stösst im allgemeinen auf grosse Schwierigkeiten; sie lässt sich vollständig durchführen für den Fall, dass die gegebene Differentialgleichung zu der vom Herrn Verfasser (J. für Math. LXXXIII. 200, F. d. M. IX. 289) aufgestellten Klasse gehört, d. h. nur einen singulären Punkt ($x = 0$) im Endlichen besitzt, während im Unendlichen sich sämtliche Integrale regulär verhalten. Sie hat alsdann die Form

$$(2)\qquad x^n \cdot \frac{d^ny}{dx^n} + x^{n-1}.\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \varphi_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot y = 0,$$

wo $\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right), \ldots, \varphi_n\left(\frac{1}{x}\right)$ beständig (ausser für $x = 0$) convergente Potenzreihen des Arguments $\frac{1}{x}$ bedeuten. Die von Herrn Cayley als Beispiel behandelte Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\alpha}{x^4} + \frac{\beta}{x^3} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x} + \varepsilon\right)y$$

gehört dieser Klasse an, wenn $\delta = \varepsilon = 0$ gesetzt wird, was für die Form der von Herrn Cayley gegebenen Lösung ohne Belang ist.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit bezieht sich nun eben auf dieses Beispiel und dient so zur Einleitung in die nachfolgenden allgemeinen Betrachtungen; es ergeben sich die Bedingungen dafür, dass die Cayley'schen Formeln in dem Falle $\delta = \varepsilon = 0$ Gültigkeit besitzen, in höchst einfacher Weise.

Sodann wendet sich der Herr Verfasser zur Behandlung der allgemeinen Gleichung (2). Dieselbe besitzt nach den Sätzen des Herrn Fuchs im allgemeinen ein Fundamentalsystem von Integralen folgender Form:

$$(3)\qquad \left(\frac{1}{x}\right)^{r_1}\cdot\psi_1\left(\frac{1}{x}\right), \ldots, \left(\frac{1}{x}\right)^{r_n}\cdot\psi_n\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $\psi_1, \ldots, \psi_n$ wieder beständig convergente Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ und $r_1, \ldots, r_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$(4)\qquad F(r) = r(r+1)\cdots(r+n-1) - r(r+1)\cdots(r+n-2).\varphi_1(0) + \cdots \\ + (-1)^{n-1}r.\varphi_{n-1}(0) + (-1)^n.\varphi_n(0) = 0$$

sind. Soll nun (2) ein Normalintegral von der Form

$$(1a)\qquad \begin{cases} y = x^A . e^{G\left(\frac{1}{x}\right)} . \mathfrak{P}(x), \\ G\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{A_m}{x^m} + \cdots + \frac{A_1}{x} \end{cases}$$

zulassen, so muss dasselbe mit einem der Elemente $\left(\frac{1}{x}\right)^r . \psi\left(\frac{1}{x}\right)$ des Systems (3) übereinstimmen; hierzu aber ist erforderlich, dass 1) $\mathfrak{P}(x)$ eine ganze rationale Function $f(x)$ sei; 2) die Gleichung

$$A = -r - k$$

bestehe, wo r eine Wurzel von (4) und k der Grad von $f(x)$ ist. Zunächst werden nun die eventuell möglichen Ausdrücke der Function $G\left(\frac{1}{x}\right)$ bestimmt unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten der Gleichung (2) rationale Functionen seien; diese Gleichung sei dann

$$(2a)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + q_1(x) . \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n(x) . y = 0.$$

Mit Hülfe der Bemerkung, dass aus

$$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = x^{-(m+1)} \mathfrak{P}_1(x)$$

für $m \geqq 1$ (was wir natürlich voraussetzen) sofort

$$\frac{1}{y} . \frac{d^i y}{dx^i} = x^{-i(m+1)} [\mathfrak{P}_1^i(x) + x^m \overline{\mathfrak{P}}_i(x)]$$

folgt, erhält man folgende Regel: Man wähle m so, dass die Functionen

$$x^{i(m+1)} . q_i(x) = p_i(x) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

ganze rationale Functionen von x werden, und bilde die Gleichung:

$$(5)\quad f(x, v) = v^n + p_1(x) . v^{n-1} + \cdots + p_n(x) = 0.$$

Hat man dann eine Entwickelung der algebraischen Function v nach ganzen positiven Potenzen von x, so liefert das Aggregat der Glieder mit $x^0, x^1, \ldots, x^{m-1}$ in dieser Entwickelung einen

Ausdruck für die Function

$$(6) \qquad u = x^{m+1} \cdot \frac{dG\left(\frac{1}{x}\right)}{dx},$$

wodurch G bestimmt ist.

Geht nun ferner die Gleichung (2a), die auch in der Form

$$x^{n(m+1)} \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + x^{(n-1)(m+1)} \cdot p_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x) \cdot y = 0$$

geschrieben werden kann, durch die Substitution

$$y = e^{G\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \eta$$

in

$$(7) \qquad x^{n(m+1)} \cdot \frac{d^n \eta}{dx^n} + x^{(n-1)(m+1)} \cdot \bar{p}_1(x) \frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}} + \cdots + \bar{p}_n(x) \cdot \eta = 0$$

über, so muss der Exponent A eine Wurzel der zu $x = 0$ gehörigen determinirenden Gleichung von (7) sein; diese wird

$$A \cdot \bar{p}_{n-1}(0) + \left[\frac{\bar{p}_n(x)}{x^m}\right]_{x=0} = 0$$

($\bar{p}_n(x)$ ist durch x^m teilbar); dabei ist

$$\bar{p}_{n-1}(0) = \left[\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\right]_{x=0,\, v=u_0},$$

wo $u_0 = -m.A_m$ den Wert der Grösse u für $x = 0$ bedeutet. Gehört also die Entwickelung der algebraischen Function v, welche zur Bestimmung von u benutzt wurde, zu einer einfachen Wurzel der Gleichung $f(0,v) = 0$, so ist der zugehörige Exponent A eindeutig und endlich bestimmt.

Nachdem A bekannt ist, liefert (7) lineare Gleichungen für die Coefficienten B_h in

$$f(x) = B_0 + B_1 x + \cdots + B_k x^k;$$

da die Anzahl dieser Gleichungen die der Unbekannten übertrifft, so treten zu der Bedingung

$$A = -r - k$$

noch weitere $m(n-1)-1$ Bedingungen hinzu. Die Gestalt der Recursionsformel für die B_k liefert übrigens in sehr bemerkenswerter Weise einen nochmaligen Beweis dafür, dass in (1a)

$\mathfrak{P}(x) = f(x)$ sein muss; sie zeigt nämlich, dass eine nicht abbrechende Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} B_h x^h$ notwendig divergiren müsste.

Den Schluss der Abhandlung bilden einige Bemerkungen über diejenigen Normalintegrale, welche aus den Entwickelungen der algebraischen Function v (Gleichung (5)) nach gebrochenen Potenzen von x hervorgehen. P. G.

K. Heun. Remarks on the logarithmic integrals of regular linear differential equations. American J. X, 205-224.

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$(1) \qquad \psi(x)^p \cdot \frac{d^p y}{dx^p} + \psi(x)^{p-1} \cdot F_1(x) \cdot \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} + \cdots + F_p(x) \cdot y = 0,$$

wo

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \xi_i)$$

und $F_k(x)$ eine ganze rationale Function vom Grade $k(n-1)$ ist. Sind in der zu $x = \xi_i$ gehörigen Fundamentalgleichung π gleiche Wurzeln vorhanden, so entspricht denselben eine Gruppe von Integralen der Gleichung (1) von folgender Form:

$$(2) \quad y_{ki} = \eta_{ki} + c_{k-1,1} \cdot \eta_{k-1,i} \log(x - \xi_i) + c_{k-2,2} \cdot \eta_{k-2,i} \log^2(x - \xi_i) + \cdots + c_{1,k-1} \eta_{1i} \log^{k-1}(x - \xi_i)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \pi),$$

wobei

$$\eta_{hi} = (x - \xi_i)^{\lambda_{hi}} \cdot \mathfrak{P}_h(x - \xi_i) \qquad (h = 1, \ldots, \pi)$$

ist; $\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{\pi i}$ sind nur um ganze Zahlen oder Null von einander verschieden. Zwischen den Constanten $c_{k-\lambda,\lambda}$ in (2) bestehen für $\pi > 2$ gewisse Bedingungsgleichungen, die man findet, wenn man x in (2) einen Umlauf um $x = \xi_i$ machen lässt und berücksichtigt, wie sich $\overline{y}_{ki}$ (nach dem Umlauf) durch $y_{ki}, y_{k-1,i}, \ldots, y_{1i}$ ausdrückt. Um zu erkennen, wann die Logarithmen in (2) fortfallen, wird man die λ_{hi} als sämtlich von einander verschieden voraussetzen; dann nehmen jene Bedingungsgleichungen die Form

$$2c_{12} = c_{21} \cdot c_{11},\ 2c_{22} = c_{31} \cdot c_{21}, \ldots, \pi c_{1,\pi-1} = c_{2,\pi-2} \cdot c_{11}$$

an; die Anzahl der Bedingungen für den Fortfall der Logarithmen in (2) ist also $\pi - 1$.

Besonders bemerkenswert ist der Fall $\pi = p$. Wenn dann keine Logarithmen auftreten, so heisst ξ_i ein „pseudosingulärer Punkt" (point à apparence singulière). Hierzu müssen ausser den $p-1$ Bedingungen dafür, dass die Wurzeldifferenzen der determinirenden Fundamentalgleichung ganzzahlig seien, nach dem Obigen noch weitere $p-1$ Bedingungen erfüllt sein.

Für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(3) \qquad \psi(x)\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \chi(x)\cdot\frac{du}{dx} + \varpi(x).u = 0$$

[$\psi(x)$ wie oben, $\chi(x)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$, $\varpi(x)$ eine solche $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades; auf diese Form kann die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit überall regulären Integralen zurückgeführt werden durch eine von Herrn Fuchs in seinen Vorlesungen angegebene Transformation, vergl. F. d. M. XVIII. 1886. 290] können jene Bedingungen erhalten werden aus

$$u_2 = u_1 \int \frac{e^{-\int \frac{\chi(x)}{\psi(x)}dx}}{u_1^2}\,dx,$$

wenn man die Reihenentwickelung des Integrals u_1 aufgestellt hat.

Sind in (3) nur zwei endliche singuläre Punkte 0, 1 vorhanden ($n = 2$), wo also für u_1 in der Umgebung von $x = 0$ die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ zu nehmen ist, so wird der für $\gamma = m + 1$ (m positiv ganzzahlig) in u_2 im allgemeinen auftretende Logarithmus fortfallen, sobald α eine der Zahlen 1, 2, ..., m und β beliebig ist (oder umgekehrt).

Für drei singuläre Punkte 0, 1, a ($n = 3$) kann das Schema der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen in folgender Form vorausgesetzt werden:

0	1	a	∞
0	0	0	α
$1-\gamma$	$1-\delta$	$\gamma-\alpha-\beta+\delta$	β .

Dann muss $\varpi(x) = \alpha\beta(x-g)$ sein (g eine beliebige Constante).

Ist dann $\gamma = m+1$ (m positiv ganzzahlig), so kann g immer durch eine algebraische Gleichung m^{ten} Grades so bestimmt werden, dass $x=0$ ein pseudosingulärer Punkt wird; dabei bleiben α, β, δ willkürlich (ähnlich für die übrigen singulären Punkte).

Sind allgemein n endliche singuläre Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vorhanden und von diesen $\xi_1, \ldots, \xi_r$ pseudosingulär, so kann man das Integral u von (3) in der Form

$$u = P_0(x).v + P_1(x)\frac{dv}{dx}$$

ausdrücken, wo P_0, P_1 ganze rationale Functionen sind und v einer Differentialgleichung

$$\psi_1(x).\frac{d^2v}{dx^2} + \chi_1(x).\frac{dv}{dx} + \varpi_1(x)v = 0$$

genügt, in welcher

$$\psi_1(x) = \prod_{i=r+1}^{n}(x-\xi_i),$$

$\chi_1(x)$ eine ganze Function $(n-r-1)^{\text{ten}}$, $\varpi_1(x)$ eine solche $(n-r-2)^{\text{ten}}$ Grades ist; vergl. die Abhandlung des Verfassers Acta Math. XI. 97 (F. d. M. XIX. 1887. 374). P. G.

S. Pincherle. Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires. J. für Math. CIII. 84-86.

Es sei die lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\sum_{h=0}^{h=m} x^h(a_{h,0} + a_{h,1}x + \cdots + a_{h,p}x^p)\varphi^{(h)}(x) = 0$$

gegeben, wo $a_{h,k}$ ganze Zahlen sind, $a_{m,0} = 1$, und es sei

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n x^{\varrho+n} \qquad (c_0 = 1)$$

ein Integral derselben, wo ϱ eine Wurzel der Gleichung

$$D(\varrho) = \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-m+1) + a_{m-1,0}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-m+2) + \cdots + a_{10}\varrho + a_{00} = 0$$

ist, so gilt unter der Voraussetzung, dass diese Gleichung irreductibel und die Differenz zweier ihrer Wurzeln nicht eine ganze Zahl ist, folgender Satz: „Die Coefficienten c_n der Reihe sind von der Form

$$k_0 + k_1\varrho + \cdots + k_{m-1}\varrho^{m-1};$$

die Grössen $k_0, k_1, \dots$ sind Brüche, welche, auf die kleinste Benennung gebracht, im Nenner nur solche Primteiler p_n enthalten, die der Bedingung genügen, dass $\lim \frac{p_n}{n^{m^2}}$ für $n = \infty$ eine endliche Zahl ist“. Hr.

S. Pincherle. Sul carattere aritmetico dei coefficienti delle serie. Palermo Rend. II. 153-164.

In Verallgemeinerung des Satzes, den der Verf. im J. für Math. CIII. (s. voriges Referat) mitgeteilt hat, wird folgendes Resultat hergeleitet: Es sei die Differentialgleichung gegeben

$$q_0(x)\varphi(x) + q_1(x)\varphi'(x) + \cdots + q_s(x)\varphi^{(s)}(x) + xq_{s+1}(x)\varphi^{(s+1)}(x) + \cdots + x^{m-s}q_m(x)\varphi^{(m)}(x) = 0,$$

wo

$$q_h(x) = a_{h,0} + a_{h,1}x + a_{h,2}x^2 + \cdots + a_{h,p}x^p \qquad (h = 0, 1, 2, \dots, m)$$

und die $a_{\mu,\nu}$ ganze Zahlen sind.

Dann werden s Integrale in der Umgebung von $x = 0$ eindeutig, $m-s$ singulär sein. Die Coefficienten in den Entwickelungen der ersteren $\Sigma c_n x^n$ sind so beschaffen, dass $c_0, c_1, \dots, c_{s-1}$ willkürlich sind, und wenn für dieselben ganze Zahlen genommen werden, die übrigen c_m Brüche sind, deren Nenner nur Primfactoren p_n enthalten, welche der Bedingung genügen, dass $\lim\limits_{n=\infty} \frac{p_n}{n^{m-s}}$ endlich ist.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass

$$D_0(\lambda) = a_{s,0} + a_{s+1,0}\lambda + a_{s+2,0}\lambda(\lambda-1) + \cdots + a_{m,0}\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-(m-s-1)) = 0$$

irreductibel ist. Die $m-s$ übrigen Integrale sind entwickelbar in der Form $\Sigma c_n x^{n+\varrho}$, wo ϱ eine Wurzel der Gleichung $D_s(\varrho-s) = 0$ ist. Die Coefficienten c_n haben, $a_{m,0} = 1$ voraus-

gesetzt, die Form

$$k_0 + k_1 \varrho + \cdots + k_{m-s-1} \varrho^{m-s-1},$$

worin k_0, k_1, ... Brüche sind mit Nennern von der Beschaffenheit, dass der grösste in ihnen enthaltene Primfactor p_n der Bedingung genügt, durch $n^{(m-s)^2}$ dividirt für unendlich wachsende n sich einer endlichen Grenze zu nähern. Daran schliessen sich Bemerkungen, betreffend die Modificationen, die der Satz erfährt in dem Falle, dass $D_0(\lambda) = 0$ reductibel ist, sowie eine Verallgemeinerung des Satzes noch nach einer anderen Richtung, worüber auf die Originalabhandlung verwiesen sei. Hr.

P. Painlevé. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. C. R. CVI. 535-537.

Im Anschluss an frühere Mitteilungen des Verfassers in den Comptes Rendus CIV. 1829 u. CV. 58 (F. d. M. XIX. 1887. 336) giebt der Verfasser in sehr kurzer Andeutung ein Verfahren, durch rein algebraische Operationen zu entscheiden, ob das allgemeine Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung mit beliebigen algebraischen Coefficienten algebraisch ist. Für den Fall $n = 3$ wird noch ein besonderes Verfahren eingeschlagen und davon Anwendung gemacht auf diejenige nicht lineare Gleichung zweiter Ordnung, deren allgemeines Integral die willkürlichen Constanten linear enthält. Hr.

C. Guichard. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Acta Math. XII. 51-61.

Die Coefficienten R der linearen homogenen Gleichung

$$\frac{d^n z}{dx^n} + R_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + R_n z = 0$$

seien rational in x, y, wo zwischen x und y eine algebraische Gleichung besteht. Es sei ferner $x = a$, $y = b$ ein Verzweigungspunkt m^{ter} Ordnung, bei welchem die R endlich bleiben. Es wird folgender Satz bewiesen: Wenn x den Punkt a m-mal

umläuft, so kehren die n Integrale der Differentialgleichung auf ihre Anfangswerte zurück. H.

P. APPELL. Sur une classe d'équations différentielles réductibles aux équations linéaires. C. R. CVII. 776-778.

Damit eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\psi(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

worin ψ in Bezug auf $y, y', \dots, y^{(n)}$ ganz ist, ein allgemeines Integral von der Form

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_{n+1} y_{n+1}$$

zulasse, wo die Constanten $c_1, \dots, c_{n+1}$ durch eine algebraische ganze Relation

$$\varphi(c_1, \dots, c_n) = 0$$

verbunden sind und $y_1, \dots, y_{n+1}$ linear-unabhängige Functionen von x bezeichnen, ist es notwendig und hinreichend, dass eine Function λ von x existire von der Beschaffenheit, dass

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

sich in zwei Factoren zerlegen lässt, von denen der eine linear und homogen in $y, y', \dots, y^{(n+1)}$ ist. Ein analoger Satz gilt für die Integrale von $\psi = 0$, wenn sich $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ als Functionen von x so bestimmen lassen, dass

$$\frac{d^\nu \psi}{dx^\nu} + \lambda_1 \frac{d^{\nu-1}\psi}{dx^{\nu-1}} + \cdots + \lambda_\nu \psi$$

durch eine lineare und homogene Function von $y, y', \dots, y^{(n+\nu)}$ teilbar wird. Hr.

G. PEANO. Intégration par séries des équations différentielles linéaires. Math. Ann. XXXII. 450-456.

Diese Note ist die Uebersetzung einer in den Torino Atti Febr. 1887 veröffentlichten und in den F. d. M. XIX. 308 besprochenen Arbeit. Hr.

Köhler. Ueber die Form der logarithmischen Integrale einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung.
Schlömilch Z. XXXIII. 231-242.

Eine lineare nicht homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (A) mit x als unabhängiger, y als abhängiger Veränderlichen besitze ein Integral

$$y = f(x, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n),$$

worin f eine algebraische Function und $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ von einander unabhängige Logarithmen bedeuten, deren Ableitungen algebraische Functionen von x sind, so ist 1) jede nach den $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ beliebig oft genommene Ableitung ein Integral der reducirten Differentialgleichung (B), 2) muss y eine ganze rationale Function der ϑ von höchstens der m^{ten} Dimension sein, deren Coefficienten algebraische Functionen von x sind, woraus nach 1) folgt, dass ein Integral von (B) stets algebraisch ist. Im Folgenden wird speciell die Form derjenigen logarithmischen Integrale von (A), welche von der höchst möglichen, also von der m^{ten} Dimension ist, genauer festgestellt, wobei sich ergiebt, dass die Form, auf welche sie stets gebracht werden kann, höchstens m Logarithmen der angegebenen Art, darunter nur einen einzigen im m^{ten} Grade enthält, während sie in allen übrigen Logarithmen höchstens von der $\left[\frac{m}{2}\right]^{\text{ten}}$ Dimension ist. ($\left[\frac{m}{2}\right]$ die grösste in $\frac{m}{2}$ steckende ganze Zahl).

Von diesem Satze wird schliesslich noch die Umkehrung bewiesen, dass nämlich jeder Ausdruck der festgestellten Form einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit algebraischen Coefficienten genügt. Hr.

Allan Cunningham. Depression of differential equations.
Mess. (2) XVII. 118-145, XVIII. 122-127.

Systematische Erörterung der Methoden zur Erniedrigung der Ordnung von Differentialgleichungen in verschiedenen Fällen, die in Tabellen gebracht sind. Der Nutzen dieser Erniedrigungen

erscheint hauptsächlich als ein Hülfsmittel bei der Integration nicht linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung. Die Bedingungen dafür, dass die Gleichungen eine Erniedrigung zulassen, und die erforderlichen Substitutionen in den verschiedenen Fällen werden betrachtet und klassificirt. Der Verfasser wählt als Musterbeispiel, auf welches er seine verschiedenen Methoden anwendet, die Gleichung eines Kegelschnittes:

$$y'''^2 y^{V} - 45 y'' y''' y^{IV} + 40 y'''^3 = 0.$$

Der zweite Aufsatz, ein Nachtrag zum ersten, betrifft diese Differentialgleichung allein und enthält die Einzelheiten dreier nachträglichen Lösungsarten durch Erniedrigung vermittelst der in dem ersten Aufsatze gegebenen Methoden. Diese Lösungen sind jedoch nicht ganz so einfach wie die in dem ersten Aufsatze gegebenen. Glr. (Lp.)

J. J. Sylvester. Note on certain difference equations which possess an unique integral. Mess. (2) XVIII. 113-122.

Eine Differenzengleichung sei in Gliedern der Argumente $u_x, u_{x+1}, \ldots, u_{x+i}$ ausgedrückt; die Grade, mit welchen u_{x+i} und u_x in die Gleichung eingehen, mögen der obere und der untere Grad heissen. Diese Integrale sind es, welche mehr als der Gesamtgrad der ganzen Gleichung den wesentlichen Charakter der Lösung bestimmen. Ist m der obere Grad, und sind $u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}$ gegeben, so hat u_x für jeden über $i-1$ hinausgehenden Wert von x offenbar m^{x-i+1} Werte, und demgemäss giebt es im allgemeinen unendlich viele Integrale, sei es vollständige, sei es solche von einer gegebenen Ordnung der Deficienz (deficiency), indem die Deficienz nach der Anzahl der die Anfangswerte $u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}$ verbindenden Beziehungen geschätzt wird. Es ist jedoch in manchen Fällen möglich, ein Integral anzugeben, welches m^{x-i+1} Werte haben muss, und in einem solchen Falle kann kein anderes Integral vorhanden sein; ein solches Integral kann ein „einziges" (unique) oder ein „erschöpfendes" (exhaustive) genannt werden, und die Gleichungen, welche solche Integrale besitzen, können „einlösig" (unisolutional) heissen. Als das ein-

fachste Beispiel einer solchen Gleichung nehme man $u_{x+1}^m - u_x^n = 0$, worin m und n ganze Zahlen sind. Augenscheinlich ist $u_x = a^{\left(\frac{m}{n}\right)^x}$ eine Lösung, und dies ist das eine und alleinige vollständige Integral der Gleichung; denn es besitzt m^x Werte, so dass es keine anderen Integrale irgend welcher Art geben kann. In der gegenwärtigen Arbeit erforscht der Verfasser die Bildungsweise einlösiger Gleichungen zweiter Ordnung. Er betrachtet auch einlösige simultane Gleichungen. Glr. (Lp.)

L. J. Rogers, Matz. Solution of question 8841. Ed. Times XLVIII. 34.

Die Stammgleichung der Reciprocanten-Gleichung

$$9\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{d^4y}{dx^4} - 45\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3} + 40\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0$$

ist $(x^2+2px+p)(y^2+2ry+s) = (p^2-q)(r^2-s)$ Lp.

E. Picard. Sur la limite de convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles. C. R. CVI. 1466-1467.

Bedeutet in der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$f(x,y)$ eine Function, die für alle Werte von x und y innerhalb der um x_0 und y_0 mit den resp. Radien a und b beschriebenen Kreise holomorph ist, und ist M der grösste Modul von $f(x,y)$ in diesem Bereich, so existirt bekanntlich ein Integral der Gleichung, entwickelbar nach der Taylor'schen Reihe mit dem Werte y_0 für $x = x_0$. Als Radius des Kreises, in welchem die Reihe notwendig convergirt, geben Briot u. Bouquet den Ausdruck $a(1-e^{-\frac{b}{2aM}})$. Der Verfasser kann diesen Ausdruck durch einen grösseren Grenzwert ersetzen. Die Reihe convergirt noch innerhalb eines Kreises, dessen Radius die kleinste der Grössen a und $\frac{b}{M}$ ist. Der Beweis hierfür soll später veröffentlicht werden.

Hr.

P. Painlevé. Sur les équations différentielles du premier ordre. C. R. CVII. 221-224, 320-323, 724-726.

Gegenstand der Untersuchung sind Differentialgleichungen erster Ordnung $F(y, y', x) = 0$, deren allgemeines Integral ausser festen singulären Punkten noch bewegliche, d. h. mit der Integrationsconstante veränderliche singuläre Punkte der Art hat, dass, bei einem keinen der festen Punkte einschliessenden Kreislauf von x, der willkürlich angenommene Anfangswert y_0 für y bei beliebigem x_0 nur in n Werte $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ übergeht. Ein solches Integral genügt dann der Gleichung

$$y^n + R_1(y_0, y_0', x_0, x) y_{n-1} + \cdots + R_n(y_0, y_0', x_0, x) = 0,$$

wo die R_i rationale Functionen von y_0, y_0' sind, deren Coefficienten von x_0 und x in beliebiger Weise abhängen können, und es kann auch in die Form gesetzt werden

$$C = R(y, y', x) \qquad (R \text{ rational in } y \text{ und } y').$$

Zwischen zwei solchen Darstellungen

$$\gamma = l(y, y', x), \; \gamma' = l'(y, y', x)$$

besteht eine algebraische Beziehung $h(\gamma, \gamma') = 0$, so dass ein beliebiges Integral C eine rationale Function von γ und γ' ist. γ und γ' stellen eine rationale Correspondenz her zwischen den beiden algebraischen Curven $h = 0$ und $F = 0$ (in letzterer Gleichung x als Constante betrachtet). Die Theorie der rationalen Transformationen der algebraischen Curven gestattet, die Frage, ob das Integral eine endliche (übrigens unbekannte) Anzahl von Bestimmungen um die beweglichen singulären Punkte habe, zu entscheiden, wenn das Geschlecht π von h grösser als 1 angenommen wird. Wie aber π auch sei, es lässt sich stets durch rein algebraische Operationen erkennen, ob das Integral nur n Werte um bewegliche singuläre Punkte erhält, falls n gegeben ist. Je nachdem $\pi > 1$, $= 1$, oder 0 ist, geschieht die Integration algebraisch oder durch Quadratur oder durch Zurückführung auf eine Riccati'sche Gleichung. Hr.

L. Autonne. Sur l'application des substitutions quadratiques crémoniennes à l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre. (Suite.) C. R. CVI. 262-265.

Die in den C. R. vom 7. und 14. November 1887 (F. d. M. XIX. 339) dargelegte Methode der Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung H, mittelst geometrischer Darstellung der Integrale durch Curven auf einer der Differentialgleichung H zugehörigen Fläche S im Raume und Anwendung der Cremona'schen quadratischen Substitutionen, wird hier weiter entwickelt und an folgenden Beispielen ausgeführt, in denen die Integration von H auf Quadraturen zurückgeführt wird.

1) S hat die Gleichung

$$A(z_1,z_2).\ D(z_3,z_4)-B(z_1,z_2).\ C(z_3,z_4)=0,$$

wo A, B, C, D binäre Formen der Ordnungen α, β, γ, δ sind $(\alpha+\delta=\beta+\gamma)$.

2) S ist eine Regelfläche mit zwei geraden Leitlinien, und diese sind entweder conjugirt zum Complex $(12)-(34)=0$ oder liegen auf demselben. $(ik)=a_ib_k-a_kb_i$ bedeuten die sechs homogenen Coordinaten der Geraden

$$\sum a_iz_k=0,\ \sum b_iz_k=0\quad (i,k=1,2,3,4).$$

Hr.

R. Liouville. Sur certaines équations différentielles du premier ordre. C. R. CVI. 1648-1651.

Die Gleichung von der Form

$$y'+a_1y^3+3a_2y^2+3a_3y+a_4=0,$$

worin $a_1,\dots,a_4$ beliebige Functionen von x sind, lässt sich durch geeignete Substitutionen stets auf eine lineare Gleichung dritter Ordnung zurückführen. Dasselbe gilt von der Gleichung:

$$y''+3(\beta_1y+\beta_2)y'+\gamma_1y^3+3\gamma_2y^2+3\gamma_3y+\gamma_4=0,$$

wenn $25\gamma_1-18\beta_1^2=0$. Hr.

W. P. Workman. The theory of the singular solutions of the integrable differential equations of the first order. Quart. J. XXII. 175-198, 308-324. (1887.)

Nach einer historisch-kritischen Einleitung über die von

Darboux, Cayley, Casorati u. a. entwickelte Theorie der singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, die ein allgemeines algebraisches Integral zulassen, giebt der Verfasser eine allgemeine Methode zur Ableitung des tac-locus aus der Integralgleichung und dehnt die Theorie der singulären Lösungen, welche von Cayley nur für gewöhnliche Singularitäten abgeleitet worden ist, auch auf höhere Singularitäten aus. T.

W. Kapteyn. Note sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. Darboux Bull. (2) XII. 135-143.

Neue Herleitung der von den Herren Darboux (C. R. LXX. und LXXI. 1870) und Cayley (Messenger II. 1872 und VI. 1876, F. d. M. IV. 148 und VIII. 185) aufgestellten Sätze betreffs der singulären Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung und n^{ten} Grades in Beziehung auf y', in welchen die Coefficienten rationale Functionen von x und y sind. Hr.

W. Heymann. Ueber die Differentialgleichung $\frac{dx}{x^2-1}=\frac{ndy}{y^2-1}$. Schlömilch Z. XXXIII. 61-64.

Die Lösung der vorstehenden Gleichung in algebraischer Gestalt lautet:

$$(1)\qquad (x+1)(y-1)^n-c(x-1)(y+1)^n=0,$$

und wird für $c=1$:

$$(2)\qquad Y\equiv y^n-n_1xy^{n-1}+n_2y^{n-2}-n_3xy^{n-3}+\cdots=0,\; n_x=\binom{n}{x}.$$

Der Umstand, dass (2), als aus (1) entstanden, algebraisch auflösbar ist, wird angewandt 1) auf die Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichung, 2) auf die Auswertung des Integrals $\int\frac{dy}{(y+1)\sqrt[n]{y}}$ für $x=$ const. durch Logarithmen und Kreisbogen. Es ergiebt sich hierbei, dass das Integral

$$\int \frac{dz}{(z+\gamma)\sqrt{z^3-Az^2+Bz-C}}$$

für beliebige A, B, C in obiger Weise bestimmt werden kann, falls γ der Bedingung

$$(A^2-3B)\gamma^2+(AB-9C)\gamma+B^2-3AC=0$$

genügt. Hr.

A. Cayley. Note on the differential equation $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$. Mess. (2) XVIII. 90.

Methode zur Herstellung des Zusammenhanges des Integrals $c=xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ dieser Gleichung mit dem Integrale $\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}}{x-y}\right)^2=C$, welches letztere dadurch entsteht, dass man $1-x^2$ und $1-y^2$ für die biquadratischen Functionen X und Y in Lagrange's Integral der Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$ setzt.

Glr. (Lp.)

G. H. Halphen. Sur l'équation d'Euler. Palermo Rend. II. 40-44.

Handelt es sich um die Integration der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}\pm\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}=0,$$

wo X ein Polynom vierten Grades in X, X_1 das nämliche in x_1 ist, so hat man nach Euler drei Polynome A, B, C zweiten Grades in x so zu bestimmen, dass $X=AC-B^2$ und $F=Ax_1^2+2Bx_1+C$ symmetrisch in x und x_1 ist. $F=0$ ist dann das allgemeine Integral mit einer willkürlichen Constante. Hierbei macht die Erfüllung der Bedingung der Symmetrie einige Schwierigkeit. Diese umgeht der Verfasser in folgender Weise. Man wähle drei Polynome zweiten Grades a, b, c in x ohne weitere Bedingung, als dass $X=ac-b^2$ ist; dann werden die beiden

Zweige der durch die Gleichung

$$ay^2+2by+c=0$$

definirten algebraischen Function x von y, die mit x und x_1 bezeichnet seien, der Gleichung (1) genügen. Das algebraische Integral derselben wird also durch Elimination von y aus den Gleichungen

$$ay^2+2by+c=0,\quad a_1y^2+2b_1y+c_1=0$$

erhalten, also durch die Formel gegeben

$$(2)\qquad (ac_1-2bb_1+ca_1)^2=4(b^2-ac)(b_1^2-a_1c_1)=4XX_1;$$

a_1, b_1, c_1 bedeuten dieselben Functionen in x_1 wie a, b, c in x. Um hervortreten zu lassen, dass die Gleichung (2) nur eine willkürliche Constante enthält, wird bemerkt, dass (2) auf die Form gebracht werden kann

$$(3)\qquad (P+\lambda(x-x_1)^2)^2=4XX_1,$$

wo P irgend ein in x und x_1 symmetrisches doppelt quadratisches Polynom ist, welches für $x=x_1$ in $2X$ übergeht. λ ist eine willkürliche Constante. Die verschiedenen Formen, unter denen man P darstellen kann, ergeben verschiedene Integralformen, in denen stets nur eine willkürliche Constante λ vorkommt. Einige solcher Formen werden angegeben. Hr.

R. Rawson, D. Edwardes. Solution of question 7902. Ed. Times XLVIII. 32-33.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$A_2^{\frac{1}{2}}\left(1+B_2x^2+\frac{B_2^2A_4}{A_2^2}x^4\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}+B_2^{\frac{1}{2}}(1+A_2y^2+A_4y^4)^{\frac{1}{2}}=0$$

ist:

$$\{CA_2+B_2A_4x^2\}y^2+2\{(A_2B_2)^{\frac{1}{2}}(A_4+C^2-CA_2)^{\frac{1}{2}}\}xy+A_2+CB_2x^2=0.$$

Lp.

J. B. Pomey. Sur l'intégration de l'équation différentielle des coniques homofocales. Nouv. Ann. (3) VII. 194-196.

Die Differentialgleichung

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2-c^2)\frac{dy}{dx}-xy=0$$

wird gewöhnlich in der Weise integrirt, dass man sie durch die Substitution $x^2 = u$, $y^2 = v$ auf die Clairaut'sche Form bringt. Aber man kann sie direct integriren, indem man sie zunächst schreibt

$$\frac{xdy - ydx}{cdy} = \frac{cdx}{xdx + ydy},$$

woraus folgt

$$\frac{(x+c)dx + ydy}{(x-c)dx + ydy} = \frac{(x+c)dy - ydx}{-(x-c)dy + ydx} = \frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}$$

und endlich

$$\frac{(x+c)dx + ydy}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}} \pm \frac{(x-c)dx + ydy}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} = 0,$$

woraus unmittelbar das Integral folgt

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Hr.

C. F. Björling. Ueber die Coincidenzcurve der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung. Stockholm Akad. 16 S. 8°. (1887.)

E. Jahnke. Zur Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die unabhängige Veränderliche explicite nicht vorkommt, durch eindeutige doppeltperiodische Functionen. Diss. Halle. 33 S. 4°.

Alf. Guldberg. Bemärkninger over Ligningen $y\frac{dy}{dx} + Py = Q$. Zeuthen Tids. (5) VI. 203-206.

Der Verfasser giebt einige Fälle an, in denen man die Gleichung $y\frac{dy}{dx} + Py = Q$ integriren oder wenigstens particuläre Integrale finden kann.

V.

Bochow. Zusammenhang zwischen particulären und allgemeinen Integralen gewisser Differentialgleichungen. Schlömilch Z. XXXIII. 101-110.

Enthält lediglich Bekanntes, u. a. die Thatsache, dass die allgemeine Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung gegeben ist, wenn zwei particuläre Lösungen gefunden sind.

Hr.

A. R. Forsyth. On the theory of forms in the integration of linear differential equations of the second order. Quart. J. XXIII. 45-78.

Die Hineinziehung der Theorie der Formen in die Untersuchung der Integrale linearer Differentialgleichungen datirt von der Arbeit des Herrn Fuchs betreffs der Existenz algebraischer Integrale zweiter Ordnung (J. für Math. LXXXI, F. d. M. VII. 1875. 172). Seitdem haben sich mit diesem Gegenstande Herr Klein und insbesondere Herr Brioschi beschäftigt. Die Methode des letzteren ist auf Herrn Hermite's Theorie der associirten Covarianten (Math. Ann. XI. 401-412, F. d. M. IX. 1877. 238) gegründet. Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, an der Hand von Beispielen die Brioschi'sche Methode zu entwickeln. Nach einer Zusammenstellung der wichtigsten Resultate aus der Theorie der Covarianten erfolgt ihre Anwendung auf die Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung $\frac{d^2y}{dz^2} = Jy$ (J eine Function von z) für die Fälle, dass die Form $f(y_1, y_2)$, die als Function von x gegeben ist, vom zweiten bis fünften Grade ist, und noch für den Fall eines beliebigen Grades n, wenn $f(y_1, y_2)$ die specielle Gestalt $a_0 y_1^n + a_1 y_2^n$ hat. Es werden in allen diesen Fällen der zugehörige Wert von J und die Lösungen y_1, y_2 in expliciter Form hergestellt.

Hr.

K. Heun. Ueber Euler's homogenen lineären Multiplicator zur Integration der regulären lineären Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Ann. XXXI. 363-373.

Euler hat in seinen Inst. calc. integr. gezeigt, dass eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit y als abhängiger und x als unabhängiger Veränderlichen durch einen Multiplicator von der Form $J\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dJ}{dx}y$ integrabel gemacht werden kann. J genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung. Zur näheren Untersuchung dieser Integrationsmethode wird vorausgesetzt, dass die vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung zu denen gehöre, deren Integrale sich in allen singulären Punkten und im Unendlichen regulär verhalten. Sie kann dann bekanntlich stets in eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad \psi\frac{d^2w}{dx^2}+\chi\frac{dw}{dx}+\varpi w=0$$

transformirt werden, worin $\psi=(x-\xi_1)\dots(x-\xi_i)$, χ und ϖ ganze Functionen vom Grade resp. $i-1$ und $i-2$ sind. Die Gleichung für J besitzt dieselben singulären Stellen wie die vorgelegte Gleichung mit ebenfalls überall sich regulär verhaltenden Integralen. Der Verfasser stellt sich nun die Frage, wie (1) beschaffen sein muss, damit die Gleichung für J eine Transformation in eine Gleichung für G zulasse, nach der der Coefficient von $\frac{d^3G}{dx^3}$ die Function ψ und die folgenden Coefficienten ganze Functionen mit successive um eine Einheit abnehmendem Grade sind. Die Untersuchung ergiebt, dass dies nur der Fall ist, wenn $\chi=\frac{1}{2}\psi'$ ist, die Gleichung (1) also in

$$(2) \qquad \psi\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{2}\psi'\frac{dw}{dx}+\varpi w=0$$

übergeht. Die Gleichung für G, von der die Kenntnis einer Particularlösung genügt, um (2) vollständig zu integriren, lautet dann

$$(3) \qquad \psi\frac{d^3G}{dx^3}+\frac{3}{2}\psi'\frac{d^2G}{dx^2}+(\frac{1}{2}\psi''+4\varpi)\frac{dG}{dx}+2\varpi'G=0.$$

Dieselbe Gleichung (3), zu der man hier durch die Theorie des Euler'schen Multiplicators geführt wird, ist bereits von Herrn Fuchs in den Gött. N. 1878 (F. d. M. X. 231) zur Lösung von

(2) angewandt worden. Für $i = 3$ wird die Gleichung (2) eine Lamé'sche Gleichung, und wie Herr Fuchs gezeigt hat, genügt dann stets eine ganze Function der Gleichung (3), so dass in diesem Falle die Gleichung (2) allgemein integrirt werden kann. Aus der vorliegenden Untersuchung erhellt, dass der Fall der Lamé'schen Differentialgleichung der einzige ist, in welchem die Bestimmung des integrirenden Multiplicators die Integration wesentlich vereinfacht. (S. oben S. 324.) Hr.

J. Cockle. On the general linear differential equation of the second order. Lond. M. S. Proc. XIX. 257-278.

Eine Fortsetzung der Notiz: „On the equation of Riccati" (Lond. M. S. Proc. XVIII. 180-202), über welche F. d. M. XIX. 1887. 331 berichtet worden ist. Der Verfasser will zeigen, dass die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung lösbar sei „mit Hülfe einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten jedoch im allgemeinen nicht algebraisch sind"; es ist indessen aus der Abhandlung nicht zu ersehen, in welcher Weise dies ausführbar sein soll. P. G.

W. W. Johnson. On the integrals in series of binomial differential equations. American J. XI. 37-54.

Es werden zunächst „binomische" lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung betrachtet, d. h. solche, die mit Benutzung des Symbols

$$\vartheta = x.\frac{d}{dx} \quad \left(=\frac{d}{d\log x}\right)$$

in der Form

$$f(\vartheta)y - x^s.\varphi(\vartheta)y = X$$

geschrieben werden können (f und φ ganze rationale Functionen zweiten Grades von ϑ); wobei noch $s = 1$ angenommen werden darf. Die Reihenentwickelungen der regulären Integrale in der Umgebung von $x = 0$ werden für die verschiedenen Möglichkeiten aufgestellt, wobei die Resultate in den Fällen, wo Loga-

rithmen auftreten, durch einen dem Referenten nicht unbedenklich erscheinenden Grenzübergang erhalten werden. Im zweiten Teil zeigt der Verfasser, wie die Methode auf ähnlich gebaute lineare Differentialgleichungen dritter Ordnung auszudehnen ist.

P. G.

P. Schafheitlin. Ueber die Integraldarstellung der hypergeometrischen Reihe. Math. Ann. XXXI. 156.

Erwiderung auf eine von Herrn Sonine (Math. Ann. XXX. 582, F. d. M. XIX. 1887. 443) erhobene Prioritätsreclamation. Es wird bemerkt, dass die Formeln (vergl. die Abhandlung des Verfassers, Math. Ann. XXX., 157-178; F. d. M. a. a. O.), auf welche diese Reclamation sich bezieht, zwar der Form nach von Herrn Sonine aufgestellt seien, dass ihr Inhalt dagegen mit dem der Formeln des Verfassers sich nicht decke. P. G.

H. Gyldén. Integration af en icke-liniär Differential-Equation af 2. ordning. Stockholm Akad. 15 S. 8°.

J. Cockle. Solution of question 9195. Ed. Times XLIX. 53.

Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{u}{(a^2+b^2t^m)^2}$$

für die Fälle $m=1$ und 2 durch die Substitutionen bezw. $4t=b^2x^2-c^2$ und $t=n\sin\theta$ nebst $b^2n^2=-a^2$. Lp.

J. Cockle. On synthetical solution and on deformation. Quart. J. XXIII. 1-7.

Der Verfasser bemerkt, dass er die von Herrn W. Thomson in seiner Abhandlung „Mechanical integration etc.“ (Lond. R. S. Proc. XXIV. 271, F. d. M. VIII. 1876. 200) gesuchte Reduction der Differentialgleichung

$$Q_1\frac{d^iu}{dx^i}+Q_2\frac{d^{i-1}u}{dx^{i-1}}+\cdots+Q_i\frac{du}{dx}-u=0$$

auf die Form

$$u = \frac{1}{P_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{P_2}\frac{d}{dx}\cdots\frac{1}{P_{i-1}}\frac{d}{dx}\frac{1}{P_i}\frac{du}{dx}$$

für $i > 2$, in seiner Arbeit „On primary forms“ (Phil. Mag. 1875, F. d. M. VII. 193) unter gewissen Bedingungen für $i = 3$ geleistet hat. Sie kommt mit dem überein, was er in der Abhandlung „On the relation of certain symbols“ (Quart. J. XVII., F. d. M. XII. 1880. 268) mit synthetischer Lösung bezeichnet. Auf diese Arbeit und deren Fortsetzungen (Addendum und Second addendum Quart. J. XXII., F. d. M. XIX. 1887. 333) sieht er sich dadurch veranlasst, mit einigen ausführenden Erläuterungen zurückzukommen, unter vergleichendem Hinweis auf Mitteilungen des Herrn Rawson über diesen Gegenstand. Hr.

L. Schlesinger. Ein Beitrag zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit einer Relation dritten Grades zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen. Diss Kiel. Berlin. Mayer & Müller. 83 S.

Die linearen homogenen Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen, sind zuerst von Herrn Fuchs in den Acta Math. I. (F. d. M. XIV. 1882. 242, XV. 1883. 256) zum Gegenstande einer allgemeinen Untersuchung gemacht worden, die in ihrem Verlauf und in ihren Ergebnissen zugleich einen wichtigen Beitrag zur Functionentheorie bildet. In der vorliegenden Arbeit werden auf rein algebraischem Wege, ohne über den analytischen Charakter der Coefficienten der Differentialgleichung irgend welche Voraussetzungen zu machen, zunächst einige allgemeine Resultate der Fuchs'schen Arbeit abgeleitet, um daran eine erschöpfende Behandlung derjenigen Differentialgleichungen dritter Ordnung zu knüpfen, zwischen deren Integralen eine homogene Relation dritten Grades stattfindet. — Der Verfasser beginnt mit der Aufstellung von Invarianten der Differentialgleichung

$$(1)\qquad \frac{d^3y}{dz^3} + p_1(z)\frac{d^2y}{dz^2} + p_2(z)\frac{dy}{dz} + p_3(z) = 0,$$

d. h. solchen aus den Coefficienten und deren Ableitungen rational gebildeten Ausdrücken, die bei der Transformation

$$z = \varphi(t),\ y = u.\varrho(t)$$

bis auf eine Potenz von $\varphi'(t)$ als Factor ungeändert bleiben. Setzt man

$$m(z) = -p_1' - \tfrac{1}{3}p_1^2 + p_2,\ n(z) = -\tfrac{1}{3}p_1'' + \tfrac{2}{27}p_1^3 - \tfrac{1}{3}p_1 p_2 + p_3,$$

dann sind

$$g = 2n - m' \text{ und } h = 7\left(\frac{g'}{g}\right)^2 - 6\frac{g''}{g} + 9m$$

Invarianten, und zwar ist die erwähnte Potenz für g die dritte, für p die zweite und demnach $h^3 : g^2$, als zur nullten Potenz gehörig, eine „absolute Invariante“. Die logarithmische Ableitung der letzteren wird mit k bezeichnet und vorausgesetzt, dass weder g noch h noch k identisch Null ist. Man findet dann umgekehrt, falls mit der Gleichung (1) ihre transformirte gegeben ist, aus diesen mittelst der Gleichung $h^3 : g^2 = \mathfrak{h}^3 : \mathfrak{g}^2$, worin $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$ die h und g entsprechenden aus den Coefficienten der transformirten gebildeten Ausdrücke bezeichnen, die Transformationsfunction $z = \varphi(t)$; woraus erhellt, dass, wenn die Coefficienten in den beiden in einander transformirten Gleichungen algebraisch sind, auch $\varphi(t)$ algebraisch ist. Sind ferner bei derselben Voraussetzung betreffs der Coefficienten die Integrale der ersten Gleichung algebraisch, so sind es auch die der transformirten, bis auf einen allen gemeinsamen Factor $\varrho(t)$, dessen logarithmische Ableitung, wie sich unmittelbar ergiebt, eine algebraische Function sein muss. Nun lässt sich zeigen, dass, wenn zwischen drei linear unabhängigen Integralen einer Differentialgleichung (1) eine homogene irreductible Relation mit constanten Coefficienten besteht, und für eine zweite Differentialgleichung dritter Ordnung mit u als abhängiger und mit t als unabhängiger Variablen dieselbe Relation zwischen deren Integralen gilt, die zweite Differentialgleichung aus der ersten durch die Substitution $z = \varphi(t)$, $y = u.\varrho(t)$ ableitbar ist. Es sei nunmehr $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 0$ die Relation zwischen den Integralen von (1). Man setze für y_1, y_2 beliebige algebraische Functionen $g_1(t), g_2(t)$ eines Parameters t und bestimme der Relation gemäss $y_3 = g_3(t)$.

Dann genügen $u_1 = g_1(t)$, $u_2 = g_2(t)$, $u_3 = g_3(t)$ einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten, zu der dieselbe Relation gehört wie zur Gleichung (1). Hat nun die Gleichung (1) algebraische Coefficienten, so müssen nach dem eben Bemerkten die Integrale von (1) algebraische Functionen von z sein bis auf einen gemeinsamen Factor, dessen logarithmische Ableitung algebraisch ist. Gehört (1) zur Fuchs'schen Klasse, so sind alle Integrale algebraisch in Uebereinstimmung mit einem Satze des Herrn Fuchs. Den Schluss dieses ersten allgemeinen Teils der Arbeit bildet der Nachweis, dass das Verschwinden der Invariante g die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Relation zweiten Grades $y_2^2 = y_1 y_3$ ist. Zu den Gleichungen mit algebraischen Coefficienten übergehend, deren Integrale u als Functionen von t einer Relation dritten Grades genügen, benutzt der Verfasser den Umstand, dass die Relation, falls sie keine Singularitäten enthält, stets auf die Form

$$f(u_1, u_2, u_3) \equiv u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + 6mu_1 u_2 u_3 = 0$$

gebracht werden kann. Nach einem Satze des Herrn Fuchs muss die Hesse'sche Covariante

$$H(f) \equiv m^2(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - (1 + 2m^3)u_1 u_2 u_3 = \chi(t)$$

sein, wo $\chi(t)$ bei einem beliebigen Umlauf von t sich nur um constante Factoren ändert. Setzt man $u = C\chi(t)^{\frac{1}{3}}y$, so geht die Differentialgleichuug für u in eine für y über, deren drei Fundamentalintegrale der Gleichung

$$(2) \qquad y^9 + 6my^6 + \psi(t)y^3 - 1 = 0$$

genügen, wo ψ eine noch unbestimmte Function von t ist. Durch die Substitution $z = \psi(t)$ erhält man eine Differentialgleichung für y mit der unabhängigen Variablen z und dem algebraischen Integral

$$y^9 + 6my^6 + zy^3 - 1 = 0.$$

Nach dem Erwähnten müssen die Integrale der Gleichung in (u) bis auf den gemeinsamen Factor $\varrho(t) = \chi(t)^{-\frac{1}{3}}$ alle algebraisch sein, ihre Form ist durch (2) festgestellt, $\psi(t)$ ist ebenfalls eine algebraische Function und $\chi(t)$ eine Function, deren logarithmische Ableitung algebraisch ist. Der Differentialgleichung für

y kann man die bemerkenswerte Form geben

$$(3)\qquad D\frac{d^3y}{dz^3}+\frac{3}{2}\frac{dD}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{4}{9}\frac{d^2D}{dz^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{81}\frac{d^3D}{dz^3}y=0.$$

D ist eine ganze Function dritten Grades von z mit constanten, nur von m abhängigen Coefficienten, die keine gleichen linearen Factoren enthält. Die Form (3) bleibt bei der Substitution $z=\alpha z'+\beta$ erhalten, und wenn man noch m unbestimmt lässt, so kann für D jedes beliebige Polynom dritten Grades in z ohne gleiche lineare Factoren genommen werden, und man erhält daher folgendes Resultat: Alle Differentialgleichungen dritter Ordnung mit algebraischen Coefficienten, zwischen deren Integralen eine homogene Relation dritten Grades ohne Singularitäten stattfindet, werden aus der Gleichung (3), worin D ein beliebiges Polynom in z ohne gleiche Factoren bedeutet, durch die Substitution $z=\varphi(t)$, $y=u\,e^{\int r(t)dt}$ erhalten; φ und r bedeuten beliebige algebraische Functionen. — Es handelt sich nunmehr darum, an einer vorgelegten Differentialgleichung zu entscheiden, ob ihre Integrale durch eine Relation dritten Grades ohne singuläre Punkte verbunden sind. Die Kriterien hierfür werden mit Hülfe der Form (3) durch gewisse Bedingungsgleichungen gegeben, in denen nur invariante Ausdrücke der Differentialgleichung auftreten. Sind dieselben erfüllt, dann werden die zugehörige Relation, die Substitutionsfunctionen φ und r, sowie das vollständige Integral dargestellt, wobei sich zeigt, dass, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung rational sind, dasselbe von φ und r gilt. Die Fälle, in welchen die Relation dritten Grades Singularitäten enthält, werden ebenfalls erledigt. Hierbei bedingt der Fall des Doppelpunktes nur leichte Modificationen der allgemeinen Ergebnisse. Dagegen erfordert der Fall des Rückkehrpunktes, der nur eintritt, wenn $k=0$ ist, besondere Erörterungen. Hier gilt nicht mehr der Satz, dass die Integrale der Differentialgleichungen, zu denen Relationen dieser Art gehören, bis auf einen gemeinsamen Factor algebraisch sind. Auch sei noch bemerkt, dass die Fälle, in denen g oder h oder k verschwindet, ganz allgemein erledigt werden. Die

betreffenden Differentialgleichungen lassen sich alle durch eine Transformation der mehrerwähnten Art aus einer Differentialgleichung mit constanten Coefficienten ableiten.

Hr.

L. SCHLESINGER. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen vierter Ordnung, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. Diss. Berlin. 43 S. (1887.)

Die in Rede stehenden linearen Differentialgleichungen vierter Ordnung sind als der Fuchs'schen Klasse angehörend vorausgesetzt und von der Beschaffenheit, dass ihre determinirenden Fundamentalgleichungen lauter rationale Wurzeln haben. Zwischen ihren Lösungen besteht eine homogene Relation m^{ten} Grades

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^m \cdot \Phi(\eta, \zeta, \vartheta) = 0$$
$$(\eta = y_2 : y_1, \ \zeta = y_3 : y_1, \ \vartheta = y_4 : y_1).$$

Durch einen Umlauf der unabhängigen Variablen z um singuläre Punkte, dem bekanntlich gewisse lineare Substitutionen der Integrale y entsprechen, verwandelt sich φ in eine gleichfalls homogene Form φ' vom Grade m, die ebenso wie φ als Function von z verschwindet. Bei der Anwendung aller möglichen Umläufe von z, denen sämtliche Substitutionen der „Gruppe der Differentialgleichung" entsprechen, können bezüglich der daraus hervorgehenden Gesamtheit linear unabhängiger Formen zwei Hauptfälle eintreten. Das durch die gegebene Relation $\varphi = 0$ erwähntermassen bedingte System von Relationen kann nämlich durch eine einzige irreductible Gleichung $f = 0$ oder durch ein simultanes System von höchstens vier homogenen Gleichungen $f_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ dargestellt werden. Der Verfasser behandelt zunächst den letzteren Fall. Die Untersuchung geschieht nach der Methode, welche Herr Fuchs für die linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Integrale einer homogenen Relation Genüge leisten, angewandt hat (Berl. Ber. 1882, Acta Math. I., F. d. M. XIV. 1882. 242).

Mit der gegebenen Differentialgleichung wird eine zweite

zusammengestellt, deren unabhängige Variable z_1 mit z derart verbunden ist, dass die Quotienten der Integrale eines Fundamentalsystems der zweiten Differentialgleichung mit den entsprechenden Quotienten η, ζ, ϑ identisch sind. Aus der algebraischen Natur der Beziehung zwischen z_1 und z folgt dann der algebraische Charakter der Integrale der vorgelegten Differentialgleichung. Setzt man

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{\partial f_\mu}{\partial y_i} \frac{d^2 y_i}{dz^2} = M_\mu \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4),$$

dann ist

$$\Sigma M_1 \frac{dM_2}{dz} \frac{d^2 M_3}{dz^2} \frac{d^3 M_4}{dz^3} = \chi(z)$$

die Wurzel einer rationalen Function von z. In besonderen Fällen sind bereits die Unterdeterminanten dritten oder zweiten Grades oder endlich die M selbst Wurzeln einer rationalen Function von z. Andererseits ist

$$\Sigma y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2 y_3}{dz^2} \frac{d^3 y_4}{dz^3} = \Delta(z)$$

Wurzel einer rationalen Function von z. Bedeutet nun $\psi(z)$ den Quotienten gewisser ganzen Potenzen von $\chi(z)$ und $\Delta(z)$, also ebenfalls eine Wurzel einer rationalen Function von z, dann sind $y_x \psi^{\frac{1}{i}} = v_x (x = 1, 2, 3, 4)$, wo i eine positive ganze Zahl ist, Functionen, die für $z = z_1$ in sich selbst, multiplicirt mit einer Einheitswurzel, übergehen. Die Vergleichung der Coefficienten der Differentialgleichungen für v, in denen einmal z, das andere Mal z_1 als unabhängige Variable auftritt, ergiebt zwischen z und z_1 eine algebraische Beziehung und infolge derselben das Resultat, dass die vorgelegte Differentialgleichung algebraisch integrirbar ist. Die erwähnte Gleichung zwischen z und z_1 wird nur illusorisch in dem Falle, dass zwischen den Integralen die Beziehungen $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$, $y_3^2 - y_1 y_4 = 0$ bestehen. Alsdann ist die gegebene Differentialgleichung in eine solche transformirbar, welche durch die Kuben der Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung befriedigt wird. — Es folgt nunmehr die Behandlung des andern Hauptfalls, wo das System derjenigen

zwischen den Integralen stattfindenden Beziehungen, welche durch die Ausgangsrelation bedingt werden, durch eine einzige Gleichung dargestellt wird, also die linke Seite der irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ durch jeden Umlauf von z in sich selbst, mit einer Constanten multiplicirt, übergeht. Hier wird, gleichfalls nach dem Vorgange des Herrn Fuchs, die Covariante $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k}\right| (i, k = 1, 2, 3, 4) = H$ herangezogen und zunächst eine Reihe von Ausnahmefällen erwogen: 1) H verschwindet identisch. Dieser Fall tritt nur dann ein, wenn f auf eine ternäre Form reducirbar ist, also eine Gleichung von der Form $f(y_1, y_2, y_3) = 0$ besteht. Alsdann sind $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial y_3}$ linear unabhängige Integrale einer Differentialgleichung dritter Ordnung Fuchs'scher Klasse, zwischen denen eine homogene Relation besteht. Zufolge eines Satzes des Herrn Fuchs sind demnach dieselben und folglich auch y_1, y_2, y_3 algebraische Functionen von z, falls nicht f sich auf die Form $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$ bringen lässt. Besteht jedoch diese Relation, dann genügen der vorgelegten Differentialgleichung die Quadrate der Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse. 2) H verschwindet als Function von z; dann sind

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{d^2 y_k}{dz^2} = M(z) \text{ und } \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{d^2 y_k}{dz^2} = \varphi(z)$$

Wurzeln rationaler Functionen von z, die nicht gleichzeitig verschwinden können. Mit Hülfe einer dieser erweist man dann wie im ersten Hauptfalle die algebraische Integrirbarkeit der vorgelegten Differentialgleichung. 3) H enthält f als Factor, was nur eintreten kann, wenn $m = 2, 4, 8$ ist. Für $m = 2$ ist die Differentialgleichung in diejenige transformirbar, welcher die Producte der Integrale zweier linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen, deren Coefficienten Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit in z rationalen Coefficienten genügen. Für $m = 4$ genügen $y_1 y_3 - y_2^2$, $y_2 y_3 - y_1 y_4$, $y_4 y_2 - y_3^2$ einer Differentialgleichung dritter Ordnung, welche durch die Quadrate der Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ord-

nung Fuchs'scher Klasse befriedigt wird. Der Fall $m = 8$ wird nicht discutirt. Tritt keiner der hervorgehobenen Ausnahmefälle ein, dann ist es von wesentlicher Bedeutung, ob noch eine zweite, von der gegebenen unabhängige Relation zwischen den Integralen existirt oder nicht. Im ersten Falle ergiebt sich, den Fall quadratischer Relationen ausgeschlossen, die algebraische Integrirbarkeit der Differentialgleichung. Im zweiten Falle, dessen Möglichkeit noch in Frage steht, ist jedenfalls die algebraische Integrirbarkeit ausgeschlossen. Aus der Annahme dieses problematischen Falles wird eine Reihe von Schlüssen gezogen, von denen wir den folgenden als bemerkenswert hervorheben. Setzt man

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^m F(\eta, \zeta, \vartheta) = 0,$$
$$H(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^i \Pi(\eta, \zeta, \vartheta) = \chi(s),$$

dann besteht die Gleichung

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta}\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\Pi(\eta, \zeta, \vartheta)}{\frac{\partial F}{\partial \vartheta}} d\eta\, d\zeta = \int_{t_0}^{t} \varphi(t)dt,$$

wo ϑ vermöge der Gleichung $F = 0$ als algebraische Function von η und ζ zu betrachten ist und $\varphi(t)$ Wurzel einer rationalen Function von t ist. Zwischen den Grenzen η, ζ, t besteht die Gleichung

$$t^\varrho + A_1(\eta,\zeta)t^{\varrho-1} + \cdots + A_\varrho(\eta,\zeta) = 0,$$

wo die $A_1, \ldots, A_\varrho$ eindeutige Functionen von η, ζ sind. Zum Schluss bemerken wir mit dem Verfasser, dass der Fall quadratischer Relationen zwischen den Integralen einer Differentialgleichung vierter Ordnung bereits von Herrn Goursat untersucht worden ist. (S. M. F. Bull. XI, F. d. M. XV. 1883. 264.)

Hr.

L. Pochhammer. Ueber drei lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung. J. für Math. CIV. 116-151.

Das in der Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten“ (J. für Math. CII. 76-159, F. d. M. XIX.

1887. 326) angegebene Verfahren, durch Einführung eines bestimmten Integrals gewisse lineare Differentialgleichungen auf solche von niederer Ordnung zurückzuführen, wird in der vorliegenden Arbeit auf drei lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung angewandt. Dieselben haben das Gemeinsame, dass sie sich durch die Substitution

$$(1) \qquad y = \int_g^h (w-x)^a \, . \, \mathfrak{W} \, . \, dw$$

auf eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^3(f_4(w)\,.\,\mathfrak{W})}{dw^3} - \frac{d^2(f_3(w)\,.\,\mathfrak{W})}{dw^2} + \frac{d(f_2(w)\cdot\mathfrak{W})}{dw} - f_1(w)\,.\,\mathfrak{W} = 0$$

zurückführen lassen, wo $f_\nu(w)$ eine ganze Function ν^{ten} Grades bedeutet.

Die erste dieser Differentialgleichungen ist speciell so beschaffen, dass nach Anwendung der Substitution

$$(2) \qquad \mathfrak{W} = (w-1)^\beta \, . \, W$$

die Differentialgleichung für W in die der hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten $0, 1$ übergeht; W wird also nach der angeführten Abhandlung durch bestimmte Doppelintegrale der dort behandelten Art darstellbar sein. Die Grenzen g, h sind zwei der Werte $x, 0, 1, \infty$; für die Wahl dieser Grössen, wenn die Fundamentalintegrale für die Umgebung eines singulären Punktes aufgestellt werden sollen, gilt eine ähnliche Regel wie in der genannten Arbeit.

Die zweite Differentialgleichung hat die Eigenschaft, dass durch die Substitution

$$(3) \qquad \mathfrak{W} = w^\gamma \, . \, W$$

die Differentialgleichung für W in die der hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung mit drei singulären Punkten $0, 1, k$ übergeht, welche nach der Abhandlung des Verfassers in LXXI des Journ. für Math. durch einfache bestimmte Integrale gelöst wird; hier sind g, h zwei von den Grössen x, 0, 1, k, ∞.

In der dritten Differentialgleichung endlich setzt man

$$(4) \qquad \mathfrak{W} = (w-1)^\beta \, . \, w^\gamma \, . \, W;$$

die Differentialgleichung für W geht dann über in die der hypergeometrischen Reihe zweiter Ordnung mit zwei singulären Punkten

und wird durch ein einfaches bestimmtes Integral gelöst. Diese dritte Gleichung ist von Herrn Thomae behandelt in der Schrift „Ueber eine Function, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung vierter Ordnung genügt", doch wird daselbst die Function durch ihre Unstetigkeiten und Verzweigungen definirt. P. G.

E. Goursat. Sur les systèmes d'équations linéaires qui sont identiques à leur adjoint. C. R. CVI. 187-190.

Das System

$$\frac{dy_i}{dx} = A_{i1}y_1 + \cdots + A_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

worin die Coefficienten A_{ik} Functionen von x sind, die den Bedingungen

$$A_{ik} + A_{ki} = 0, \quad A_{ii} = 0$$

genügen, ist für den Fall $n = 3$, der sich in mehreren Problemen der Mechanik und Geometrie darbietet, von Herrn Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces Chap. II) eingehend untersucht worden. Die in diesem Fall gefundenen Gesetze lassen sich für ein beliebiges n in folgender Gestalt ausdehnen: 1) Sind

$$y_1 = \alpha_1, \; y_2 = \alpha_2, \ldots, \; y_n = \alpha_n,$$
$$y_1 = \beta_1, \; y_2 = \beta_2, \ldots, \; y_n = \beta_n$$

zwei beliebige Lösungen des Systems, so besteht die Relation

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n = \text{const.}$$

2) Kennt man eine Lösung

$$y_1 = \alpha_1, \; y_2 = \alpha_2, \ldots, \; y_n = \alpha_n,$$

so dass die Summe $\Sigma\alpha_i^2$ nicht Null ist, so kann man immer das vorgelegte System auf ein solches von $n-1$ Gleichungen derselben Beschaffenheit reduciren. In dem besonderen Falle $n=4$ wird das System durch die Kenntnis einer solchen Lösung auf die Integration einer Riccati'schen Gleichung zurückgeführt. Es wird aber noch weiter gezeigt, dass für $n = 4$ die Integration des Systems sich stets auf die Integration zweier Riccati'schen Gleichungen zurückführen lässt. Hr.

Ch. Méray. Sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Darboux Bull. (2) XII. 196-204.

Cauchy hat bekanntlich zur Auflösung des Systems von k Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten

$$\frac{du}{dx}+a_1u+b_1v+\cdots+h_1t=0,$$
$$\frac{dv}{dx}+a_2u+b_2v+\cdots+h_2t=0,$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\frac{dt}{dx}+a_ku+b_kv+\cdots+h_kt=0$$

ein die einfachen und mehrfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung umfassendes System von Formeln gegeben, worin gleichzeitig $u, v, w, \dots, t$ für $x=x_0$ beliebig vorgeschriebene Werte $u_0, v_0, \dots, t_0$ annehmen. Der Verfasser leitet diese Formeln auf directem Wege ab. Von der Bemerkung ausgehend, dass die Coefficienten der in Reihen dargestellten Integrale

$$u=u_0+u_1z+\cdots+\frac{u_mz^m}{m!}+\text{etc.},$$
$$v=v_0+v_1z+\cdots+\frac{v_mz^m}{m!}+\text{etc.},\dots,\ t=t_0+t_1z+\cdots+\frac{t_mz^m}{m!}+\text{etc.}$$
$$(x-x_0=z \text{ gesetzt})$$

den recurrenten Gleichungen

$$u_{m+1}+a_1u_m+\cdots+h_1t_m=0,\ v_{m+1}+a_2u_m+\cdots+h_2t_m=0,$$
$$\dots,\ t_{m+1}+a_ku_m+b_kv_m+\cdots+h_kt_m=0$$

genügen, zeigt er zunächst, dass die Reihen

$$U(z)=u_0+u_1z+u_2z^2+\cdots+u_mz^m+\text{etc.},\dots,$$
$$T(z)=t_0+t_1z+t_2z^2+\cdots+t_mz^m+\text{etc.}$$

durch rationale Brüche darstellbar sind, die zum gemeinsamen Nenner ein Polynom $F(z)$ k^{ten} Grades haben, während die Zähler ganze Polynome $(k-1)^{\text{ten}}$ Grades sind, also z. B. $U(z)=\Omega(z):F(z)$, wo

$$F(z)=\begin{vmatrix} 1+a_1z, & b_1z, & \dots, & h_1z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_kz, & b_kz, & \dots, & 1+h_kz \end{vmatrix},$$

$$\left(z^kF\left(\frac{1}{z}\right)=0 \text{ ist die charakteristische Gleichung}\right)$$

und

$$\Omega(z) = \frac{u_0 A_1(z) + \cdots + t_0 A_k(z)}{F(z)};$$

$A_1, \ldots, A_k$ sind die Coefficienten der Elemente der ersten Verticalreihe in der Determinante. Jede Reihe

$$u = u_0 + u_1 z + \cdots + \frac{u_m z^m}{m!} + \text{etc.},$$

die aus der Entwickelung einer rationalen Function $\Omega(z):F(z)$ hervorgeht, indem darin u_m durch $u_m : m!$ ersetzt wird, lässt sich aber, wie der Verfasser allgemein zeigt, in der Form summiren

$$\underset{s}{E} \frac{s^{k-1}\,\Omega\left(\frac{1}{s}\right)}{s^k F\left(\frac{1}{s}\right)} e^{sz},$$

worin E die Summe der Residuen für alle Wurzeln von

$$s^k F\left(\frac{1}{s}\right) = 0$$

bedeutet. Hieraus ergeben sich die Cauchy'schen Formeln.

Hr.

W. W. Johnson. On Monge's solution of the non-integrable equation between three variables. Annals of Math. IV. 156-160.

Wenn für die Differentialgleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt sind, müssen bekanntlich zur Darstellung der vollständigen Lösung zwei Gleichungen benutzt werden. In der vorliegenden Notiz setzt der Verfasser die bekannte Monge'sche Behandlung dieses Problems auseinander und knüpft einige einfache Bemerkungen daran, welche auch an einem Beispiele aus Herrn Forsyth's Lehrbuch erläutert werden.

P. G.

L. Sauvage. Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles. II. Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. 7-22.

Der in dem ersten Teile der Arbeit (Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 391, s. F. d. M. XVIII. 1886. 283) aufgestellte Satz bezüglich der Existenz der regulären Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes für eine gewisse Form des Systems linearer homogener Differentialgleichungen wird dadurch ergänzt, dass auch seine Umkehrung bewiesen wird. Der so vervollständigte Satz lautet: Damit das System

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit eindeutigen Coefficienten in der Umgebung eines Punktes x_0 alle seine Integrale in der Umgebung des nämlichen Punktes regulär habe, ist notwendig und hinreichend, dass es sich auf die Form

$$(x-x_0)\frac{dv_i}{dx} = b_{i1}v_1 + \cdots + b_{in}v_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zurückführen lasse durch eine Substitution von der Form

$$y_i = x^{\varrho_i}v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die Exponenten ϱ_i ganze Zahlen sind, so gewählt, dass die Coefficienten in der Umgebung des Punktes x_0 holomorph sind. An diesen Satz schliessen sich einige Bemerkungen betreffs der Differentialgleichung, die durch Elimination von $n-1$ der abhängigen Variabeln $y_1, \ldots, y_n$ in dem System für die n^{te} hervorgeht. Hr.

A. J. Stodockiewicz. Ueber die Integration eines Systems von Differentialgleichungen mit vollständigen Differentialen. Prace mat.-fiz. I. 78-80. (Polnisch.)

Integration des Systems:

$$\begin{aligned}
dx_3 &= (x_4 + x_1)dx_1 + (x_5 + x_2)dx_2,\\
dx_4 &= (x_5 + x_2)dx_1 + (x_6 + x_1)dx_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
dx_{2i+1} &= (x_{2i+2} + x_1)dx_1 + (x_{2i+3} + x_2)dx_2,\\
dx_{2i+2} &= (x_{2i+3} + x_2)dx_1 + (x_{2i+4} + x_1)dx_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
dx_{2n} &= (x_3 + x_2)dx_1 + (x_4 + x_1)dx_2.
\end{aligned}$$

Dn.

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

E. Picard. Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles. C. R. CVII. 476-478.

Es werden Eigenschaften derjenigen linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne Beweis mitgeteilt, welche die Bedingung dafür ist, dass die erste Variation des Doppelintegrals

$$\int\int f\left(V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

verschwinde, wo V die gesuchte Function der unabhängigen Variabeln x,y und f eine quadratische Form ihrer Argumente bedeutet, deren Coefficienten Functionen von x,y sind. Ist R ein Flächenstück mit einfacher Begrenzungslinie von der Art, dass die quadratische Form $f\left(V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right)$ für eine beliebige Lage des Punktes (x,y) im Innern desselben definit ist, so giebt es eine einzige Function, welche in einem innerhalb R liegenden Flächenstück eindeutig und stetig ist und auf der Begrenzungscurve desselben eine gegebene Reihe von Werten annimmt.

T.

E. Picard. Sur une proposition générale concernant les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. CVII. 939-941.

Der Verfasser hat die Untersuchungen, über welche im vorhergehenden Referat berichtet worden ist, auf beliebige lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

deren Coefficienten stetige Functionen von x, y sind, ausgedehnt. Ist (x_0, y_0) ein Wertsystem, für welches $b^2 - ac < 0$ ist, und zieht

man in einem gewissen, diesen Punkt enthaltenden Bereiche eine geschlossene Curve C, so giebt es ein und nur ein Integral der Differentialgleichung, welches eindeutig und stetig ist in dem von C begrenzten Gebiete und in den Punkten dieser Curve gegebene Werte besitzt. Der Beweis hierfür wird kurz angedeutet.

T.

E. Picard. Sur la transformation de Laplace et les équations linéaires aux dérivées partielles. C. R. CVII. 594-597.

Eine vorläufige Mitteilung über die Ausdehnung der Laplace'schen Transformation für die linearen Gleichungen mit einer einzigen Veränderlichen auf die linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln, deren Coefficienten lineare Functionen derselben sind. Eine ausführliche Arbeit soll folgen. T.

E. Picard. Remarques sur les groupes de transformations relatifs à certaines équations différentielles. C. R. CVI. 118-120.

Allgemeine Bemerkungen über den Zusammenhang des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung $y'' = R(y,y')$, in welcher die unabhängige Variable selbst nicht auftritt, mit dem System von partiellen Differentialgleichungen

$$y'\frac{\partial X}{\partial y} + R\frac{\partial X}{\partial y'} = Y,$$

$$y'\frac{\partial Y}{\partial y} + R\frac{\partial Y}{\partial y'} = X\frac{\partial R}{\partial y} + Y\frac{\partial R}{\partial y'}.$$

T.

R. Marcolongo. Sulla variazione di un integrale definito e sulla teoria delle equazioni alle derivate del primo ordine. Napoli Rend. (2) II. 500-508.

Die bekannte Formel für die Variation der Hamilton'schen charakteristischen Function wird auf einfache Weise hergeleitet,

indem für die Variation des einfachen Integrals

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V(x,y,y')dx$$

mit veränderlichen Grenzen der folgende Ausdruck zu Grunde gelegt wird:

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y'\right).dx + \Big[V\delta x\Big]_{x_0}^{x_1}.$$

Hieraus wird dann weiter der Jacobi'sche Satz, dass die partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die charakteristische Function ein vollständiges Integral besitzt, welches sich vermittelst eines gewissen bestimmten Integrals berechnen lässt, nachdem man die kanonischen Bewegungsgleichungen integrirt hat, abgeleitet mit der von Herrn Mayer (Math. Ann. III. 435-452; F. d. M. III. 1871. 171) gegebenen Modification. Zu letzterem Zwecke geht der Verfasser in der natürlichen Weise vor, dass er zu dem ursprünglichen bestimmten Integral zunächst eine willkürliche Function der Integrationsconstante hinzufügt und sich die Aufgabe stellt, dieselbe so zu bestimmen, dass auch diese Summe eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung darstelle; es ergiebt sich dann genau dieselbe Form, welche Herr Mayer aufgestellt und a posteriori bewiesen hat. — Im Anschluss an ein Beispiel werden dann noch die Aufgaben gelöst, aus einer von zwei gegebenen vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die andere, und aus einer allgemeinen Lösung eine gegebene vollständige Lösung herzuleiten. T.

G. Vivanti. Sulle equazioni a derivate parziali del 1° ordine. Palermo Rend. II. 53-58.

Es wird der von Herrn Morera im Genova G. 1887. 81-85 für eine Function von zwei unabhängigen Variabeln gegebene Satz, über den man F. d. M. XIX. 1887. 347f. vergleiche, dahin verallgemeinert: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = h \qquad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$

eine vollständige Lösung von der Form

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)$$

zulasse, ist die, dass H einer Functionalgleichung von der Form

$$\varphi\,[\varphi_1(H, x_1, p_1),\ \varphi_2(H, x_2, p_2),\ \ldots,\ \varphi_n(H, x_n, p_n)] = 0$$

genüge. Dieser Satz besteht nicht mehr, wenn die unbekannte Function z selbst in der Differentialgleichung auftritt, indem dann die Existenz einer vollständigen Lösung von der genannten Form zwar eine Functionalgleichung von bestimmter Gestalt für H nach sich zieht, aber nicht umgekehrt. T.

J. Horn. Ueber die singulären Stellen der Integrale einer linearen partiellen Differentialgleichung. Math. Ann. XXXIII. 310-314.

Der Satz, dass die singulären Stellen der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind, abgesehen von dem unendlich fernen Punkte, nur in den Nullstellen des höchsten Coefficienten liegen können, wird auf lineare partielle Differentialgleichungen ausgedehnt. T.

J. Möller. Zur Theorie der singulären Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabeln. Stockh. Öfv. 463-473.

Es sei gegeben die partielle Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabeln:

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Wenn man mittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

p und q eliminirt, erhält man eine Relation

$$F(x, y, z) = 0,$$

die die singuläre Lösung der Differentialgleichung enthält, wenn eine solche existirt. Der Verfasser giebt nun eine geometrische

Interpretation der Fläche

$$F(x, y, z) = 0.$$

Derselbe Gegenstand ist jedoch schon früher eingehend von Herrn Darboux (Darb. Bull. (1) IV. 158, F. d. M. V. 1873. 192) behandelt. K.

W. P. Ermakoff. Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Ein Thema für junge Mathematiker. Kiew. Nachr. 1888. 2. (Russisch.)

Enthält eine Skizze der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen ohne Beweise der Theoreme.

Wi.

Ch. Méray. Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui sont dépourvus d'intégrales, contrairement à toute prévision. C. R. CVI. 648-651.

G. Darboux. Remarque sur la communication précédente. C. R. CVI. 651-652.

Um zu zeigen, dass ein System von Differentialgleichungen nicht immer Integrale besitzt, wenn es auch möglich ist, eine Taylor'sche Reihenentwickelung für dieselben zu construiren, behandelt der Verfasser als einfachstes Beispiel die Aufgabe, diejenigen Functionen u, v von x, y zu finden, welche dem System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v + H\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = u + H\frac{\partial v}{\partial x},$$

wo H eine reelle positive Constante bedeutet, und den Anfangsbedingungen

$$u = y \text{ für } x = 0, \; v = x \text{ für } y = 0$$

genügen. Während für $H = 1$ und um so mehr für $H < 1$ derartige Functionen existiren, wird bewiesen, dass dies durchaus nicht mehr der Fall ist für $H > 1$, indem ihre Entwickelungen in Potenzreihen von x und y selbst in der nächsten Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ nicht convergiren.

Dem Herrn Verfasser scheint die Arbeit von Frau von Kowalevsky (J. für Math. LXXX) entgangen zu sein; Herr Darboux macht darauf aufmerksam, dass sich in dieser ebenfalls ein hierher gehöriges Beispiel (vergl. F. d. M. VII. 1875. 204 unten) findet, und bemerkt ausserdem, dass er in seinen Vorlesungen unter diesem Gesichtspunkte die lineare Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

wo a, b, c Functionen von x, y sind, behandelt hat. T.

A. Tonelli. Sopra una certa equazione differenziale a derivate parziali del 2° ordine. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_2. 384-388.

A. Tonelli. Sopra una certa equazione a derivate parziali del 3° ordine. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_2. 458-461.

Die zur Integration der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s} + P\sum_1^n \frac{\partial z}{\partial x_r} + Nz = M,$$

wo M, N, P gegebene Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ allein sind, gegebene Methode, beruht auf der Bemerkung, dass sich dieselbe unmittelbar auf Quadraturen zurückführen lässt, wenn

$$\alpha \equiv N - \sum_1^n \frac{\partial P}{\partial x_r} = 0$$

ist. Hiervon wird in zweierlei Weise Gebrauch gemacht. Zunächst ergiebt, wenn die Bedingung $\alpha = 0$ nicht erfüllt ist, die Substitution

$$z = \frac{1}{\alpha}\Big(M - \sum_1^n \frac{\partial Z}{\partial x_i}\Big)$$

eine Gleichung für Z, die der ursprünglichen Gleichung (1) für z ganz analog gebildet ist, und deren Integration daher auf Quadraturen zurückgeführt werden kann, wenn eine gewisse Bedingung erfüllt sein wird; indem man dieses Verfahren noch weiter fortsetzt, erhält man so unendlich viele Fälle, in denen die Gleichung (1) durch Quadraturen integrabel ist. Ferner

wird aber, wieder unter Benutzung der obigen Bemerkung, eine ganz allgemeine Integrationsmethode der Gleichung (1) gewonnen, indem $z = \eta . \zeta$ gesetzt wird; dann geht die Gleichung (1) in eine Gleichung für ζ über, welche genau dieselbe Gestalt besitzt, wie die Gleichung (1) selbst, und daher durch Quadraturen integrabel wird, vorausgesetzt, dass die zunächst willkürliche Function η einer gewissen Differentialgleichung genügt; setzt man $\sum_1^n \frac{\partial \log \eta}{\partial x_r} = u$, so reducirt sich dieselbe auf die partielle Differentialgleichung erster Ordnung $\alpha + Pu + u^2 = \sum_1^n \frac{\partial u}{\partial u_r}$. Um also die Gleichung (1) durch Quadraturen zu integriren, bedarf es schliesslich nur der Kenntnis eines particulären Integrals dieser partiellen Differentialgleichung oder, was auf dasselbe herauskommt, eines Integrals einer gewöhnlichen Differentialgleichung von der Form

$$\frac{du}{dx_1} = \alpha_1 + P_1 u + u^2.$$

In der zweiten Note behandelt der Verfasser eine der Gleichung (1) analoge Gleichung dritter Ordnung und zeigt, wie und wann ihre Integration auf die einer Gleichung von der Form (1) zurückgeführt werden kann. T.

A. Russell. Solution of question 8853. Ed. Times. XLIX. 119.

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

hat zur Lösung:

$$v = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f\left(t - \frac{x^2}{4a^2n^2}, t - \frac{y^2}{4b^2p^2}, t - \frac{z^2}{4c^2q^2}\right) e^{-(n^2+p^2+q^2)} dn dp dq.$$

Lp.

A. Russell, J. W. Sharpe. Solution of question 9338. Ed. Times XLIX 35.

Die partielle Differentialgleichung

$$x^4\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+6x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+7x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2a^3\frac{\partial z}{\partial y}+a^4 z$$

hat zur Lösung

$$z=e^{ay}\int_0^\infty f(y\pm\tfrac{1}{2}\theta^2)e^{\pm a(\log x)^2:2\theta^2}d\theta.$$

Lp.

A. Schwartz. Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diss. Tübingen. Leipzig. Fues Verl. 36 S. 8°.

L. Bianchi. Sulla equazione a derivate parziali del Cayley nella teoria delle superficie. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 442-445.

Ist Edx^2+Gdy^2 das Quadrat des auf die Krümmungslinien einer Fläche S bezogenen Linienelementes derselben, so ist bekanntlich die entsprechende Cayley'sche partielle Differentialgleichung

$$\text{(a)}\qquad s=\frac{\partial \lg\sqrt{E}}{\partial y}p+\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x}q.$$

Die Integrale $z=z(x,y)$ dieser Gleichung besitzen die Eigenschaft, dass, wenn man auf jeder Normale zu S eine Länge εz abschneidet, wo ε eine unendlich kleine Constante ist, der Ort der so erhaltenen Punkte eine Fläche S' ist, welche mit S einem Flächensysteme eines orthogonalen Tripels angehört. Es fragt sich nun, wann die Cayley'sche Gleichung bei der Biegung der Fläche S invariante Lösungen besitzt; mit anderen Worten, sind x', y' die Krümmungslinien der Fläche nach geschehener Biegung, und ist:

$$ds^2=Edx^2+Gdy^2=E'dx'^2+G'dy'^2,$$

so soll man angeben, wann die Function $z(x,y)$, durch x', y' ausgedrückt, die Gleichung:

$$s'=\frac{\partial \lg\sqrt{E'}}{\partial y'}p'+\frac{\partial \lg\sqrt{G'}}{\partial x'}q'$$

befriedigt. Eine Lösung von dieser Beschaffenheit muss der Gleichung:

$$\text{(b)}\qquad G\left[r-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}p-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}q\right]=E\left[t-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}p-\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}q\right]$$

genügen, wo für eine allgemeine quadratische Differentialform $\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k$:

$$\begin{Bmatrix}ik\\s\end{Bmatrix}=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{is}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{ks}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_s}\right]$$

ist; genügt umgekehrt eine Function $z(x, y)$ den Gleichungen (a) und (b), so genügt sie denselben Gleichungen, welches auch das orthogonale Coordinatensystem x, y sei. Hieraus ergiebt sich, durch Einführung eines speciellen orthogonalen Coordinatensystemes, der folgende Satz: Die einzigen Flächen, deren zugehörige Cayley'sche Gleichung bei der Biegung der Fläche invariante Lösungen besitzt, sind die auf Umdrehungsflächen abwickelbaren Flächen. Vi.

L. Bianchi. Sopra una classe di trasformazioni in sè medesima della equazione a derivate parziali

$$\text{(I)}\quad z^2\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}+z\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{1+p^2+q^2}=c$$

Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 445-452.

Diese Note knüpft an die von Bäcklund in Math. Ann. XVII und XIX herausgegebenen Untersuchungen über die Transformation der Differentialgleichungen an. Sind $z(x, y)$, $z'(x', y')$ zwei Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, y bezw. x', y', welche durch die vier Relationen:

$$\text{(a)}\quad F_1(x, y, z, x', y', z', p, q, p', q')\equiv F_1=0,\ F_2=0,\ F_3=0,\ F_4=0$$

verbunden sind, so hat Bäcklund die Bedingung für die Verträglichkeit dieser Gleichungen unter der folgenden Form aufgestellt:

$$\text{(b)}\quad \{34\}[F_1F_2]+\{42\}[F_1F_3]+\{23\}[F_1F_4]+\{12\}[F_3F_4]+\{13\}[F_4F_2]+\{14\}[F_2F_3]=0,$$

wo:

$$\{ik\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x}+p\frac{\partial F_i}{\partial z}+r\frac{\partial F_i}{\partial p}+s\frac{\partial F_i}{\partial q}, & \frac{\partial F_i}{\partial y}+q\frac{\partial F_i}{\partial z}+s\frac{\partial F_i}{\partial p}+t\frac{\partial F_i}{\partial q} \\ \frac{\partial F_k}{\partial x}+p\frac{\partial F_k}{\partial z}+r\frac{\partial F_k}{\partial p}+s\frac{\partial F_k}{\partial q}, & \frac{\partial F_k}{\partial y}+q\frac{\partial F_k}{\partial z}+s\frac{\partial F_k}{\partial p}+t\frac{\partial F_k}{\partial q} \end{vmatrix}$$

$$[F_i F_k] = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x'} + p'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p'} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y'} + q'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_k}{\partial q'}$$
$$- \left(\frac{\partial F_k}{\partial x'} + p'\frac{\partial F_k}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_i}{\partial p'} - \left(\frac{\partial F_k}{\partial y'} + q'\frac{\partial F_k}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_i}{\partial q'}.$$

In den von Herrn Bianchi betrachteten Fällen sind die Gleichungen (a) von solcher Beschaffenheit, dass die linke Seite von (b) einen von x', y', z', p', q' unabhängigen Factor $P(x, y, z, p, q, r, s, t)$ enthält, ferner sind die (a) in Bezug auf x, y, z, p, q; x', y', z', p', q' symmetrisch. Dann besteht die Bedingung für die Verträglichkeit der Gleichungen (a) darin, dass $z(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung von der zweiten Ordnung:

$$\text{(c)} \qquad P = 0$$

genügt; und es leuchtet ein, dass, wegen der Symmetrie der Gleichungen (a), $z'(x', y')$ der Gleichung $P(x', y', z', p', q', r', s', t') = 0$ genügen muss. Die Gleichungen (a) stellen also eine Transformation der Differentialgleichung (c) in sich selbst dar; und man kann vermittelst dieser Gleichungen aus einer particulären Lösung der Gleichung (c) unendlich viele andere durch blosse Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen ableiten.

Von den zwei in dieser Note behandelten Transformationen wollen wir nur die zweite besprechen, da sie die erste als besonderen Fall $\left(\text{für } \sigma = \frac{\pi}{2}\right)$ einschliesst. Die Gleichungen (a) sind folgende, wo k, σ constante Grössen darstellen:

$$\text{(a')} \quad \begin{cases} F_1 \equiv p(x'-x) + q(y'-y) + z + kz' = 0, \\ F_2 \equiv p'(x'-x) + q'(y'-y) - kz - z' = 0, \\ F_3 \equiv pp' + qq' - k - \cos\sigma\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{1+p'^2+q'^2} = 0, \\ F_4 \equiv (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + z^2 + z'^2 + 2kzz' = 0. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$1-k^2=h,\ \sqrt{1+p^2+q^2}=R,\ \sqrt{1+p'^2+q'^2}=R',\ \cos\sigma=c,\ \frac{cR'}{R}=\theta,$$

$$x'-x=\xi,\ y'-y=\eta,\ z+kz'=\zeta,\ 2(p'-\theta p)\eta-2(q'-\theta q)\xi=U,$$

so findet man:

$$[F_1F_2]=-hz,\ [F_1F_3]=p^2+q^2+k^2-c^2R^2,\ [F_1F_4]=[F_2F_3]=0,$$
$$[F_4F_2]=-2hz^2,\ [F_3F_4]=2hz,$$

$$\{34\}=2rp'(q\zeta-\eta)+2s\{p'\xi-q'\eta+(qq'-pp')\zeta\}-2tq'(p\zeta-\xi)$$
$$+2\theta\{rp(\eta-q\zeta)+s[q\eta-p\xi+(p^2-q^2)\zeta]-tq(\xi-p\zeta)\}.$$

$$\{42\}=2\{(q'+kq)\xi-(p'+kp)\eta+(p'q-pq')\zeta\},$$

$$\{31\}=\tfrac{1}{2}U(rt-s^2),$$

$$\{12\}=-r\xi(q'+kq)+s[\xi(p'+kp)-\eta(q'+kq)]+t\eta(p'+kp);$$

und die Gleichung (b) erhält die Form:

$$hz^2U(rt-s^2)+h(1+q^2)zUr-2hpqzUs$$
$$+h(1+p^2)zUt-R^2U(p^2+q^2+k^2-c^2R^2)=0.$$

Dividirt man mit hUR^4, so ergiebt sich als Gleichung (c) die im Titel angeführte Gleichung, wo an der rechten Seite die Constante $\frac{\sin^2\sigma}{1-k^2}$ steht. Die Formeln (a') bilden also eine Transformation dieser Gleichung in sich selbst.

Die geometrische Interpretation ist folgende (vgl. die Abhandlungen des Verfassers, über welche in den Jahrgängen 1885, 1886, 1887 referirt wurde). Ist das Quadrat des Linienelementes eines Lobatschewsky'schen Raumes von constantem Krümmungsmasse $K=-\frac{1}{a^2}$ durch den Ausdruck $\frac{a^2}{z^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$ dargestellt, so giebt die linke Seite der Gleichung (I), mit $\frac{1}{a^2}$ multiplicirt, die „relative Krümmung" einer in jenem Raume liegenden pseudosphärischen Fläche $z=z(x,y)$ an; und die Gleichungen (a') stellen eine Bäcklund'sche Transformation dar, (welche für $\sigma=\frac{\pi}{2}$ in eine complementare Transformation übergeht). Das erhaltene Resultat spricht also die aus früheren Un-

tersuchungen des Verfassers bekannte Thatsache aus, dass durch die Anwendung dieser Transformation auf eine pseudosphärische Fläche eine Fläche von derselben Beschaffenheit und von derselben Krümmung erzeugt wird.

Am Ende seiner Note spricht der Verfasser folgende Sätze aus:

Ist eine Integralfläche der Gleichung (I) bekannt, so können ihre Krümmungslinien durch blosse Quadraturen bestimmt werden.

Die Integration der Gleichung (I) (deren rechte Seite durch C bezeichnet werden möge) reducirt sich, von der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen abgesehen, auf die Integration der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\sin\theta\cos\theta \text{ für } C<0,$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\text{sh}\,\theta\,\text{csh}\,\theta \text{ für } 0<C<1,$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=-\text{sh}\,\theta\,\text{csh} \text{ für } 1<C.$$

Vi.

R. Fujisawa. On the solution of a certain class of partial differential equations by the so-called method of integrating factors. Tokio. Math. Ges. III. 234-244. E.

S. Lie. Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie. Leipz. Ber. 14-21.

Unter den Sätzen, welche in diesen Beiträgen meistens ohne Andeutung der Beweise zusammengestellt sind, mögen die folgenden erwähnt werden:

„Hat man r^2 Constanten c_{iks}, welche die Relationen:

$$c_{iks}+c_{kis}=0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{r}(c_{ik\nu}c_{\nu js}+c_{kj\nu}c_{\nu is}+c_{ji\nu}c_{\nu ks})=0$$

$$(i,\ k,\ j,\ s=1,\ldots,r)$$

befriedigen, so giebt es in r Veränderlichen stets r unabhängige

infinitesimale Transformationen $X_1 f, \ldots, X_r f$, welche in den Beziehungen:

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1, \ldots, r)$$

stehen und also eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} erzeugen."

Der Beweis folgt sehr leicht aus einem ebenfalls von Lie herrührenden Satze über Functionengruppen. —

„Alle r-gliedrigen Berührungstransformations-Gruppen von gegebener Zusammensetzung c_{iks} lassen sich durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmen."

Hierzu kommen noch, von anderen abgesehen, ein Satz aus der Integrationstheorie, der sich auf gewisse Differentialgleichungen bezieht, welche sich durch eine Reihe von Quadraturen erledigen lassen, und ein Satz über Differentialinvarianten, welcher die Berechnung der Differentialinvarianten aller Gruppen der Ebene wesentlich erleichtert. El.

S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet. Leipzig. Teubner. X u. 632 S. gr. 8°.

Bericht erfolgt im nächsten Jahrgange.

S. Lie. Klassification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. Math. Ann. XXXII. 213-281.

Abdruck aus Lie's Arch. VIII; vergl. F. d. M. XV. 1883. 751.

W. Killing. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen I, II. Math. Ann. XXXI. 252-290 u. XXXIII. 1-48.

Diese beiden Abhandlungen enthalten ausserordentlich wich-

tige Beiträge zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen.

Unter der Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe $X_1f, \dots, X_rf$ versteht man nach Lie das System der Constanten c_{iks} in den Gleichungen:

$$(1) \qquad (X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f. \qquad (i, k = 1, \dots, r);$$

diese Constanten c_{iks} erfüllen die Relationen:

$$(2) \qquad \begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{r} (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}) = 0 \\ (i, k, j, s = 1, \dots, r); \end{cases}$$

und umgekehrt stellt jedes System von c_{iks}, welches die Relationen (2) befriedigt, die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe dar.

Der Ausgangspunkt des Herrn Killing ist die Aufgabe, alle zweigliedrigen Untergruppen der Gruppe $X_1f, \dots, X_rf$ zu finden, welche die eingliedrige Untergruppe $\eta_1 X_1 f + \dots + \eta_r X_r f$ enthalten; diese Aufgabe führt, wie schon Lie gezeigt hat, im allgemeinen auf eine Gleichung r^{ten} Grades, welche lautet:

$$(3) \qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} \sum_\varrho c_{\varrho 11} \eta_\varrho - \omega, & \dots, & \sum_\varrho c_{\varrho r1} \eta_\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_\varrho c_{\varrho 1r} \eta_\varrho, & \dots, & \sum_\varrho c_{\varrho rr} \eta_\varrho - \omega \end{vmatrix} \\ = \omega^r - \psi_1(\eta) . \omega^{r-1} + \psi_2(\eta) . \omega^{r-2} - \dots \pm \psi_{r-1}(\eta) . \omega = 0 \end{cases}$$

(das von ω freie Glied der Determinante verschwindet nämlich identisch). Herr Killing nennt diese Gleichung „die charakteristische Gleichung der Gruppe $X_1f, \dots, X_rf$". Er macht nun die neue und wichtige Bemerkung, dass die Functionen $\psi_1(\eta), \dots, \psi_{r-1}(\eta)$ sämtlich bei der von Lie sogenannten „adjungirten" Gruppe der Gruppe $X_1f, \dots, X_rf$ invariant bleiben, nämlich bei der linearen homogenen Gruppe:

$$X_k f = \sum_{is}^{1,\dots,r} c_{iks} \eta_i \frac{\partial f}{\partial \eta_s} \qquad (k = 1, \dots, r),$$

welche mit der Gruppe $X_1f, \dots, X_sf$ isormorph ist. Den Beweis

für die Invarianz der Functionen $\psi(\eta)$ führt Herr Killing mit Hülfe merkwürdiger Relationen, welche er aus den Gleichungen (2) zwischen den c_{iks} ableitet. Dies der Inhalt von § 1-3.

Da die Anzahl l der von einander unabhängigen unter den Functionen $\psi(\eta)$ offenbar eine charakteristische Eigenschaft der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ ist, so nennt Herr Killing diese Zahl den „Rang" der Gruppe. In § 4 und 5 teilt er einige Sätze mit, welche sich zum Teil unmittelbar aus der Einführung des Rangbegriffes ergeben. In § 6 betrachtet er zur Erläuterung des Gesagten zwei besonders wichtige Gruppen: erstens die allgemeine projective Gruppe des Raums von l Dimensionen, und zweitens die grösste projective Gruppe in $m+1$ Veränderlichen, welche die Form zweiten Grades $x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2$ invariant lässt. Von diesen beiden Gruppen hat die erste den Rang l, die zweite den Rang $\frac{1}{2}(m+1)$ oder $\frac{1}{2}m$, je nachdem m gerade ist oder ungerade. Für beide Gruppen giebt Herr Killing eine bemerkenswerte Darstellung der Invarianten der zugehörigen adjungirten Gruppen.

In § 7 und 8 erledigt Herr Killing die Frage nach der Zusammensetzung aller r-gliedrigen Gruppen $X_1 f, \ldots, X_r f$, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1) Unter den infinitesimalen Transformationen:

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1, \ldots, r)$$

sollen gerade r von einander unabhängige vorhanden sein.

2) Die charakteristische Gleichung (3) soll für allgemeine Werte von $\eta_1, \ldots, \eta_r$ bloss eine einfache verschwindende Wurzel haben, es soll also nicht zu jeder infinitesimalen Transformation der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ eine mit ihr vertauschbare vorhanden sein. Der § 9 enthält Untersuchungen über die Gruppen vom Range Null, bei welchen die $r - l$ Functionen $\psi(\eta)$ sämtlich identisch verschwinden; doch wird keine explicite Darstellung dieser Gruppen gegeben.

Die zweite Abhandlung (§ 10-18) beschäftigt sich mit dem Falle, dass die charakteristische Gleichung (3) eine mehrfache verschwindende Wurzel hat. Ich erwähne die folgenden Sätze:

Aus § 10: „Hat für ein Wertsystem $\eta_1, \ldots, \eta_r$ die charak-

teristische Gleichung (3) gerade k verschwindende Wurzeln, so gehört die Transformation $\eta_1 X_1 f + \cdots + \eta_r X_r f$ einer k-gliedrigen Untergruppe der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ an."

„Verschwinden die Functionen $\psi_{r-1}(\eta), \ldots, \psi_{r-k+1}(\eta)$ alle identisch, während $\psi_{r-k}(\eta)$ nicht identisch Null ist, so ist jede infinitesimale Transformation $\eta_1 X_1 f + \cdots + \eta_r X_r f$ in einer k-gliedrigen Untergruppe vom Range Null enthalten."

„Ist die Voraussetzung des vorhergehenden Satzes erfüllt und enthält ausserdem noch die Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, so verschwinden für $\omega = 0$ alle $(r - k + 1)$-reihigen Unterdeterminanten der Determinante (3), und die betreffende k-gliedrige Untergruppe besteht aus paarweise vertauschbaren Transformationen."

Der letzte Satz wird leider bloss für den Fall bewiesen, dass die $r - k$ nicht verschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung sämtlich von einander verschieden sind; er wird allerdings auch in § 11-18 nur für diesen Fall benutzt. In einer neueren Abhandlung (Math. Ann. XXXIV. 57 ff.) hat übrigens Herr Killing den Beweis auch für den allgemeinen Fall durchgeführt.

Aus § 11: „Enthält eine r-gliedrige Gruppe vom Range l keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, so gehört jede ihrer infinitesimalen Transformationen einer mindestens l-gliedrigen Untergruppe mit paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen an."

Aus § 12: „Enthält die r-gliedrige Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, giebt es ferner unter den Transformationen $(X_i X_k)$ $(i, k = 1, \ldots, r)$ gerade r von einander unabhängige, und besitzt endlich die charakteristische Gleichung (3) für allgemeine Werte von $\eta_1, \ldots, \eta_r$ gerade l verschwindende und $r - l$ von einander und von Null verschiedene Wurzeln, so lassen sich die $r - l$ nicht verschwindenden Wurzeln als lineare homogene Functionen von l unter ihnen darstellen, die Coefficienten dieser Functionen sind rationale Zahlen, die Zahl l ist der Rang der Gruppe."

Der § 12 enthält noch weitere merkwürdige Beziehungen zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Von

diesen Beziehungen ausgehend, gelangt Herr Killing in § 13 zu gewissen linearen homogenen Substitutionen mit ganzzahligen Coefficienten. In § 13-15 untersucht er diese Substitutionen und bestimmt ihre möglichen Formen; in § 16 endlich zeigt er, welche Bedeutung die betreffenden Substitutionen für die Gruppe $X_1 f, \dots, X_r f$ haben, und gelangt namentlich dazu, die Beschaffenheit dieser Substitutionen für eine einfache Gruppe $X_1 f, \dots, X_r f$ festzustellen. In § 17 und 18 werden die gewonnenen Sätze zur Bildung der Zusammensetzungen einfacher Gruppen angewandt.

Das Endergebnis der Killing'schen Arbeit ist, soweit ich sehe, die Kenntnis aller möglichen Zusammensetzungen, welche eine einfache Gruppe haben kann. Unter diesen Gruppen finden sich solche von bisher ganz unbekannter Beschaffenheit.

Alles in allem verdankt die Theorie der Transformationsgruppen den beiden Killing'schen Abhandlungen eine wesentliche Bereicherung ihrer Ergebnisse und ihrer Methoden.

El.

F. Fitting. Ueber eine Klasse von Berührungstransformationen. Diss. Halle. 37 S.

Anknüpfend an Betrachtungen Lagrange's entwickelt Herr Fitting eine Abbildung der Curven einer Ebene auf gewisse Curven eines $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{n+1}. Er geht aus von einer Schar von ∞^{n+1} Curven:

$$f(\xi, \eta; \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = 0$$

der Ebene und wählt unter diesen Curven diejenigen aus, welche irgend eine Curve $F(x, y) = 0$ in der n^{ten} Ordnung berühren; für $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ ergeben sich auf diese Weise Ausdrücke von der Form:

$$\lambda_i = \varphi_i\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = F_i(x) \qquad (i = 1, \dots, n+1);$$

es entspricht also jeder Curve $F(x, y) = 0$ eine gewisse Curve des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$. Besteht zwischen zwei Curven der Ebene eine Berührung m^{ter} Ordnung,

so berühren sich die beiden entsprechenden Curven des R_{n+1}:

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$$

in der $(m-n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung; d. h. sie berühren sich nur dann, wenn $m \gtreqless n$ ist. Die hierdurch definirte Abbildung der Curven einer Ebene als Curven des R_{n+1} bezeichnet Herr Fitting als eine vollständige Berührungstransformation n^{ter} Ordnung, weil sie für $n=1$ eine Lie'sche Berührungstransformation der ebenen Curven wird, und weil sie in naher Beziehung zu einer Art von Transformationen steht, welche Bäcklund zuerst betrachtet und welche der Unterzeichnete Berührungstransformationen n^{ter} Ordnung genannt hat.

Bei der beschriebenen Transformation entspricht zwar jeder Curve der Ebene eine Curve des R_{n+1}, nicht aber umgekehrt; Herr Fitting stellt daher zunächst die Bedingungen auf, unter denen eine Curve des R_{n+1} bei der betreffenden Transformation eine Bildcurve in der Ebene besitzt; sodann untersucht er die Beziehungen, welche zwischen den $n+1$ Functionen φ_i bestehen müssen, damit die Gleichungen:

$$\lambda_i = \varphi_i\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

eine vollständige Berührungstransformation n^{ter} Ordnung darstellen. Im zweiten Teile seiner Arbeit giebt er einige Anwendungen auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.

El.

Page. On the primitive groups of transformations in space of four dimensions. American J. X. 293-346, auch als Diss. Leipzig.

Herr Page bestimmt in dieser Arbeit unter Benutzung der von Lie herrührenden Methoden alle endlichen continuirlichen Transformationsgruppen des vierfach ausgedehnten Raumes R_4, welche primitiv sind, bei welchen also der R_4 nicht in eine invariante Schar von ∞^1 dreifach, oder von ∞^2 zweifach oder von ∞^3 einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zerlegt wird. Er beweist, dass es nur 11 derartige Gruppen giebt. Aus seiner Aufzählung dieser Gruppen geht unter anderm hervor, dass die

allgemeine projective Gruppe des R_4 die einzige einfache Gruppe dieses Raumes ist, zu welcher es in einem Raume von weniger Dimensionen keine gleich zusammengesetzte giebt.

Es hat sich mittlerweile herausgestellt (Man vgl. Berichte der math. phys. Klasse der Kgl. Sächs. Ges. d. W. 1889, S. 169 f.), dass ein beträchtlicher Teil der Rechnungen, welche Herr Page zur Erreichung seines Zieles durchgeführt hat, erspart werden kann. Dadurch wird aber das Verdienst seiner Arbeit nicht verringert; denn einmal ist er der erste, welcher alle primitiven Gruppen des R_4 wirklich aufgestellt hat, und dann enthält seine Arbeit überhaupt wichtige Beiträge zur Bestimmung aller transitiven Gruppen des R_4. El.

H. O. Wend. Ueber ein mit der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=k^2 f$ zusammenhängendes physikalisches Problem. Diss. Leipzig. 83 S. 8°.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

A. Winckler. Ueber ein Kriterium des Grössten und Kleinsten in der Variationsrechnung. Wien. Ber. XCVII. 1065-1082.

Die gewöhnliche Methode, um die Bedingungen zu finden, unter welchen das einfache Integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ ein Maximum oder Minimum wird, welche bekanntlich die Kenntnis des allgemeinen Integrals der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)=0$$

und die Untersuchung des Vorzeichens der von Legendre in die Form

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}} [p_0 w + p_1 w' + \cdots + p_{n-1} w^{(n-1)} + w^{(n)}]^2 dx$$

gebrachten zweiten Variation des Integrals erfordert, wird durch die schon für kleinere Werte von n eintretende Complication erschwert und ist in den zahlreichen Fällen nicht anwendbar, in denen das erwähnte allgemeine Integral nicht gefunden werden kann. Der Verfasser bringt aus diesem Grunde durch Anwendung teilweiser Integration die zweite Variation auf die Form

$$\int_{x_0}^{x_1} [P_0 ww + P_1 w'w' + \cdots + P_n w^{(n)} w^{(n)}] dx,$$

vermittelst deren sich in manchen speciellen Fällen auch für grössere Werte von n die in Frage stehenden Bedingungen vollständig oder teilweise ableiten lassen. Von dieser Form der zweiten Variation macht er ferner noch eine andere Anwendung; durch Vergleichung derselben mit der Legendre'schen Form lässt sich nämlich das Zeichen einiger von der willkürlichen Function w und deren Differentialquotienten abhängigen Integrale bestimmen, was mit den gewöhnlichen Hülfsmitteln der Integralrechnung nicht ohne Schwierigkeit geschehen könnte.

T.

P. Appell. Mémoire sur les déblais et les remblais des systèmes continus ou discontinus. Mém. Sav. Étr. (2) XXIX. No. 3. 208 S. (1887.)

Die mit dem Bordin'schen Preise für das Jahr 1884 gekrönte Abhandlung beschäftigt sich mit der alten von Monge (Mém. de l'Ac. des sciences 1781) und von Dupin (Applications de géométrie et de mécanique) behandelten Aufgabe, deren einfachster Fall der folgende ist. Es seien $D_1, D_2, \ldots, D_n$ die materiellen Punkte, die den „Abraum" (déblai) ausmachen, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ diejenigen, welche den „Anraum" (remblai) bilden; alle diese Punkte haben die nämliche Masse m. Die Aufgabe besteht darin, jeden Punkt D_i des Abraums auf einen

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

F. Schur. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen. Math. Ann. XXXIII. 49-60.

Der Verfasser betrachtet die Theorie der complexen Zahlen von einem neuen Gesichtspunkte aus, indem er dieselbe mit Lie's Theorie der Transformationsgruppen in Zusammenhang bringt.

Sieht man die Componenten einer n-gliedrigen complexen Zahl als Coordinaten eines Punktes im Raume von n Dimensionen an, so bedeutet eine Verknüpfung (Addition, Multiplication) zweier complexen Zahlen eine Vorschrift, welche aus zwei Punkten a, b jenes Raumes einen dritten c ableiten lehrt. Hält man von den beiden Punkten den einen a fest, während der andere b als veränderlich angesehen wird, so entspricht jeder Lage von b eine bestimmte Lage von c. Man erhält auf diese Weise eine Transformation des Raumes, und den verschiedenen Lagen von a entsprechend entsteht eine n-fach unendliche Schar von solchen Transformationen.

Unter der Annahme, dass diese Transformationen analytisch seien, gilt nun der Satz: Wenn die Transformations-Schar die

identische Transformation enthält und sowohl dem associativen, wie dem commutativen Gesetze folgt, so lässt sich dieselbe durch Einführung von neuen Veränderlichen in eine Schar von Translationen überführen. Nach Ableitung dieses Satzes betrachtet der Verfasser diejenigen Transformations-Scharen, welche mit der Schar der Translationen durch das distributive Gesetz verknüpft sind. Die Bestimmung dieser Scharen wird auf die Aufstellung gewisser Systeme von Constanten zurückgeführt.

Hz.

K. Beckman. Om dimensionsbegreppet och dess betydelse för Matematiken. Upsala. Diss. 79 S.

Elementare, durch strenge Beweise begründete Darstellung der Hauptsätze aus der Theorie der ganzen wie der von G. Cantor eingeführten transfiniten Zahlen. Der Verfasser giebt in der Theorie der Mannigfaltigkeiten, deren Dimension eine transfinite Zahl ist, einige Sätze an, die sich den Untersuchungen von G. Cantor genau anschliessen und wenig Neues enthalten.

Die gebrochenen, algebraischen und irrationalen sowie auch die complexen Zahlen werden durch exacte Definitionen nach Kronecker, Weierstrass, G. Cantor eingeführt und die wichtigsten Sätze über continuirliche Functionen bewiesen.

Zuletzt giebt der Verf. nach Beltrami eine Darstellung der Hauptsätze der pseudosphärischen Geometrie. Die Darstellung ist abstract und streng. Bx.

Adolf Meyer. Om konvergensområdet hos Potensserier af flere Variabler. Upsala. Diss. 36 S.

Die Abhandlung enthält hauptsächlich eine Reproduction des Aufsatzes des Verfassers „Om Kontinuitet hos Konvergensområden." (Stockh. Öfv. 1883) nebst einigen bekannten Sätzen der Weierstrass'schen Functionentheorie. Bx.

E. Cesaro. Sui concetti di limite e di continuità. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 12-17.

Betrachtungen, um nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung Zahlen zu gewinnen, welche ein Mass für den Grad der Discontinuität in der Nähe eines Punktes abgeben sollen. Der Verfasser verspricht sich hiervon Nutzen bei Untersuchungen über die Differentiirbarkeit, die Integrirbarkeit und die analytische Darstellbarkeit einer Function. Lp.

M. Lerch. Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen. J. für Math. CIII. 126-138.

Der Verfasser untersucht die Reihen von der Form

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos(a_\nu \pi x)$$

in Bezug auf die Existenz eines bestimmten endlichen Differentialquotienten. Dabei bedeuten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ganze positive Zahlen, von denen vorausgesetzt wird, dass es eine unendliche Reihe von einander verschiedener ganzer Zahlen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ giebt, für welche die Quotienten $\frac{a_\mu}{b_\nu} (\mu > \nu)$ ganze Zahlen sind. Die c_ν sollen Glieder einer absolut convergirenden Reihe ausmachen. Zunächst zeigt der Verfasser, dass es unter den Functionen (1) unendlich viele giebt, die an allen Stellen von der Form $x = \frac{a}{b_m}$ (wo a eine ganze Zahl bedeutet) keinen bestimmten Differentialquotienten besitzen. Als ein specieller Fall dieser hier entwickelten Sätze folgt z. B.:

„Giebt es unter den positiv vorausgesetzten Grössen a_ν unendlich viele, die unter eine gewisse Grenze $\varrho > 0$ nicht herabsinken, so hat die als absolut convergent vorausgesetzte Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} \cos(\nu!\, \pi x)$$

für keinen rationalen Wert von x einen bestimmten Differentialquotienten."

Unter den Functionen (1) giebt es ferner unendlich viele, welche, wie die bekannte Weierstrass'sche Function, an keiner Stelle differentiirbar sind. So gilt z. B. der Satz:

„Sind $p_0, p_1, p_2, \ldots$ ungerade ganze Zahlen, die nicht unter einer festen Grenze liegen, und ist $r > 1$ eine positive Grösse, so wird die als absolut convergent vorausgesetzte Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^\nu}{a_\nu} \cos(a_\nu \pi x), \quad (a_\nu = p_0 p_1 p_2 \ldots p_\nu)$$

eine Function darstellen, die an keiner Stelle einen bestimmten endlichen Differentialquotienten besitzt."

Auf den letzten Seiten der interessanten Arbeit giebt der Verfasser den Nachweis, dass die Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(a^\nu x)}{\nu!},$$

welche Ableitungen aller Ordnungen besitzt, nie nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt werden kann, was auch x_0 sei. Die Grösse a wird als eine ungerade ganze Zahl vorausgesetzt.

Hz.

H. Padé. Sur l'irrationalité des nombres e et π. Darboux Bull. (2) XII. 144-148.

Der Verfasser beweist auf eine neue Weise die Formeln, welche Herr Hermite zum Nachweis der Irrationalität von π, π^2 und der ganzzahligen Potenzen von e aufgestellt hat. Herr Padé erhält diese Formeln, indem er die nachstehende von Herrn Darboux angegebene Identität

$$f(x+h) - f(x)$$
$$= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \cdot \frac{n!(2n-p)!}{(2n)!(n-p)!} \frac{h^p}{p!} [f^{(p)}(x+h) + (-1)^{p-1} f^{(p)}(x)]$$
$$+ (-1)^n \cdot \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 t^n (1-t)^n f^{(2n+1)}(x+ht)\,dt$$

auf die Fälle

$$f(x) = e^x \text{ und } f(x) = \sin x$$

anwendet. Hz.

M. W. Crofton. Note on the application of symbolical methods to the solution of certain functional equations. Dublin Proc. (3) I. 20-23.

Die Note giebt einige Anwendungen für den Gebrauch symbolischer Operatoren bei der Behandlung von Functionalgleichungen. Nimmt man die Functionalgleichung

$$\varphi(x+h) \equiv a\varphi(x),$$

wo a, h Constanten sind, und setzt $\varphi(x) = y$, so geht die Gleichung über in $e^{hD}y = ay$, mithin $e^{2hD}y = e^{hD}ay = a^2y$, allgemein $e^{rhD}y = a^ry$; bedeutet also f irgend eine rationale und ganze Function, so ist $f(e^{hD})y = f(a)y$. Unter der Annahme (um Lösungsversuche zu machen), dass die Gleichung für alle Formen von f gilt, werden verschiedene Anwendungen gegeben. So erhält man für $f(x) = \log x$:

$$hDy = \log a\,.\,y,\ y = C\,.\,a^{\frac{x}{h}} = \varphi(x).$$

Andererseits, um eine Lösung von $\varphi(mx) \equiv a\varphi(x)$ zu erhalten, $m^{xD}y = ay$ und, wie vorher, $\log m\,.\,xDy = \log a\,.\,y$, sodass $\varphi(x) = Cx^{\frac{\log a}{\log m}}$. Als ein anderes Beispiel nehme man die Gleichung $\varphi(mx+h) \equiv a\varphi(x)$, die auch $\varphi(my+c) \equiv a\varphi(y+c)$ geschrieben werden kann, wenn $y = x-c$, $c = n/(1-m)$. Man setze $\psi(y) \equiv \varphi(y+c)$; da nun $\psi(my) \equiv a\psi(y)$ die Beziehung $\psi(y) = Cy^{\frac{\log a}{\log m}}$ giebt, so ist

$$\varphi(y+c) = \varphi(x) = C\left(x-\frac{n}{1-m}\right)^{\frac{\log a}{\log m}}.$$

Noch andere von Gleichungen abhängende Beispiele, die in einem Artikel desselben Verfassers in L. M. S. Proc. XII. gegeben sind, werden in der Note behandelt.

Gbs. (Lp.)

J. Riemann. Sur une généralisation du principe de Dirichlet. C. R. CVI. 123-125.

In einer Ebene, deren Punkte auf ein rechtwinkliges Coordinatenkreuz bezogen werden, sei ein Gebiet S gegeben, welches von $n+1$ sich selber und einander nicht schneidenden geschlossenen Linien begrenzt wird. Es giebt nun stets eine Function $U(x,y)$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt: 1) Sie

ist innerhalb S „harmonisch". 2) Sie nimmt in jedem Punkt der Begrenzung von S einen vorgeschriebenen Wert an, welcher sich mit der Lage des Punktes, abgesehen von einzelnen Punkten A, stetig ändern soll. Bei dem Durchgang durch einen der Punkte A soll der vorgeschriebene Wert einen endlichen Sprung erleiden. 3) Sie bewahrt in den Punkten A endliche Werte.

Dieses Existenz-Theorem bezeichnet der Verfasser als „verallgemeinertes Dirichlet'sches Princip". Den Beweis desselben stützt der Verfasser auf einen Satz des Herrn H. A. Schwarz.

Hz.

J. Riemann. Sur le problème de Dirichlet. Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. 327-410.

Die vorliegende Abhandlung enthält eine zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen von Herrn H. A. Schwarz, welche an das von Bernhard Riemann so genannte Dirichlet'sche Princip anknüpfen. Es handelt sich in denselben bekanntlich vornehmlich um die Aufgabe, die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für ein ebenes Gebiet bei vorgeschriebenen Randwerten zu integriren, eine Aufgabe, welche der Verfasser als das „Dirichlet'sche Problem" bezeichnet. Des weiteren unterscheidet der Verfasser den Fall des „klassischen" von dem des „verallgemeinerten" Problems. Im ersteren Falle bilden die vorgeschriebenen Randwerte eine continuirliche Folge, im letzteren erleiden diese Werte an einzelnen Stellen des Randes endliche Sprünge. — Die Arbeit ist in vier Abschnitte eingeteilt. In dem ersten Abschnitt werden die Eigenschaften der in einem gegebenen Gebiete (einschliesslich des möglicher Weise aus mehreren Stücken bestehenden Randes) stetigen Functionen u entwickelt, welche der Gleichung $\Delta u = 0$ genügen; sodann wird der Zusammenhang des Dirichlet'schen Problems mit der Aufgabe der conformen Abbildung ebener Flächen aufeinander dargelegt, und endlich durch einfache Betrachtungen das verallgemeinerte Dirichlet'sche Problem auf das klassische zurückgeführt.

In dem zweiten Abschnitt giebt der Verfasser eine ausführliche Analyse einer Arbeit von Schläfli, in welcher es sich um

die Abbildung eines geradlinigen Polygons auf die Halbebene handelt. Die Auseinandersetzungen des Verfassers beziehen sich namentlich auf die Bestimmung gewisser Constanten, welche bei dieser Abbildungs-Aufgabe besondere Schwierigkeit bereitet. Der dritte Abschnitt enthält die Combinations-Methode des Herrn Schwarz mit ihrer Anwendung auf die Lösung des Dirichlet'schen Problems für den Fall, dass die Begrenzung des gegebenen Gebietes sich aus einer endlichen Anzahl von regulären Stücken analytischer Linien zusammensetzt.

Der vierte Abschnitt endlich beschäftigt sich mit den Untersuchungen von A. Harnack, welche in dessen Buche „Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales" (Leipzig 1887) niedergelegt sind. Hier wird das Dirichlet'sche Problem in seiner ganzen Allgemeinheit gelöst auf Grund einer bei beliebiger Begrenzung gültigen Methode zur Construction der sogenannten Green'schen Function.

Was bei der übrigens sehr dankenswerten Arbeit des Herrn Verfassers auffällig erscheint, ist der Umstand, dass derselbe die mit Herrn Schwarz' Arbeiten parallel laufenden Untersuchungen des Herrn Carl Neumann nicht berücksichtigt, ja dieselben nicht einmal erwähnt hat. Hz.

P. du Bois-Reymond. Bemerkungen über

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

J. für Math. CIII. 204-229.

Der Aufsatz ist ein Teil einer vor längerer Zeit verfassten, aber nicht veröffentlichten Abhandlung über diesen Gegenstand und besteht aus verschiedenen Bemerkungen in Betreff des Dirichlet'schen Principes.

1. Sind z und ζ zwei Lösungen von $\Delta z = 0$, so ist

$$\left(z\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \zeta\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \left(\zeta\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)dy$$

ein vollständiges Differential, dessen Integral über eine geschlossene Curve unter gewissen Umständen gleich Null ist.

Nach einem bekannten Satze ist dieses Randintegral gleich dem Flächenintegral, das man erhält, wenn

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy=(\zeta\Delta z-z\Delta\zeta)dx\,dy$$

über die eingeschlossene Fläche integrirt wird, also deshalb auch unter gewissen Umständen gleich Null. Der Verfasser fragt nach den Bedingungen, unter denen nach beiden Herleitungen das Integral gleich Null ist, und findet, dass sie im wesentlichen gleichwertig sind.

2. Zu der bekannten Formel:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned}2\pi z(\xi,\eta) &= \int\left\{\left(z\frac{\partial R}{\partial y}-R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx+\left(R\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial R}{\partial x}\right)dy\right\}\\ &= \int ds\left(z\frac{\partial R}{\partial N}-R\frac{\partial z}{\partial N}\right),\end{aligned}$$

wo (x, y) Coordinaten der Punkte der Randcurve, (ξ, η) die eines Punktes im Innern sind, R der Logarithmus der Entfernung von (x, y) und (ξ, η) und endlich $\Delta z = 0$ für das betrachtete Gebiet ist, bemerkt der Verfasser, dass die Berechtigung, an Stelle der Function z zweier Variablen x, y eine Function einer Variable s zu setzen und diese Function willkürlich sein zu lassen, schon das Dirichlet'sche Princip, wenn auch nicht in seinem ganzen Umfange, erfordert. (Vergl. über die Gültigkeit dieser Formel auch 6.)

3. Aus dem Cauchy'schen Satze:

$$f(\xi+i\eta)=u+iv=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(x+iy)\,d(x+iy)}{x-\xi+i(y-\eta)}$$

folgen durch Trennung des Reellen und Imaginären die Gleichungen:

$$2\pi u=\int ds\left(u\frac{\partial R}{\partial N}+v\frac{\partial R}{\partial s}\right),$$

$$-2\pi v=\int ds\left(u\frac{\partial R}{\partial s}-v\frac{\partial R}{\partial N}\right).$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erhält man unmittelbar die unter 2. angeführte Formel (I), wenn man

$$v=v_0+\int ds\frac{\partial u}{\partial N}$$

einführt und partiell integrirt.

4. Um aus der Formel (I) $\frac{\partial z}{\partial N}$ zu eliminiren, muss man die Herleitung dieser Formel wiederholen, dabei aber nicht die Lösung $z = R$, sondern die Green'sche Function $G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$ zu Grunde legen, die am Rande (für $\xi_1 = x$, $\eta_1 = y$) in R übergeht und im Innern samt ihren Ableitungen stetig ist; die Annahme einer solchen Function ist nach dem Dirichlet'schen Princip gestattet. Als Beispiel giebt der Verfasser die Green'sche Function für eine Kreisperipherie.

5. Die nunmehr folgenden Bemerkungen betreffen sämtlich die Integration der Gleichung $\Delta z = 0$ für die Kreisperipherie, „für welche sich das Dirichlet'sche Princip in weitestem Masse bewahrheitet hat" (vergl. die Untersuchungen der Herren Schwarz, Prym, Neumann und du Bois-Reymond selbst). Der Integralausdruck

$$2\pi z = \int_0^{2\pi} d\theta\, f(\theta) \frac{1-s^2}{1-2s\cos(\theta-\alpha)+s^2} \qquad (s<1)$$

wird hergeleitet und alsdann nach der vom Verfasser in Darboux Bulletin (2) III. 343 (1879) angegebenen Methode, jedoch auf kürzerem Wege als dort verificirt, wobei sich zugleich Gültigkeitsgrenzen für die Formel ergeben.

6. An den Unstetigkeitsstellen von $f(\theta)$ wird auch

$$\frac{\partial z}{\partial N} = \frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial s}$$

unstetig. Herr Prym hat darauf aufmerksam gemacht, dass eine solche Unstetigkeit auch bei stetigem $f(\theta)$ eintreten kann; ja nach Herrn Weierstrass ist es nicht statthaft, aus der Stetigkeit von $f(\theta)$ auf die Existenz eines Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial N}$ zu schliessen. Herr du Bois-Reymond untersucht deshalb den Ausdruck $\lim\limits_{s=1}\frac{\partial z}{\partial s}$. Die Ergebnisse seiner zu einem gewissen Abschluss gelangten Untersuchungen müssen in der Abhandlung selbst nachgesehen werden. Sie sind von Wichtigkeit für die Frage, innerhalb welcher Grenzen die Formel (I) gültig ist.

7. Statt zu verlangen, dass z am Rande des Kreises in eine

gegebene Function $f(\theta)$ übergeht, kann man allgemeiner dasselbe von einer linearen Function von z und $\frac{\partial z}{\partial N}$ fordern. Herr du Bois-Reymond giebt einen Ausdruck, der dies leistet, wenn man die gegebene Function um eine gewisse von ihr abhängige Constante vermehrt. Er wirft dann die Frage auf, ob dasselbe möglich ist, wenn auf verschiedenen Teilen des Kreisumfanges verschiedene lineare Functionen von z und $\frac{\partial z}{\partial N}$ gleich gegebenen Functionen werden sollen. Ein Ansatz führt auf Gleichungen zur Bestimmung von Functionen, für welche der Verfasser den Namen Integralgleichungen vorschlägt. Ein einfaches Beispiel einer solchen Integralgleichung ist:

$$\int_0^s ds\, f(s)\varphi(s,x) = \psi(x)f(x)+\chi(x),$$

wo φ, χ, ψ bekannt sind und $f(x)$ ermittelt werden soll. Die Behandlung solcher Gleichungen scheint, wie Herr du Bois-Reymond bemerkt, „für die heutige Analysis unübersteigliche Schwierigkeiten darzubieten.“ St.

C. Neumann. Ueber die Stetigkeit mehrdeutiger Functionen. Leipz. Ber. 1888. 121-124.

Der Verfasser hat im Jahre 1884 in der zweiten Auflage seines Werkes über die Riemann'sche Theorie eine neue Methode entwickelt zur Untersuchung der Stetigkeit mehrdeutiger Functionen. Da nun in dem damaligen Referat (F. d. M. Bd. XVI, Seite 336) diese Methode nicht näher besprochen ist, so dürfte es wohl angemessen sein, solches gegenwärtig nachzutragen und den Grundgedanken dieser Methode durch das folgende (vom Verfasser im vorliegenden Aufsatz mitgeteilte) einfache Beispiel zu veranschaulichen.

Die Function $f(z)$ sei auf der z-Ebene innerhalb eines gegebenen Gebietes $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig; und Gleiches gelte innerhalb $\mathfrak{A}$ auch von $f'(z)$. Alsdann wird bekanntlich $f(z)$ selber, und ebenso auch $f(z)-c_1$ innerhalb $\mathfrak{A}$ immer nur in einzelnen

Punkten verschwinden können. Dabei soll c_1 eine gegebene Constante vorstellen.

Einer von diesen einzelnen Punkten, in denen $f(z)-c_1$ innerhalb $\mathfrak{A}$ verschwindet, mag z_1 heissen. Es soll untersucht werden, wie z_1 sich ändert, falls man c_1 sich ändern lässt.

Man construire innerhalb $\mathfrak{A}$ die Kreisfläche (z_1, ε), d. h. eine Kreisfläche, deren Centrum in z_1 liegt, und deren Radius $= \varepsilon$ ist. Dabei soll ε einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad vorstellen. Jedenfalls aber soll ε so klein sein, dass in Erstreckung der Fläche (z_1, ε) die Function $f(z)-c_1$ nur allein in z_1 verschwindet. Alsdann wird also z. B. am Rande dieser Fläche $f(z)-c_1$ durchweg $\neq 0$, mithin $\mathrm{mod}\,[f(z)-c_1]$ durchweg > 0 sein. Folglich wird eine positive Constante 2ϱ angebbar sein, der Art, dass für alle Punkte z dieses Randes die Formel stattfindet:

$$(1) \qquad \mathrm{mod}\,[f(z)-c_1] > 2\varrho; \text{ am Rande von } (z_1, \varepsilon).$$

Es sei nun c irgend eine neue Constante. Alsdann folgt aus der identischen Gleichung

$$f(z)-c = [f(z)-c_1]+[c_1-c]$$

sofort:

$$\mathrm{mod}\,[f(z)-c] \geqq \mathrm{mod}\,[f(z)-c_1]-\mathrm{mod}\,[c_1-c].$$

Bringt man diese Formel in Anwendung auf den Rand der Fläche (z_1, ε), so ergiebt sich mit Rücksicht auf (1):

$$(2) \quad \mathrm{mod}\,[f(z)-c] > 2\varrho-\mathrm{mod}\,[c_1-c]; \text{ am Rande von } (z_1, \varepsilon).$$

Unterwirft man jetzt jene neue Constante c der Bedingung:

$$(3) \qquad \mathrm{mod}\,[c-c_1] < \varrho,$$

so erhält man aus (2):

$$(4) \qquad \mathrm{mod}\,[f(z)-c] > \varrho; \text{ am Rande von } (z_1, \varepsilon).$$

Mit andern Worten: Unterwirft man c der Bedingung (3), lässt man also diese Constante c auf der c-Ebene innerhalb des Kreises (c_1, ϱ) beliebig variiren, so wird dabei der Nenner des über die Peripherie von (z_1, ε) erstreckten Integrals

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{(z_1, \varepsilon)} \frac{df(z)}{f(z)-c}$$

niemals 0 werden können. Folglich wird dieses Integral während jener Variation nur in stetiger Weise sich ändern können, und

daher, weil es stetiger Aenderungen unfähig ist, constant bleiben. Dass nämlich dieses Integral stetiger Aenderungen unfähig ist, ergiebt sich aus einem bekannten Cauchy'schen Theorem, demzufolge der Wert des Integrals die Anzahl der elementaren Nullpunkte der Functionen $f(z)-c$ innerhalb der Fläche (z_1, ε) repräsentirt; so dass also der Wert des Integrals immer nur eine ganze Zahl sein kann.

Mit Rücksicht auf dieses Cauchy'sche Theorem ist übrigens der soeben über die Constanz des Integrales (5) ausgesprochene Satz offenbar auch so ausdrückbar: Lässt man c innerhalb des Kreises (c_1, ϱ) beliebig variiren, so wird dabei die Anzahl der innerhalb (z_1, ε) vorhandenen elementaren Nullpunkte der Function $f(z)-c$ constant bleiben. Es werden mithin, während dieser Variation, diejenigen Nullpunkte, welche zu Anfang innerhalb des Kreises (z_1, ε) vorhanden waren, innerhalb dieses Kreises verbleiben, und auch keine neuen zu denselben hinzutreten.

Bezeichnet man also die innerhalb des Kreises (z_1, ε) vorhandenen elementaren Nullpunkte von $f(z)-c$ mit $z', z'', \ldots, z^{(n)}$, so werden, so lange c innerhalb (c_1, ϱ) bleibt, die Moduln der Grössen

$$z'-z_1,\ z''-z_1,\ \ldots,\ z^{(n)}-z_1$$

durchweg $< \varepsilon$ bleiben. Folglich sind $z', z'', \ldots, z^{(n)}$ stetige Functionen von c. Ueberdies erkennt man leicht, dass $z', z'', \ldots, z^{(n)}$ für $c = c_1$ in z_1 übergehen, und gelangt daher zu folgendem Satze:

Es seien $f(z)$ und $f'(z)$ auf der z-Ebene innerhalb eines gegebenen Gebietes $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig. Ferner sei z_1 ein gegebener Punkt innerhalb $\mathfrak{A}$, und $f(z_1) = c_1$. Betrachtet man alsdann die Wurzeln z der Gleichung $f(z) = c$, so werden diese Wurzeln Functionen von c sein. Und zwar werden diejenigen dieser Wurzeln, welche für $c = c_1$ den Wert z_1 besitzen, Functionen von c sein, die (auf der c-Ebene) im Punkte c_1 stetig sind.

Uebrigens ist die hier in Kürze angedeutete Methode vom Verfasser in dem genannten Werke nicht nur auf Gleichungen

von der Form $f(z) = c$, sondern auch auf Gleichungen allgemeinern Form $f(z, c) = 0$ angewandt worden.

F. Giudice. Sopra la determinazione di funzioni variabile definite per mezzo d'un' equazione co variabili. Palermo Rend. II. 28-36.

Wenn die Function $\varphi(x)$ in einem gegebenen Int differentiirbar ist und die Functionalgleichung befriedigt

$$\varphi(x) . \varphi(y) = \varphi(x+y+xy),$$

so ist notwendig in jenem Intervalle

$$\varphi(x) = (1+x)^h,$$

wo h eine Constante bedeutet. Diesen Satz, sowie ähnlich kannte Sätze leitet der Verfasser auf bekanntem Wege ab. knüpft daran die Bemerkung, dass die Reihenentwickelung arc sin x sich aus dem Additionstheorem in der Form

$$A\left(x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$

ergiebt, wo A eine Constante bezeichnet, welche von der M einheit der Winkel abhängt. Hz.

Ratner. Ueber eine Eigenschaft gewisser linearer ir ductibler Differentialgleichungen. Math. Ann. XXXII. 566-5

Die Arbeit bezweckt die Erweiterung der von Herrn Hurw in seiner Abhandlung „Ueber arithmetische Eigenschaften zwisch transcendenten Functionen" (Math. Ann. XXII, F. d. M. X 1883. 329) entwickelten Sätze bezüglich der Integrale der Gl chung $azy'' = by' + y$ auf Integrale von Differentialgleichung höherer Ordnung.

1. Es sei die irreductible Differentialgleichung

(1) $P_{n-1}(z)y^{(n)} = P_{n-2}(z)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(z)y'' + P_0(z)y' + y =$

gegeben, wobei die Functionen $P_k(z)$ ganz und ganzzahlig un höchstens vom Grade k sind; ferner seien $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n($ n willkürliche ganze und ganzzahlige Functionen, so lassen sic in diesem und nur in diesem Falle n andere ganze und gan

[..]e **Functionen** $\psi_1(z), \ldots, \psi_n(z)$ so definiren, dass die [..]hung

$$y^{(n-1)} + \varphi_2(z) y^{(n-2)} + \cdots + \varphi_n(z) y$$
$$= \frac{d}{dz}\{\psi_1(z) y^{(n-1)} + \psi_2(z) y^{(n-2)} + \cdots + \psi_n(z) y\}$$

[..]edigt **wird, wenn** y ein Integral der Gleichung (1) ist. Die [..]nd **höchstens vom** Grade $m+n-1$, wenn die φ den Grad [..]icht **übersteigen.**

2. **Wenn** $f(z)$ eine ganze und ganzzahlige Function vom [..]-1)^{ten} **Grade und** A der Coefficient von $z^{\nu+1}$ in $f(z)$ ist, dann [..]tehen **die Relationen**

$$\int [A^{\nu+2n} f(z)]^m z^\lambda y^{(n)} dz$$
$$= f(z)\{G_{\varkappa(\nu+1)+\lambda}(z,m) y + \cdots + S_{\varkappa(\nu+1)+\lambda}(z,m) y^{(n-1)}\}$$
$$+ g_{\varkappa(\nu+1)+\lambda}(z,m) y + \cdots + s_{\varkappa(\nu+1)+\lambda}(z,m) y^{(n-1)}$$
$$(\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1; \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, \nu).$$

[..]$(z,m), \ldots, S_\alpha(z,m)$ bedeuten ganze und ganzzahlige Functionen [..]n z, $g_\alpha(z,m), \ldots, s_\alpha(z,m)$ ebensolche von höchstens dem r^{ten} [..]rade. — **Unter** der weiteren Annahme, dass $f(z)$ weder mit [..](z) **noch mit** $P_{n-1}(z)$ einen Teiler gemein hat, wird bewiesen, [..]ass **die Relationen**

$$c_0 g_0(z,m) + c_1 g_1(z,m) + \cdots + c_{n(\nu+1)-1}(z,m) = 0,$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$c_0 s_0(z,m) + c_1 s_1(z,m) + \cdots + c_{n(\nu+1)-1}(z,m) = 0$$

[..]ür jedes z **nur** dann bestehen können, wenn alle Coefficienten $c_0, \ldots, c_{n(\nu+1)-1}$ Null sind.

Aus **diesen** Sätzen wird durch Anwendung einer von Herrn Hurwitz **herrührenden** Schlussweise, indem in (2) $n = 3$, $\nu = 0$ gesetzt **wird, noch** das Resultat gewonnen:

Die **beständig** convergente Reihe

$$y = z^{2+\frac{c}{a}}(1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots),$$

welche ein **particuläres** Integral der Gleichung

$$azy''' = (bz + c) y'' + dy' + y$$

ist, besitzt die Eigenschaft, dass für keinen rationalen Wer z die Verhältnisse $y':y$ und $y'':y$ gleichzeitig rational sind.

Hr

A. HURWITZ: Ueber arithmetische Eigenschaften gew transcendenten Functionen. Math. Ann. XXXII. 583-5

Im Anschluss an die vorstehend besprochene Abhand des Herrn Ratner giebt Herr Hurwitz einen neuen höchst fachen Beweis des in der früheren Arbeit (Math. Ann. X 222, F. d. M. XV. 1883. 329) aufgestellten Satzes, dass jeden von Null verschiedenen rationalen Wert von z der W von $y':y$ irrational ist, wenn y die Reihe

$$y = 1+\frac{1}{b}z+\frac{1}{b(b+a)}\frac{z^2}{2!}+\frac{2}{b(b+a)(b+2a)}\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

bedeutet. Dieser Satz erscheint nun als ein ganz specieller F des folgenden allgemeinen Satzes: „Die beständig convergirer Reihe

$$y = c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

genüge folgenden Bedingungen: 1) Sie convergire so stark, da für jeden Wert von z der absolute Betrag von $k^n y^{(n)}$ mit wachse dem n unter jede Grenze sinkt, wenn k eine beliebig gross, ab fest gewählte Zahl bezeichnet. 2) Sie befriedige eine Differentia gleichung $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Gestalt:

$$\varphi y^{(r+1)} = \varphi_r y^{(r)}+\varphi_{r-1}y^{(r-1)}+\cdots+\varphi_0 y,$$

wo $\varphi, \varphi_r, \ldots, \varphi_0$ ganze ganzzahlige Functionen von z bedeuten Dann ist stets mindestens eines der Verhältnisse $y:y':\ldots:y^{(r)}$ irra tional, wenn z einen rationalen Wert erhält, für welchen φ nich verschwindet.“ Der Satz bleibt gültig, wenn man unter eine rationalen Zahl im erweiterten Sinne jede Zahl von der Form $\mu+\nu\sqrt{-m}$ versteht, wo μ, ν rationale Zahlen im gewöhnlichen Sinne sind und m eine beliebig, aber fest zu wählende positive ganze Zahl bedeutet. Als eine Folgerung aus dem angeführten Satze wird zum Schluss noch folgender Satz aufgestellt:

Die Reihe

$$y = 1+\frac{f(0)}{g(0)}z+\frac{f(0)f(1)}{g(0)g(1)}\frac{z^2}{1.2}+\frac{f(0)f(1)f(2)}{g(0)g(1)g(2)}\frac{z^3}{3!}+\cdots,$$

$f(x)$ und $g(x)$ zwei ganze ganzzahlige Functionen von den en resp. $< r$ und r sind, mit der Einschränkung, dass $= 0$ und $g(x) = 0$ nicht durch eine positive ganze Zahl Null befriedigt werden, besitzt die Eigenschaft, dass minns eines der Verhältnisse $y:y':\ldots:y^{(r)}$ irrational ist, wenn z von Null verschiedener rationaler Wert beigelegt wird.

Hr.

Vivanti. Sulle funzioni ad infiniti valori. Palermo Rend. II. 135-138, 150-151.

Poincaré. Sur une propriété des fonctions analytiques. Palermo Rend. II. 197-200.

Die Werte, welche eine unendlich vieldeutige Function für en bestimmten Wert der Veränderlichen annimmt, bilden eine nge, der im Sinne des Herrn G. Cantor eine gewisse „Mächtigt" zukommt. Diese Mächtigkeit nimmt Herr Vivanti als Einlungs-Grund für die vieldeutigen Functionen, welche demtsprechend in verschiedene Klassen zerfallen. Bilden jene nctionswerte eine Menge k^{ter} Mächtigkeit, so wird die Function r k^{ten} Klasse zugerechnet. Es besteht nun der Satz:

Eine analytische Function ist stets eine Function erster lasse; oder, was dasselbe besagt: Nimmt eine analytische unction für einen bestimmten Wert des Argumentes unendlich iele Werte an, so lassen sich dieselben eindeutig umkehrbar ler Reihe der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... zuordnen.

Herr Vivanti bemerkt, dass ihm dieses Theorem, dessen Existenz er vermutete, von Herrn G. Cantor mitgeteilt worden st. Der Beweis, welchen Herr Vivanti von diesem Theoreme giebt, ist indessen nicht einwurfsfrei, da derselbe die stillschweigende und durchaus nicht zutreffende Voraussetzung macht, dass zu jeder vieldeutigen analytischen Function eine Riemann'sche Fläche gehöre, deren Blätter in gewissen Punkten (Verzweigungspunkten) zusammenhängen.

Dagegen erscheint dem Referenten der Beweis, welchen Herr Poincaré von demselben Satze liefert, einwurfsfrei. Dieser Beweis beruht auf einem einfachen und unmittelbar einleuchten-

den Gedanken. Lässt man nämlich die Werte einer Fu in der Weise des Herrn Weierstrass, durch die Fortsetz einer Potenzreihe entstehen, so erhält man schon alle Wert Function, wenn man nur diejenigen Fortsetzungen betra deren Mittelpunkte rationale Coordinaten haben. Aus dem stande, dass diese Fortsetzungen eine abzählbare Mannigfi keit bilden, folgt dann leicht der zu beweisende Satz.

Hz.

V. Volterra. Sulle funzioni analitiche polidrome. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_2. 355-362.

Die Betrachtungen des Verfassers stimmen im wesentli mit denen der Herren Vivanti und Poincaré überein, über we das vorstehende Referat berichtet. Doch ist die Arbeit des fassers, welche sich durch Gründlichkeit auszeichnet, offen unabhängig von den Publicationen der Herren Vivanti und Poinc entstanden. Hz.

G. Vivanti. Nuove ricerche sulle funzioni intere. Batt. G. XXVI. 303-314.

Diese Note schliesst sich an frühere Arbeiten desselben V fassers an (vergl. F. d. M. XVII. 1885. 374, XIX. 1887. 39 Es handelt sich namentlich um Sätze, welche gewisse Beziehung zwischen einer transcendenten ganzen Function und ihrer A leitung aussprechen. Als Beispiel möge der folgende Satz diene „Wenn $f(z)$ eine einfache Function vom Geschlechte m ist, dere Nullstellen sämtlich reell sind, und welche für $z=0$ verschwinde wenn ferner p die ungerade unter den beiden Zahlen m un $m+1$ bezeichnet, so sind die Argumente der imaginären Nul stellen von $f'(z)$ sämtlich in den folgenden Intervallen ent halten:

$$(2\lambda-1)\frac{\pi}{p}\cdots 2\lambda\frac{\pi}{p};\ -(2\lambda-1)\frac{\pi}{p}\cdots -2\lambda\frac{\pi}{p}\left(\lambda=1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}\right).$$

Den Schluss der Note bilden einige ähnliche Sätze über Quo tienten ganzer Functionen. Wegen der Terminologie vergleiche man die oben citirten Referate. Hz.

Vivanti. Sulle funzioni definite da un' equazione lgebrico-differenziale del primo ordine. Annali di Mat. ? XVI. 117-136.

Der grösste Teil dieser Arbeit ist der Aufsuchung derjenigen onalen Functionen $w = R(z)$ gewidmet, welche einer gege-en algebraischen Differentialgleichung $f\left(\frac{dw}{dz}, w, z\right) = 0$ ge-;en können. Dabei werden drei Fälle unterschieden: f enthält entweder nur $\frac{dw}{dz}$, z; oder 2) nur $\frac{dw}{dz}$, w; oder 3) alle drei össen. Es zeigt sich, dass man in allen drei Fällen durch e endliche Anzahl rationaler Operationen jene Integrale $= R(z)$ bestimmen kann. Bei Behandlung des dritten Falles irden auch die Bedingungen dafür aufgestellt, dass der Diffe-ntialgleichung genügt wird durch eine algebraische Function nes transcendenten Abel'schen Integrals, oder durch eine unction $U(A(z))$, wo das Symbol U die inverse Function eines ranscendenten Abel'schen Integrals, und $A(z)$ eine algebraische unction bedeutet. Zum Schlusse werden einige Differential-leichungen betrachtet, welche auf Functionen mit mehr als zwei 'erioden führen, wie sie von Herrn Casorati (Acta Math. VIII, gl. F. d. M. XVIII. 1886. 353) untersucht worden sind.

Auf Seite 129 der Arbeit findet sich das offenbar unrichtige Theorem: Jede Differentialgleichung $\frac{dw}{dz} - f(w, z) = 0$, wo f eine ganze rationale Function ohne einen von z unabhängigen Factor ist, besitzt ein in der ganzen z-Ebene holomorphes Integral. P. G.

V. Volterra. Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari. Palermo Rend. II. 69-75.

In dieser Notiz werden die Anwendungen des Infinitesimal-kalküls auf Substitutionen mit veränderlichen Elementen (vergl. die beiden Abhandlungen des Verfassers: „Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari", Nap. Mem. (3) VI, und „Sulle equazioni differenziali lineari", Rom. Acc. L. Rend.

(4) III; F. d. M. XIX. 1887. 299 ff.) fortgesetzt. Die Ausdeh
des a. a. O. aufgestellten Integrationsbegriffs auf Substituti
deren Elemente Functionen einer complexen Veränderlichen
führt zu einem Analogon des Cauchy'schen Integralsatzes
zum Begriff des Residuums einer Substitution. Sodann we
Substitutionen betrachtet, deren Elemente eindeutige Functi
des Ortes auf einer Riemann'schen Fläche sind; die Integ
nach rechts oder links von diesen Substitutionen heissen li
Abel'sche oder rechts-Abel'sche Substitutionen. Ausser di
werden auch Substitutionen betrachtet, die sich ergeben, w
man eine rechts-Abel'sche Substitution mit einer links-Abel'sc
zusammensetzt, und solche, die entstehen, wenn man eine S
stitution mit eindeutigen Elementen vermittelst einer links-Ab
schen Substitution transformirt. Auf die Einzelheiten näher e
zugehen, ist hier nicht möglich; die Theorie der linearen Di
rentialgleichungen wird übrigens, wie wir bemerken wollen, ni
berührt. P. G.

V. Volterra. Sopra una estensione della teoria
Riemann sulle funzioni di variabili complesse. II, II
Rom. Acc. L. Rend. IV. 107-115, 196-202.

Fortsetzung und Schluss einer Arbeit, über deren Anfa
am geeigneten Orte (F. d. M. XIX. 1887. 414-415) referirt wo
den ist; dort werden alle Bezeichnungen erklärt, von welche
wir jetzt Gebrauch machen werden.

Der invariante Ausdruck $\delta M = D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz$ kan
von zweierlei Art sein; entweder nämlich existirt eine solch
Function $\frac{1}{\lambda}$, dass $\frac{1}{\lambda}\delta M$ ein exactes Differential ist, oder nicht

Erster Fall. $\delta M = \lambda d\mu$. Ist Φ_1 eine solche Linienfunction
dass:

$$D_1 \varpi_1 + D_2 \chi_1 + D_3 \varrho_1 = 0,$$

wo:

$$\varpi_1 = \frac{d\Phi_1}{d(yz)},\quad \chi_1 = \frac{d\Phi_1}{d(zx)},\quad \varrho_1 = \frac{d\Phi_1}{d(xy)},$$

ann man eine solche Function θ_1 angeben, dass:

$$\frac{d(\theta_1, \mu)}{d(y, z)} = \varpi_1, \quad \frac{d(\theta_1, \mu)}{d(z, x)} = \chi_1, \quad \frac{d(\theta_1, \mu)}{d(x, y)} = \varrho_1,$$

$$\frac{d(\theta_1, \mu)}{d(y, z)} = \frac{d\theta_1}{dy}\frac{d\mu}{dz} - \frac{d\theta_1}{dz}\frac{d\mu}{dy},$$

$$\frac{d(\theta_1, \mu)}{d(z, x)} = \cdots, \quad \frac{d(\theta_1, \mu)}{d(x, y)} = \cdots.$$

nun Φ_2 eine Function von derselben Beschaffenheit wie Φ_1, d setzt man:

$$H_{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{E_{22}\varrho_1\varrho_2 - E_{23}(\varrho_1\chi_2 + \varrho_2\chi_1) + E_{33}\chi_1\chi_2}{D_1^2},$$

$$\Theta_{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} \chi_2, & \varrho_2 \\ \chi_1, & \varrho_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_2}\begin{vmatrix} \varrho_2, & \varpi_2 \\ \varrho_1, & \varpi_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_3}\begin{vmatrix} \varpi_2, & \chi_2 \\ \varpi_1, & \chi_1 \end{vmatrix},$$

findet man folgende Gleichung, welche der Green'schen Gleichung analog ist:

$$(A) \quad \int_S \lambda H_{\Phi_1 \Phi_2} dS$$

$$= \int_\sigma \theta_2 \left\{ \frac{E_{12}\chi_1 - E_{13}\varrho_1}{D_1}\cos nx + \frac{E_{22}\chi_1 - E_{23}\varrho_1}{D_1}\cos ny + \frac{E_{32}\chi_1 - E_{33}\varrho_1}{D_1}\cos nz \right\} d\sigma$$

$$- \int_S \theta_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{E_{12}\chi_1 - E_{13}\varrho_1}{D_1}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E_{22}\chi_1 - E_{23}\varrho_1}{D_1}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{E_{32}\chi_1 - E_{33}\varrho_1}{D_1}\right] \right\} dS$$

$$= \int_\sigma \theta_1 \left\{ \frac{E_{12}\chi_2 - E_{13}\varrho_2}{D_1}\cos nx + \frac{E_{22}\chi_2 - E_{23}\varrho_2}{D_1}\cos ny + \frac{E_{32}\chi_2 - E_{33}\varrho_2}{D_1}\cos nz \right\} d\sigma$$

$$- \int_S \theta_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{E_{12}\chi_2 - E_{13}\varrho_2}{D_1}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E_{22}\chi_2 - E_{23}\varrho_2}{D_1}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{E_{32}\chi_2 - E_{33}\varrho_2}{D_1}\right] \right\} dS;$$

ferner:

$$\int_S \lambda\Theta_{\Phi_1\Phi_2} dS = \int_\sigma \theta_2(\varpi_1 \cos nx + \chi_1 \cos ny + \varrho_1 \cos nz) d\sigma = \int_\sigma \theta_2 \frac{d\theta_1}{d\sigma} d\sigma$$

$$= \int_\sigma \theta_1 (\varpi_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \varrho_2 \cos nz) d\sigma = \int_\sigma \theta_1 \frac{d\theta_2}{d\sigma} d\sigma.$$

Aus der Gleichung (A) ergiebt sich der folgende Satz:

Genügt die reelle Linienfunction Ψ den Bedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{E_{12}\frac{d\Psi}{d(xy)}-E_{13}\frac{d\Psi}{d(zx)}}{D_1}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E_{23}\frac{d\Psi}{d(yz)}-E_{21}\frac{d\Psi}{d(xy)}}{D_2}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{E_{31}\frac{d\Psi}{d(zx)}-E_{32}\frac{d\Psi}{d(yz)}}{D_3}\right]=$$

$$D_1\frac{d\Psi}{d(yz)}+D_2\frac{d\Psi}{d(zx)}+D_3\frac{d\Psi}{d(xy)}=0,$$

und sind ihre Werte für alle auf der Begrenzung σ des Berei[...] S liegenden Linien bekannt, so ist Ψ für jede geschloss[...] Linie des Bereiches S vollständig bestimmt. Der Bereich S [...] dabei die folgenden Bedingungen erfüllen: er liegt innerh[...] des Bereiches T, in welchem die Linienfunctionen überha[...] definirt sind, und kann von der Bewegung eines einfach [...] sammenhängenden Teiles der Fläche $\mu=$ const. erzeugt werd[...] ferner soll λ sein Vorzeichen innerhalb S nicht ändern. [...] folgt aus diesem Satze, dass eine mit F verbundene Linienfun[...] tion in einem Bereiche S vollständig bekannt ist, wenn der W[...] ihres reellen (oder imaginären) Bestandteils für jede auf d[...] Begrenzung von S liegende Linie gegeben ist.

Wenn $\Phi_1+i\Phi_2=\Phi$ eine mit F verbundene Linienfunctio[...] ist, so befriedigen beide zugehörige Functionen θ_1, θ_2 dieselb[...] Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{11}\frac{\partial\theta}{\partial x}+E_{12}\frac{\partial\theta}{dy}+E_{13}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{21}\frac{\partial\theta}{\partial x}+E_{22}\frac{\partial\theta}{\partial y}+E_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{31}\frac{\partial\theta}{\partial x}+E_{32}\frac{\partial\theta}{\partial y}+E_{33}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right]=0,$$

und auf einer beliebigen Fläche, deren Linienelement durch $\sqrt{Edu^2+2Fdu\,dv+Gdv^2}$ bezeichnet werden möge, ist:

$$\frac{d\Phi_1}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{d(\theta_1,\mu)}{d(u,v)},\quad \frac{d\Phi_2}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{d(\theta_2,\mu)}{d(u,v)}.$$

Steht t_i in derselben Beziehung zu F_i wie θ_i zu Φ_i, und bezeichnet G eine endliche, stetige und eindeutige Function ihrer

ente, so findet man:

$$\theta_1 + i\theta_2 = G(t_1 + it_2, \mu),$$

$$F|[L]| = \int_L (t_1 + it_2) d\mu, \quad \Phi|[L]| = \int_L (\theta_1 + i\theta_2) d\mu,$$

die Begrenzung von σ ist. Dadurch ist uns das Mittel en, Linienfunctionen zu bilden. Nimmt man nämlich drei he, stetige und eindeutige Functionen t_1, t_2, μ von x, y, z ler Art an, dass $\frac{d(t_1, t_2, \mu)}{d(x, y, z)} \gtrless 0$, und eine ebensolche Func- G von $\zeta = t_1 + it_2$, μ, ferner eine beliebige Linie L, so sind olgendermassen definirten Functionen F, Φ:

$$F \equiv F|[L]| = \int_L \zeta d\mu, \quad \Phi \equiv \Phi|[L]| = \int_L G d\mu$$

Riemann'schen Sinne mit einander verbunden.

Zweiter Fall. Setzt man:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{k}\left(E_{11}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{13}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + D_3\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{k}\left(E_{21}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{22}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{23}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + D_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - D_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)\right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{k}\left(E_{31}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{32}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{33}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + D_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - D_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)\right],
\end{aligned}$$

o k eine unbestimmte Function ist, und bestimmt man zwei unctionen φ_1, φ_2, welche die Bedingungen:

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1) = 0$$

rfüllen, was auf ein Problem der Variationsrechnung führt, so erden die Flächenableitungen $\frac{d\Phi_1}{d(yz)} = \varpi_1$, ... der unbekannten Functionen Φ_1, Φ_2 durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
E_{11}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} + E_{13}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} + D_3\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z} - D_2\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} &= k\varpi_\alpha, \\
E_{21}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} + E_{22}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} + E_{23}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} + D_3\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} - D_1\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z} &= k\chi_\alpha, \\
E_{31}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} + E_{32}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} + E_{33}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} + D_1\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} - D_2\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} &= k\varrho_\alpha
\end{aligned}$$

gegeben, wo erstens $\alpha = 1$, $\beta = 2$, dann $\alpha = 2$, $\beta = 1$ zu setzen ist.

Sind die Werte von φ_1, φ_2 auf der Begrenzung eines Bereiches S gegeben, so sind Φ_1 und Φ_2 in S vollständig bestimmt. Sind die Werte einer mit F verbundenen Linienfunction für jede auf der Begrenzung liegende Linie bekannt, so ist sie im ganzen Bereiche bestimmt.

Indem wir jetzt die Einteilung in zwei Fälle aufgeben, kommen wir auf die Theorie der Derivation und Integration der mit einander verbundenen Linienfunctionen. Wir werden immer die Linienfunctionen mit grossen, die gewöhnlichen (reellen oder complexen) Functionen der drei Variabeln x, y, z mit kleinen Buchstaben bezeichnen.

Eine Linienfunction F und eine Function f heissen mit einander verbunden, wenn:

$$\frac{dF}{d(yz)}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dF}{d(zx)}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dF}{d(xy)}\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ist f mit F, F mit Φ verbunden, so ist f mit Φ verbunden. Sind $f_1, f_2, \ldots, f_n$ mit einer und derselben Linienfunction F verbunden, so heissen sie mit einander verbunden; sie erfüllen die Gleichungen:

$$\text{(B)} \qquad \frac{d(f_i, f_r, f_s)}{d(x, y, z)} = 0 \qquad (i, r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Ist Φ mit f verbunden, so kann man eine solche Function φ angeben, dass:

$$\frac{d\Phi}{d(yz)} = \frac{d(f, \varphi)}{d(y, z)}, \quad \frac{d\Phi}{d(zx)} = \frac{d(f, \varphi)}{d(z, x)}, \quad \frac{d\Phi}{d(xy)} = \frac{d(f, \varphi)}{d(x, y)};$$

φ ist mit Φ und folglich mit f verbunden. Man sagt dann, dass Φ zu f, φ „conjugirt“ ist, und dass umgekehrt f und φ zu Φ conjugirt sind. Der Wert von Φ für irgend eine Linie L ist dann vermittelst f und φ durch die folgende Formel gegeben:

$$\Phi\,|[L]| = \int\limits_L \varphi\, df.$$

Sind F, Φ mit einander verbunden, und ist σ eine beliebige

. so ist:

$$\frac{\frac{d\Phi}{d\sigma}}{\frac{dF}{d\sigma}} = \frac{\varpi}{p} = \frac{\chi}{q} = \frac{\varrho}{r};$$

Verhältnis wird durch $\frac{d\Phi}{dF}$ dargestellt und als die „Ab-ng von Φ nach F" bezeichnet. Diese Ableitung ist eine ge-liche Function, welche mit Φ und F verbunden ist.

Ist σ eine geschlossene Fläche, innerhalb welcher die mit ıder verbundenen Functionen f und F keine Singularität n, so ist:

$$\int_\sigma f dF = 0.$$

Gleichung, welche die Verallgemeinerung des Cauchy'schen tes bildet, kann auf eine andere Form gebracht werden. Es en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ mit einander verbundene Functionen, und sei Φ_{is} φ_i und φ_s conjugirt. Ist dann u, v ein Coordinatensystem f σ, und setzt man $\frac{\partial}{\partial u} du = d$, $\frac{\partial}{\partial v} dv = \delta$, so ist die ange-utete Form:

$$\int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} d\varphi_i, & d\varphi_s \\ \delta\varphi_i, & \delta\varphi_s \end{vmatrix} = 0.$$

ie von Morera (Un teorema fondamentale nella teorica delle inzioni di una variabile complessa, Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 4-307; F. d. M. XVIII. 1886. 338) gefundene Umkehrung des Cauchy'schen Satzes kann gleichfalls auf unsere Functionen aus-edehnt werden.

Es folgt aus dem Cauchy'schen Satze, dass, wenn L_0 eine constante Linie darstellt, $\int_{L_0}^{L} f dF$ eine Function $\Phi\,|\,[L]\,|$ der Linie L ist, welche mit F verbunden ist. Man hat ferner $\frac{d\Phi}{dF} = f$, dass Integration und Derivation sich gegenseitig aufheben. Ist F zu f, φ conjugirt, so ist:

$$F\,|\,[L_1]\,| - F\,|\,[L_0]\,| = \int_{L_0}^{L_1} \begin{vmatrix} df & d\varphi \\ \delta f & \delta\varphi \end{vmatrix}.$$

Die besprochenen Untersuchungen stehen in enger Beziehung zu der Theorie der Functionen von zwei Variabeln. Sind nämlich ξ, η, ζ drei mit einander verbundene Functionen, so folgt aus (B), dass zwischen denselben eine Relation $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ oder $\zeta = g(\xi, \eta)$ stattfinden muss; ist umgekehrt ζ eine Function von ξ, η, so dürfen ξ, η, ζ als drei im Riemann'schen Sinne mit einander verbundene Functionen angesehen werden.

Die Ausdehnung des Cauchy'schen Satzes auf Functionen von zwei Variabeln wurde von Poincaré (Sur les résidus des intégrales doubles, Acta Math. IX. 321-380; F. d. M. XIX. 1887. 275-277) gegeben. Vi.

F. Casorati. Sopra le coupures del sig. Hermite, i Querschnitte e le superficie di Riemann, ed i concetti d'integrazione sì reale che complessa. Annali di Mat. (2) XVI. 1-20.

Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung des 1887 unter demselben Titel erschienenen ersten Teiles (cf. F. d. M. XIX. 392); den Hauptpunkt bildet die Aufsuchung aller Zweige einer Function

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t} f(t, z)\, dt$$

und die Ausbreitung derselben in ihrer Gesamtheit auf eine Riemann'sche Fläche. Der Verfasser unterscheidet drei Fälle, von denen jedoch die zwei letzten einer späteren Abhandlung vorbehalten bleiben:

1) $f(t, z)$ ist eine rationale Function $\frac{F(t, z)}{G(t, z)}$ in t und z;

2) f ist eine irrationale Function oder die Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten in t und z;

3) f stellt bestimmte transcendente Functionen vor.

Es wird zuerst an dem einfachsten Falle von 1):

$$f(t, z) = \frac{1}{At + Bz + C},$$

gezeigt, dass $\Phi(z)$ für jeden Wert von z unendlich vieldeutig ist, indem es den Wert

$$\Phi(z) = m\frac{2\pi i}{A} + \Phi_0(z)$$

annimmt, wo $\Phi_0(z)$ den Wert des Integrales längs eines von t_0 nach t führenden Weges l bedeutet und m alle möglichen ganzen Zahlen durchläuft. Lässt man dann z variiren, so ändert sich $\Phi_0(z)$, und man erhält somit unendlich viele Zweige der Functionen, von denen jeder eindeutig aber discontinuirlich längs jener Linie der Ebene z ist, welche der Linie l der Ebene t, gemäss der Gleichung $At + Bz + C = 0$, entspricht. Verändert l seine Gestalt, so tritt das Entsprechende bei der Discontinuitätslinie ein, so dass die Gestalt derselben durch

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{At + Bz + C}$$

keineswegs bestimmt ist. Der Autor zeigt nun, wie man die so gefundenen Zweige auf einer einzigen unendlich-blätterigen Riemann'schen Fläche anordnen kann, die über der z-Ebene ausgebreitet wird, und deren Blätter längs gewissen Uebergangslinien zusammenhängen, die der Linie l in der Ebene t entsprechen und deren Enden durch die Werte t_0 und t_1 bestimmt sind. Diese Endpunkte sind logarithmische Verzweigungspunkte, welche alle Blätter gemeinsam haben.

In der gleichen Weise wird dann der Fall behandelt, wo $f(t, z)$ eine beliebige gebrochene rationale Function darstellt, welche ν Unendlichkeitspunkte besitzt. Partialbruchzerlegung und Integration liefern analog dem Vorhergehenden für $\Phi(z)$ den Ausdruck:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \pi i \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \frac{F(t_\alpha, z)}{G'(t_\alpha, z)} m_\alpha.$$

Giebt man nun für ν specielle ganze Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$ an, bildet daraus alle $\nu!$ Permutationen und führt diese an Stelle der m_α ein, so erhält man die $\nu!$ Zweige der Function. $\Phi(z) - \Phi_0(z) = u$ ist dann eine algebraische Function mit $\nu!$ Zweigen, welche einer

Gleichung genügt, die durch das Product:

$$\Pi\left(u-2\pi i\sum_{1}^{\nu} h_a \frac{F(t_a, z)}{G'(t_a, z)}\right)=0$$

dargestellt wird.

Breitet man jetzt auf der Ebene z eine Riemann'sche Fläche aus, die diese algebraische Gleichung darstellt, so wird jeder Punkt derselben eines der Wertepaare (u, z) tragen, welches jener Gleichung genügt. Fügt man in jedem Punkte dem Werte u jenen von Φ_0 hinzu, so stellt diese Fläche $R(h_1, h_2, \ldots, h_\nu)$ die $\nu!$ Zweige der Function Φ dar. Auf solche Weise kann man alle unendlich vielen Flächen $R(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$ über der Ebene z ausbreiten, und die so erhaltene Gesamtfläche repräsentirt dann die Function vollständig. An die Stelle der Schnitte (coupures) treten auch hier wieder die Uebergangslinien von einem Blatte der einen R zu einem Blatte der anderen R. Die Endpunkte dieser Uebergangslinien sind den unendlich vielen Blättern gemeinsam, jeder repräsentirt aber hier $\nu!$ Verzweigungspunkte.

Bm.

P. Painlevé. Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. Toulouse Ann. II. 130 S.

Bei der Untersuchung einer irgendwie definirten analytischen Function ist es die erste und hauptsächlichste Aufgabe, den Definitionsbereich der Function festzustellen, mit welcher Aufgabe zugleich die Entscheidung darüber zusammenhängt, ob man es mit einer eindeutigen oder vieldeutigen Function zu thun hat, und — in letzterem Falle — von welcher Art die Vieldeutigkeit der Function ist. Die hiermit charakterisirten Fragen sind es, um welche es sich in dem ersten Teile der vorliegenden inhaltreichen und gründlichen Arbeit handelt. Der Verfasser untersucht insbesondere, wann eine Function, welche zunächst nur auf einer Seite einer Linie AB definirt ist, durch diese Linie hindurch auf die andere Seite analytisch fortgesetzt werden kann. Ist diese Fortsetzung möglich, so heisst AB ein „künstlicher", im entgegengesetzten Falle ein „wesentlicher" Schnitt (coupure).

Der Verfasser entwickelt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, ob eine Linie ein künstlicher oder ein wesentlicher Schnitt ist. Wenn die Linie eine analytische ist, so gewinnt jene Bedingung eine einfache, schon von Herrn H. A. Schwarz aufgestellte Form. Von den erhaltenen Resultaten macht der Verfasser sodann eine Reihe interessanter Anwendungen, insbesondere auf die Bestimmung derjenigen Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dz} = f(z,u),$$

deren rechte Seite eine eindeutige Function von z und u und deren allgemeines Integral u eine eindeutige Function von z ist. Es ergiebt sich, dass diese Differentialgleichungen Riccati'sche Gleichungen, d. h. von der Form

$$\frac{du}{dz} = au^2 + bu + c$$

sind, wo a, b, c eindeutige Functionen von z bedeuten.

Beispiele von verschiedenen Arten wesentlicher Schnitte machen den Schluss des ersten Teiles der Abhandlung.

In dem zweiten Teile handelt es sich um die Darstellung der eindeutigen Functionen mit beliebigen Singularitäten durch Summen und Producte in der Weise, dass die einzelnen Singularitäten sich auf die einzelnen Glieder der Darstellungsform verteilen. Die hiermit bezeichnete Aufgabe wurde bekanntlich in den einfachsten Fällen zuerst in dem klassischen Aufsatz von Weierstrass über die eindeutigen Functionen erledigt und später von Mittag-Leffler in Acta Math. IV. (F. d. M. XVI. 1884. 351) zu einem gewissen Abschluss gebracht. Der Verfasser leitet die Resultate des letztgenannten Autors auf neuem Wege ab und knüpft daran eine Reihe von Sätzen, unter anderen über die doppelt-periodischen Functionen mit beliebigen Singularitäten. Die in der Abhandlung entwickelten Resultate werden zum Teil auch ausgedehnt auf die Functionen V von zwei oder drei Variabeln, welche der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügen. Hz.

C. ARZELÀ. Sulla teoria delle funzioni analitiche. Bologna Rend. 1887-88. 25-37.

Ein bekannter, von Weierstrass (Zur Functionenlehre, Berl. Ber. 1880, wiederabgedruckt in den „Abhandlungen aus der Functionenlehre")herrührenderSatz sagt aus, dass, wenn die Summe $\sum_r P_r(z)$ von unendlich vielen Potenzreihen auf jeder um den Nullpunkt gezogenen, in einem bestimmten Kreisringe liegenden Kreislinie gleichmässig convergirt, sie eine monogene analytische Function darstellt. Diese Bedingung ist aber nicht notwendig (vgl. Runge, Zur Theorie der analytischen Functionen, Acta Math. VI. 245-8; F. d. M. XVII. 1885. 378-9); und die Aufsuchung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $\sum_r P_r(z)$ eine monogene analytische Function darstellt, bildet den Zweck der vorliegenden Note. Dazu müssen die folgenden wichtigen Hülfssätze vorausgeschickt werden.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Summe von unendlich vielen, in einem zusammenhängenden Gebiete C endlichen und stetigen Functionen zweier reellen Variabeln $\nu_r(x,y)$ eine ebensolche Function sei, ist, dass für jede beliebig kleine Grösse σ und für jede ganze Zahl m eine solche ganze Zahl $m' > m$ existirt, dass $\left|\sum_{n+1}^{\infty} \nu_r(x,y)\right| < \sigma$ für eine zwischen m und m' enthaltene Zahl n, wo n für verschiedene Punkte von C verschieden sein kann. Betrachtet man x, y, n als die Coordinaten der Punkte des Raumes, so kann diese Bedingung folgendermassen ausgesprochen werden: Es muss zu jedem σ und zu jedem m eine endliche Menge von ganzen Zahlen $p_1, \dots, p_t$ derart geben, dass auf t bezw. in den Ebenen

$$n = m + p_1, \dots, n = m + p_t$$

liegenden, zusammen genommen das Gebiet C deckenden Teilgebieten überall $\left|\sum_{n+1}^{\infty} \nu_r(x,y)\right| < \sigma$ ist. — Man kann dann sagen, dass die Reihe $\sum_r \nu_r(x,y)$ die „schichtenweise gleichmässige Convergenz" (convergenza uniforme a strati) besitzt.

Ist $y_1, y_2, y_3, \ldots$ eine Grössenmenge mit dem Grenzwerte y_0, und stellt $f(x, y)$ eine im Intervalle ab für jeden Wert $y_s (s = 1, 2, \ldots)$ von y bekannte Function dar, so ist, wenn:

$$\lim_{y_s = y_0} f(x, y_s) = f(x, y_0), \quad \lim_{y_s = y_0} f'_x(x, y_s) = \varphi(x, y_0)$$

gesetzt wird, $\varphi(x, y_0)$ dann und nur dann die Ableitung von $f(x, y_0)$, wenn $f'_x(x, y_0)$ nach $\varphi(x, y_0)$ streckenweise gleichmässig convergirt. — Man sagt, nach einer früheren Arbeit des Herrn Verfassers (Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue di una variabile reale, Bologna Rend. 1884), dass $F(x, y_s)$ nach $F(x, y_0)$ „streckenweise" (a tratti) gleichmässig convergirt, wenn für jedes σ und für jedes $s > 0$ eine solche positive Grösse δ existirt, dass im Intervalle $(x - \delta, x + \delta)$

$$| F(x, y_s) - F(x, y_t) | < \sigma$$

ist, wo y_t zwischen y_s und y_0 liegt und t mit x variiren kann; diese Art von Convergenz bildet die notwendige und hinreichende Bedingung für die Endlichkeit und Stetigkeit der Function $F(x, y_0)$. Setzt man:

$$y_s = s, \quad y_0 = \infty, \quad F(x, y_s) = F(x, s) = \sum_{r=1}^{s} \nu_r(x),$$

so ist ersichtlich, wie der Begriff der streckenweise gleichmässigen Convergenz auf eine Reihe zu übertragen ist. Es ist auch leicht zu sehen, dass, wenn die Reihe $\sum_r \nu_r(x, y)$ die schichtenweise gleichmässige Convergenz besitzt, sie für jeden besonderen Wert von y streckenweise gleichmässig convergirt.

Aus diesen beiden vorhergehenden Sätzen ergiebt sich, dass:

$$s = \sum_r \nu_r(x, y), \quad s_1 = \sum_r \frac{\partial \nu_r(x, y)}{\partial x}, \quad s_2 = \sum_r \frac{\partial \nu_r(x, y)}{\partial y}$$

dann und nur dann endliche und stetige Functionen sind, wenn sie die schichtenweise gleichmässige Convergenz besitzen; und dass in diesem Falle

$$s_1 = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad s_2 = \frac{\partial s}{\partial y}$$

ist. — Setzt man endlich $\nu_r(x, y) = \nu_r(x + iy)$, und ist

$$\frac{\partial \nu_r}{\partial y} = i \frac{\partial \nu_r}{\partial x},$$

so folgt $s_2 = is_1$, und es ergiebt sich nach bekannten Sätzen der Functionentheorie das folgende Theorem, welches die gesuchte Bedingung liefert:

„Die Summe von unendlich vielen in einem Gebiete C existirenden monogenen Functionen stellt dann und nur dann eine monogene Function dar, wenn diese Summe und die Summe der Ableitungen ihrer Glieder die schichtenweise gleichmässige Convergenz besitzen. Vi.

R. Bettazzi. Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali. Pisa Ann. V. 3-47.

Durch Untersuchungen, welche eine Ausdehnung der von Herrn Dini in seinem Werke: Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale (Pisa, Nistri, 1880) angewandten Methoden bilden, kommt der Verfasser zu folgendem Ergebnisse:

Für jede willkürlich gegebene Function von n reellen Variabeln, welche in einem n-dimensionalen Gebiete C endlich und stetig ist, giebt es unendlich viele analytische Ausdrücke, welche diese Function in jedem Punkte von C, die Begrenzung etwa ausgenommen, darstellen. Vi.

C. Somigliana. Sopra alcune rappresentazioni delle funzioni per integrali definiti. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 431-446.

Ist s die Begrenzung eines Bereiches C, innerhalb dessen eine Function w und ihre Ableitungen der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \dots, (n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung eindeutig, endlich und stetig sind, und bedeutet p eine ganze nicht negative Zahl, z^1 einen inneren Punkt des Bereiches C, so ist das Integral:

$$\int\limits_s \frac{d^n w}{dz^n}(z-z^1)^p \lg(z-z^1)\,dz$$

unendlich vieldeutig; erteilt man aber dem Argumente von $z-z^1$ solche Werte, die eine stetige Function des Bogens s bilden, mit alleiniger Ausnahme eines Punktes z_0 der Begrenzung, wo eine

Unstetigkeit von 2π stattfindet, so wird das obige Integral bei festgehaltenem z_0 eine eindeutige Function von z^1, und wird durch

$$\int\limits_{(s,z_0)} \frac{d^n w}{dz^n}(z-z^1)^p \lg(z-z^1)dz$$

bezeichnet. Die Anwendung des Cauchy'schen Satzes auf den längs einer beliebigen Linie $z^1 z_0$ durchschnittenen Bereich C giebt:

$$\int\limits_{(s,z_0)} \frac{d^n w}{dz^n}(z-z^1)^p \lg(z-z^1)dz + 2\pi i \int_{z_0}^{z^1} \frac{d^n w}{dz^n}(z-z^1)dz = 0,$$

wo die letzte Integration längs des Querschnittes geschehen soll. Hieraus ergiebt sich der folgende Ausdruck für $w(z^1)$:

$$w(z^1) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,2\pi i}\int\limits_{(s,z_0)} \frac{d^n w}{dz^n}(z-z^1)^{n-1}\lg(z-z^1)dz$$
$$+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^{s+n-1}}{(n-s-1)!}\frac{d^{n-s-1}w}{dz_0^{\,n-s-1}}(z_0-z^1)^{n-s-1}.$$

Es ist eine sehr wichtige Thatsache, dass diese Formel selbst dann gilt, wenn z^1 auf der Begrenzung liegt.

Aus den angegebenen Formeln folgt ein merkwürdiger Integralausdruck für die Functionen einer reellen Variabeln. Ist u eine Function der zwei reellen Veränderlichen x, y, welche sich in einem Bereiche C regulär verhält, so bilden die Werte von u auf der Begrenzung von C eine Function einer reellen Variabeln, nämlich der Bogenlänge s, welche für irgend einen Wert s^1 von s durch die Formel:

$$u(s^1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{s}\left(u\frac{\partial \lg\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\lg\frac{1}{r}\right)ds$$

ausgedrückt wird. Hier bedeutet r den Abstand des betrachteten Punktes von einem beliebigen, aber festen Punkte der Begrenzung, und die Integration erstreckt sich über die ganze Begrenzung.

Ist C eine Kreisfläche mit dem Radius 1, und bedeutet α^1 das Argument irgend eines Punktes der Begrenzung, so findet

die Gleichung statt:

$$u(\alpha^1) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{d\alpha^1}J + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\alpha)d\alpha,$$

wo J gesetzt ist für:

$$\int_0^{2\pi}\left\{d\alpha \lg(1-\cos(\alpha-\alpha^1))\frac{d}{d\alpha}\int_0^{2\pi}\lg(1-\cos(\alpha_1-\alpha))\,u(\alpha_1)d\alpha_1\right\}.$$

Hier kann man natürlich von der Darstellung auf der xy-Ebene abstrahiren; dann giebt die obige Formel einen Integralausdruck für eine Function $u(\alpha)$ der reellen Variabeln α, welche im Intervalle $0\dots 2\pi$ endlich und stetig ist und der Relation $u(0) = u(2\pi)$ genügt. Die Formel kann leicht verallgemeinert werden wie folgt:

Ist $u(x)$ eine reelle Function der reellen Variabeln x, welche im Intervalle $a\dots b$ endlich und stetig ist, und setzt man:

$$U(x) = u(x) + \frac{u(a)-u(b)}{a-b}x,$$

so ist:

$$U(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{dx}J' + \frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dx,$$

wo J' gesetzt ist für:

$$\int_a^b\left\{dy \lg\left(1-\cos\frac{2\pi}{b-a}(y-x)\right)\frac{d}{dy}\int_a^b \log\left(1-\cos\frac{2\pi}{b-a}(z-y)\right)u(z)dz\right\}.$$

Der Druck dieser Note ist nichts weniger als correct; wir haben die hier angeführten Formeln berichtigt. Vi.

P. du Bois-Reymond. Théorie générale des fonctions, traduite par G. Milhaud et A. Girot. Partie I: Métaphysique et théorie des concepts mathématiques fondamentaux, grandeur, limite, argument et fonction. Paris. 223 S. 8°.

J. Puzyna. Ueber die sogenannten Condensationspunkte und ihre Anwendung in der Analysis. Lemberg. „Muzeum". IV. 33, 177. (Polnisch.)

Darstellung einiger Fundamentalsätze der Functionentheorie von Weierstrass mittels der Theorie der Grenzpunkte einer gegebenen Punktmannigfaltigkeit. Dn.

J. PUZYNA. Aus der Analysis. Lemberg. „Muzeum". IV. 531-536. (Polnisch.)

Lösung der functionentheoretischen Aufgabe: In einer Ebene sind gegeben zwei Hyperbeln

$$y=\frac{x}{x-1},\quad y=\frac{1}{x-1};$$

man bestimme eine solche Function $y=f(x)$, die im Bereiche $(-1\cdots+1)$ die erste und im Bereiche $(-1\cdots+\infty\cdots+1)$ die zweite Hyperbel darstellt. Dn.

S. PINCHERLE. Sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes. C. R. CVII. 986-989.

Der Verfasser betrachtet die Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{m} R_k(x,y).\frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}=0,$$

deren Coefficienten $R_k(x,y)$ Polynome vom Grade k in y, vom Grade p in dem Parameter x sind. Ueberdies wird vorausgesetzt, dass für jeden Wert von x die Gleichung $R_m(x,0)=1$ gilt. Wenn man nun

$$p_0=1,\ p_1=p_2=\ldots=p_{m-1}=0$$

setzt und verlangt, dass

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty} p_n y^n$$

die Differentialgleichung befriedigt, so ergeben sich

$$p_m,\ p_{m+1},\ p_{m+2},\ \ldots$$

als ganze Functionen von x. Um irgend eine analytische Function nach irgend welchen Functionen zu entwickeln, genügt es nach bekannten Principien, die Entwickelung von $\frac{1}{z-x}$ aufzustellen. Dieses führt der Verfasser für die Functionen $p_m, p_{m+1},\ldots$ aus, lässt aber die Frage nach der Convergenz der von ihm erhaltenen Entwickelungen offen, indem er bemerkt, dass er sich später mit dieser Frage beschäftigen will. Die bekannten Entwickelungen nach Kugelfunctionen etc. sind in der allgemeinen vom Verfasser aufgestellten Formel enthalten. Hz.

M. Lerch. Ueber Functionen mit beschränktem Existenzbereiche. Prag. Abh. (7) II. 20 S.

Dieser Aufsatz enthält eine Reihe von Theoremen, mit deren Hülfe es leicht ist, beliebig viele und verhältnismässig einfache Functionen mit natürlichen Grenzen zu bilden. Der erste Satz, welchen der Verfasser beweist, ist eine Verallgemeinerung von Sätzen der Herren Goursat und Poincaré und lautet: „Ist x_0 keine Häufungsstelle der Punktmenge $a_0, a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$, und ist $|a_a - x_0|$ die kleinste der Grössen $|a_\nu - x_0|$, und bedeuten $c_0, c_1, c_2, \dots, c_\nu, \dots$ Glieder einer absolut convergenten Reihe, so lässt sich die Function

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - a_\nu)^m$$

in eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (x - x_0)^k$ entwickeln, welche die Grösse $|a_a - x_0|$ zum wahren Convergenzradius hat, vorausgesetzt, dass m keine positive ganze Zahl ist."

Als eine Anwendung dieses Satzes giebt der Verfasser das folgende Beispiel einer Function, welche nur im Innern des Einheitskreises existirt:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{m}{\nu} \mathfrak{P}(a^\nu) . x^\nu .$$

Hier bedeutet $\mathfrak{P}(z)$ eine noch für $z = 1$ unbedingt convergirende Potenzreihe, a eine complexe Grösse mit dem absoluten Betrage Eins, die jedoch keine Einheitswurzel ist, endlich m eine beliebige Constante, welche keine positive ganze Zahl ist.

Nach einigen Bemerkungen über weitere specielle Beispiele wendet sich der Verfasser zum Beweise eines zweiten allgemeineren Theorems, welches er folgendermassen ausspricht:

„Es seien $m_0, m_1, m_2, \dots, m_\nu, \dots$ positive ganze Zahlen, von denen jede einzelne in allen folgenden als Teiler aufgeht, und es bedeuten $\mathfrak{P}_0(x), \mathfrak{P}_1(x), \mathfrak{P}_2(x), \dots$ analytische Functionen, welche sich im Einheitskreise regulär verhalten und auf der Peripherie desselben höchstens eine Unendlichkeitsstelle $x = 1$

besitzen und so beschaffen sind, dass die Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x^{m_\nu})$$

für alle inneren Stellen des Einheitskreises convergirt und sich in eine für alle $|x| < 1$ convergirende Potenzreihe umwandeln lässt; ist ausserdem für unendlich viele Zahlen n bei positiven reellen $|x| < 1$

$$\lim_{x=1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x^{m_\nu}) = \infty:$$

dann existirt die Function $f(x)$ nur innerhalb des Einheitskreises $|x| = 1$." Von zahlreichen speciellen Fällen, welche der Verfasser anführt und zum Teil schon in früheren Publicationen gegeben hat (F. d. M. XIX. 1887. 228), mögen hier nur die beiden einfachsten Erwähnung finden. Dieselben führen zu dem Satze, dass die Functionen $\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{2^\nu}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu!}$ nur im Einheitskreise existiren. Der Verfasser giebt sodann einen Satz über unendliche Producte, aus welchem z. B. folgt, dass die Function $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+x^{\nu!})$ nur im Innern des Einheitskreises existirt. Endlich beweist der Verfasser noch den folgenden allgemeinen Satz:

„Ist $f(x)$ eine durch eine für alle $|x| < 1$ convergirende und für alle $|x| > 1$ divergirende Potenzreihe darstellbare Function, welche einem Transformationsgesetze von der Form $f(x^a) = G(x, f(x))$ gehorcht, unter a eine bestimmte positive ganze Zahl und unter $G(x, z)$ eine rationale oder transcendente ganze Function von x und z verstanden, so existirt die Function $f(x)$ nur innerhalb des Einheitskreises."

Als Beispiel dient die oben erwähnte Function $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{2^\nu}$, welche dem Gesetze

$$f(x^2) = f(x) - x$$

gehorcht. Hz.

X. Stouff. Sur la transformation des fonctions fuchsiennes. Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. 219-326.

Der reichhaltige und sehr ins Detail gehende Stoff dieser Arbeit nötigt uns, auf eine gedrängte Inhaltsangabe uns zu beschränken. Auf den Abhandlungen von Poincaré (Acta Math. I u. IV.) aufgebaut, zerfällt die Arbeit in zwei Teile; der erste Teil beschäftigt sich mit der Theorie der Untergruppen, der zweite Teil enthält allgemeine Theoreme, weche ihn mit dem Vorhergehenden verbinden, und giebt Anwendungen der erläuterten Theorie auf das Geschlecht 2 und 3.

Setzt man voraus, es bestehe zwischen zwei Riemann'schen Flächen $f(x, y) = 0$, $g(x', y') = 0$ eine algebraische Correspondenz, vermöge welcher m Punkte von g einem Punkte von f und n Punkte von f einem Punkte von g entsprechen, lassen sich ferner x, y; x', y' durch Fuchs'sche Functionen einer Veränderlichen z ausdrücken, und erleidet z eine lineare Substitution, sei es, dass der Punkt x, y auf f oder der Punkt x', y' auf g eine feste Curve beschreibt, so bildet die Gesamtheit der Substitutionen, die zugleich x, y ungeändert lassen, eine Gruppe H, und die Gesamtheit der Substitutionen, die x', y' nicht ändern, eine Gruppe K. Es lässt sich dann immer ein Polygon bestimmen, welches eine Fuchs'sche Gruppe M erzeugt, die gleichzeitig in H und in K enthalten ist. Sind dann ξ und η zwei Fundamentalfunctionen der Gruppe M, zwischen denen die Relation $\varphi(\xi, \eta) = 0$ besteht, so entspricht einem Punkte (ξ, η) ein einziger Punkt (x, y) und ein Punkt (x', y'), aber einem Punkte (x, y) entsprechen m und einem Punkte (x', y') n Punkte (ξ, η). Dadurch ist die Correspondenz zwischen den zwei Riemann'schen Flächen auf die zwei einfacheren zwischen f und φ und g und φ zurückgeführt. Diese Betrachtungen geben die Lösung folgender zwei Probleme.

1) Die Untergruppen einer Fuchs'schen Gruppe zu bestimmen. Man erhält die erzeugenden Polygone der Untergruppen, indem man mehrere Polygone des Büschels der primitiven Gruppe vereinigt und die freibleibenden Seiten passend verbindet.

2) Festzustellen, für welche Permutationswerte eine Fuchs'sche Gruppe G, die von einem Parameter abhängt, in einer anderen Gruppe Γ enthalten ist (§ II). Der allgemeinen Lösung dieser Probleme folgt in § III eine Reihe passend gewählter

Beispiele, in welchen sowohl der specielle Fall, dass eine Gruppe G in einer anderen enthalten ist, behandelt wird, als auch gewisse continuirliche Gruppen bestimmt werden, die in einer gegebenen Gruppe enthalten sind. Hieran schliesst sich in § IV die Bestimmung der ausgezeichneten Untergruppen; es wird zuerst das Theorem bewiesen: „Jeder mit der Gruppe G einer Fuchs'schen Gleichung vertauschbaren Substitution entspricht eine eindeutige Transformation der Fuchs'schen Gleichung (Riemann'schen Fläche) in sich selbst und umgekehrt." Dann werden die eindeutigen Transformationen der Riemann'schen Fläche in sich selbst mit der verallgemeinerten Euler'schen Formel aufgesucht, indem der specielle Fall $p = 3$ eingehend behandelt wird. Einige specielle Untersuchungen und Theoreme über hyperelliptische Flächen vom Geschlechte $p = 3$ beschliessen diesen Paragraphen, während der nächste Paragraph die symmetrischen Gruppen mit der besonderen Anwendung auf Curven vom Geschlechte 3 und auf hyperelliptische Relationen umfasst.

Der zweite Teil der Arbeit beginnt in § VI mit den äquivalenten Polygonen. Man nennt zwei Polygone äquivalent, wenn sie derselben Fuchs'schen Gruppe entsprechen, und zwar heissen sie eigentlich äquivalent, wenn sie in derselben Weise zusammengesetzt und bezeichnet sind, im anderen Falle uneigentlich äquivalent. Diese Definitionen geben zu einer Reihe von wichtigen Theoremen Anlass, die zum Teile wieder speciell auf die hyperelliptischen Polygone angewandt werden, während die §§ VII und VIII umfassende Anwendungen der vorangehenden Lehren auf das Geschlecht 2 und 3 enthalten. Bm.

H. Stahl. Ueber die Darstellung der eindeutigen Functionen, die sich durch lineare Substitutionen reproduciren, durch unendliche Producte. Math. Ann. XXXIII. 291-310.

Poincaré hat die von ihm als Fuchs'sche und Theta-Fuchs'sche Functionen bezeichneten Transcendenten durch unendliche Summen dargestellt. Der Verfasser stellt sich nun die Aufgabe,

dieselben Transcendenten durch unendliche Producte auszudrücken, eine Aufgabe, welche in einem speciellen Falle schon Herr von Mangoldt erledigt hat. Grösserer Einfachheit halber schliesst der Verfasser den Fall aus, wo von den Ecken des Fundamentalpolygons einige oder alle auf den Hauptkreis fallen. Die Untersuchung erfordert dann ferner, zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle existiren die Functionen nur im Hauptkreise, im zweiten Falle dagegen in der ganzen Ebene. Der Grundgedanke ist jedoch in beiden Fällen derselbe und zwar der folgende. Die Fuchs'schen Functionen einer Gruppe sind rationale Functionen von zweien x, y unter ihnen, zwischen welchen eine algebraische Gleichung von bestimmtem Geschlecht besteht. Nun lässt sich der Logarithmus einer rationalen Function von x und y als eine Summe von Abel'schen Integralen dritter Gattung darstellen. Ferner sind die Integranden dieser Integrale nach Poincaré's Methoden durch unendliche Summen ausdrückbar. Indem der Verfasser diese Ausdrücke einsetzt, die Integration sodann ausführt und schliesslich von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht, gewinnt er die verlangte Darstellung durch ein unendliches Product. Der Verfasser macht in der Einleitung zu seinem Aufsatze darauf aufmerksam, dass durch seine Untersuchungen „noch keineswegs die eigentliche fundamentale Aufgabe gelöst ist, die Aufgabe nämlich, nach Analogie der σ-Function, erstens ein unendliches Product herzustellen, das im Gebiete der „Fuchs'schen Functionen“ convergirt und dessen Nullpunkte aus einem derselben durch die Substitutionen der zugehörigen Gruppe hervorgehen, und zweitens das Gesetz der Reproduction dieses Products bei Anwendung der Substitutionen der Gruppe anzugeben.“ Hz.

L. Bianchi. Sulle superficie Fuchsiane. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_2. 161-165.

Das hier behandelte Problem kann folgendermassen ausgedrückt werden: Wenn im Raume ein geschlossenes Gebiet C gegeben ist, und $z = z(x, y)$ eine Integralfläche der Differential-

gleichung

$$(1) \qquad (1-q^2)r+2pqs+(1-p^2)t = 0$$

bedeutet, denjenigen Teil derselben zu bestimmen, welcher durch C begrenzt wird und in seinem Innern keine singulären Punkte besitzt. Die Aufgabe ist die analoge zu jener von Plateau für die gewöhnlichen Minimalflächen gestellten, die durch die Differentialgleichung

$$(2) \qquad (1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t = 0$$

charakterisirt sind. Die Möglichkeit der Behandlung des Problems beruht darauf, dass, wie jedem Integrale der Gleichung (2) eine bestimmte conforme Abbildung der Kugel auf die Ebene entspricht, so auch jedem Integrale der Gleichung (1) eine bestimmte conforme Abbildung der Pseudosphäre auf die Ebene zugehört. Beschränkt man sich nun auf den Fall, dass C ein windschiefes geradliniges Polygon ist, und bedient sich der von Hrn. Poincaré (Acta Math. I.) auseinandergesetzten Methoden, so reducirt sich das Problem auf die conforme Abbildung eines ebenen Polygons P, dessen Seiten Kreisbogen sind, deren Centra einer Geraden angehören, auf eine zweite (Vermittelungs-) Ebene. Die Coordinaten der Fuchs'schen Fläche Σ drücken sich dann folgendermassen aus:

$$x = R\int_{\omega_0}^{\omega}(1-\omega^2)F(\omega)d\omega,$$

$$y = R\int_{\omega_0}^{\omega}2\omega F(\omega)d\omega, \quad z = R\int_{\omega_0}^{\omega}(1+\omega^2)F(\omega)d\omega,$$

wobei ω eine complexe Veränderliche in der Ebene des Polygons P ist, R ausdrückt, dass man den reellen Teil zu nehmen hat, und $F(\omega)$ durch die conforme Abbildung des Polygons P auf die Vermittelungsebene vollständig bestimmt und im Innern von P endlich, continuirlich und monodrom ist.

Durch Betrachtungen, wie sie Hr. Poincaré l. c. anwendet, ergiebt sich ferner der Satz:

Jede Fuchs'sche Fläche geht durch eine Gruppe von Collineationen des Raumes in sich über, welche holoëdrisch isomorph mit der Fuchs'schen Gruppe ist, und jede Substitution der Gruppe

vertauscht die Polygone unter sich, die von geradlinigen Zügen begrenzt werden, welche die Fläche ausmachen. Ein umfassendes Beispiel beschliesst die interessante Mitteilung. Bm.

E. Picard. Sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées et les fonctions fuchsiennes. American J. XI. 187-194.

Anknüpfend an eine in den Annales de l'École Normale 1884 erschienene Arbeit, in welcher der Verfasser die Fuchs'schen Gruppen studirte, werden hier namentlich die elliptischen Curven und ihre Reduction nach einer von Hrn. Poincaré (Journ. de Math. (4) III. 405-464, F. d. M. XIX. 1887. 429ff.) gegebenen Methode behandelt.

Ist

$$axx_0+bxy_0+b_0x_0y+cyy_0 \qquad (bb_0-ac \neq 0)$$

eine quadratische Form, sind a, c reelle, b, b_0 conjugirt imaginäre Constanten und x, x_0; y, y_0 conjugirt imaginäre Veränderliche, bedeutet ferner

$$\begin{aligned} x' &= Mx+Ny, \\ y' &= Px+Qy, \end{aligned} \qquad MQ-NP = 1,$$

eine Substitution, durch welche diese Form in sich übergeht, so scheiden sich diese Substitutionen in elliptische, hyperbolische und parabolische, von denen die ersteren auftreten, wenn der stets reelle Ausdruck $(M+Q)^2 = 0$ oder $=1$ ist.

Sind S und T zwei Substitutionen derselben Form, so gehören alle transformirten Substitutionen von S: $T^{-1}ST$ mit S zu derselben Klasse und sind alle von gleicher Gattung (elliptisch etc.). Unter diesen befinden sich nun besonders einfache, die sogenannten reducirten Substitutionen, welche aufgesucht werden. Als Resultat ergiebt sich folgendes: Wenn eine gegebene Form f Substitutionen

$$\begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix}$$

zulässt, für welche $M+Q = 0$ ist, so muss diese Form mit einer von gewissen vier typischen Formen identisch sein, welche mit-

geteilt werden; soll aber $(M+N)^2 = 1$ sein, so muss f mit zwei gewissen typischen Formen zusammenfallen. Wählt man also f ganz willkürlich, so kommt der Fuchs'schen Gruppe, die ihr zugehört, keine elliptische Substitution zu.

Zum Schlusse des Aufsatzes wird noch eine Verallgemeinerung besprochen, welche der von Herrn Poincaré l. c. gegebenen Verallgemeinerung der Modulargleichungen analog ist. Ist nämlich f eine der in Rede stehenden Formen, G die ihr zugehörige Fuchs'sche Gruppe, und betrachtet man eine Substitution, welche f in sich selbst überführt, deren Coefficienten aber nicht ganze, sondern nur rationale oder complexe Zahlen sind, so entspricht dieser Substitution eine andere von der Form:

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen bedeuten, deren Determinante aber von 1 verschieden ist. Bezeichnet dann $F(z)$ eine Fuchs'sche Function, welche der Gruppe G entspricht, so besteht zwischen

$$F(z) \quad \text{und} \quad F\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

eine algebraische Relation, wodurch man eine neue Klasse von Gleichungen erhält, welche den Modulargleichungen analog sind.

Bm.

L. Schlesinger. Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen. Math. naturw. Ber. Ungarn. VI. 337-356.

Der Inhalt dieser Abhandlung ist in die unter gleichem Titel im J. für Math. CV. 181-232 veröffentlichte Arbeit als Abschnitt V übergegangen und wird im nächsten Jahrgange der F. d. M. als Bestandteil jenes grösseren Aufsatzes mitbesprochen werden.

Lp.

K. Heun. Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. Math. Ann. XXXIII. 161-179.

Die Functionen, welche der Verfasser in der vorliegenden

Abhandlung untersucht, sind Verallgemeinerungen der Riemann'schen P-Functionen. Ebenso wie die letzteren durch die Gauss'sche hypergeometrische Reihe, so lassen sich die vom Verfasser betrachteten Functionen durch eine einzige Reihe ausdrücken, welche von fünf Parametern a, q, α, β, γ, δ abhängt und für $a = q = 1$ in die hypergeometrische Reihe übergeht. Die in Rede stehende Reihe, welche der Verfasser mit

$$y = F(a,q;\ \alpha,\beta,\gamma,\delta;\ x)$$

bezeichnet, ist Lösung der Differentialgleichung

$$x(x-1)(x-a).y'' + (bx^2 - cx + d)y' + \alpha\beta(x-q).y = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$b = \alpha+\beta+1,\quad c = \alpha+\beta+a\gamma+(a-1)\delta+1,\quad d = a\gamma$$

gesetzt ist. Diese Gleichung geht für $a = q = 1$ in die hypergeometrische Differentialgleichung über. Die vier Verzweigungspunkte der Function y sind die Punkte

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1,\ \xi_3 = a,\ \xi_4 = \infty;$$

dieselben können durch lineare Transformation von x in vier beliebige Punkte mit dem Doppelverhältnis a übergeführt werden. Insbesondere giebt es 24 Transformationen, bei welchen dreien der Verzweigungspunkte die Werte 0, 1, ∞ zufallen. Diese Bemerkung ergiebt eine Reihe von Transformationsformeln, welche der Verfasser tabellarisch zusammenstellt. Demnächst untersucht er die Convergenz der Reihe $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$. Durch sehr einfache Betrachtungen gelangt er nicht nur zur Kenntnis des Convergenzkreises, sondern auch des Verhaltens der Reihe auf der Peripherie dieses Kreises. Schliesslich behandelt der Verfasser die Frage, in wie weit sich die Gauss'schen „Relationes inter functiones contiguas" auf die von ihm betrachteten Functionen ausdehnen lassen. Von den dabei gewonnenen Resultaten möge hier, als ein Beispiel, das folgende Platz finden: „Soll sich die Function $F(a,q';\ \alpha',\beta',\gamma',\delta';\ x)$ durch die Function $F(a,q;\ \alpha,\beta,\gamma,\delta;\ x)$ und deren erste Derivirte rational ausdrücken lassen, so genügt es nicht, dass die Differenzen

$$\alpha'-\alpha,\quad \beta'-\beta,\quad \gamma'-\gamma,\quad \delta'-\delta$$

ganze Zahlen sind, sondern die charakteristischen Parameter q und q' müssen bestimmte Functionen von a, α, β, γ, δ sein."

Hz.

K. Heun. Bemerkungen zur Theorie der mehrfach lineär verknüpften Functionen. Acta Math. XII. 103-108.

Anschliessend an die Untersuchungen des Verfassers in den Acta Math. XI. 97-118 (F. d. M. XIX. 1887. 374 ff.) wird die Frage erledigt: Wann sind $p+1$ p-fach linear verknüpfte Functionen gleichgruppig? Die Beziehungen, die zwischen denselben bestehen, sind den Gauss'schen relationes inter functiones contiguas analog. Die fragliche Bedingung besteht darin, dass wenigstens p dieser Functionen eben so viele „individuelle" als „charakteristische" Parameter besitzen, die übrigens dem Werte nach nicht willkürlich sind. Hierauf folgt eine Berichtigung der in der früheren Arbeit enthaltenen Angabe hinsichtlich der Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen, die bei der Bestimmung der Reduction des allgemeinen Systems auf das Hauptsystem mit vorgegebenen „charakteristischen" Parametern auftreten. (S. das bezügliche Referat.) Es ergiebt sich nämlich, dass im allgemeinen, d. h. wenn nicht specielle Relationen für die Verzweigungsindices bestehen, jene Gleichungen alle von einander unabhängig sind, und dass somit die fragliche Reduction stets möglich ist, doch werden hierbei eben so viele „individuelle" Parameter des reducirenden Systems dem Werte nach bestimmt, als das Hauptsystem „charakteristische" Parameter besitzt.

Hr.

L. Pochhammer. Ueber eine Klasse von Functionen einer complexen Variablen, welche die Form bestimmter Integrale haben. J. für Math. CIV. 152-173.

In dieser Abhandlung werden Functionen von der Form

$$(1) \qquad S(x) = \int_g^h (w-x)^\lambda . f(w)\,dw$$

und

$$(2)\qquad T(x) = \int_g^x (w-x)^\lambda . f(w)dw$$

betrachtet, wo λ, g, h Constanten bedeuten. Dieser Klasse von Functionen gehören sowohl die hypergeometrischen Integrale als auch die particulären Lösungen derjenigen Differentialgleichungen an, welche in der Arbeit des Verfassers „Ueber drei lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung“ (J. für Math. CIV. 116-151; vergl. den Bericht S. 350) behandelt sind.

Um die Integrale (1), (2) genau zu definiren, muss man an der unteren Grenze g einen Wert der Potenz $(w-x)^\lambda$, sowie, wenn $f(w)$ mehrdeutig ist, einen Wert dieser Function fixiren; g soll kein Verzweigungspunkt von $f(w)$ sein, ferner soll vorausgesetzt werden, dass der Integrationsweg die singulären Punkte von $f(w)$ vermeide.

Der Verfasser untersucht nun in § 1 die Aenderungen, welche ein Integral der Form (1) erleidet, wenn x den Integrationsweg (gh) überschreitet oder einen Umlauf um h ausführt, oder einen solchen, der den ganzen Integrationsweg einschliesst, ferner die Veränderung bei einem Umlauf um einen singulären Punkt von $f(w)$. Das Ergebnis dieser Betrachtungen wird folgendermassen zusammengefasst: Umgiebt man den Integrationsweg (gh) durch eine beliebig enge geschlossene Curve λ_1, zieht von einem Punkte derselben eine Gerade λ_2 ins Unendliche und führt längs λ_1 und λ_2 einen Schnitt aus, so ist in der so zerschnittenen Ebene $S(x)$ eine eindeutige und stetige Function von x.

Ebenso kann das Resultat der Untersuchung in § 2 für die Integrale (2) dahin zusammengefasst werden, dass, wenn man die singulären Punkte der Function $f(w)$ mit dem Punkte g und dem unendlich fernen Punkte etwa durch eine gebrochene Gerade verbindet und längs dieser einen Schnitt zieht, die Function $T(x)$ innerhalb der so zerschnittenen Ebene eindeutig ist.

In § 3 wird gezeigt, wie sich diese Betrachtungen unmittelbar auf den Fall bestimmter Doppel- oder mehrfacher Integrale ausdehnen lassen (nämlich wenn $f(w)$ selbst wieder ein be-

stimmtes Integral ist oder ein solches als Factor enthält); dies wird angewandt auf diejenigen bestimmten Integrale, welche zur Lösung der linearen Differentialgleichungen in der angeführten Abhandlung dienen. P. G.

G. Ascoli. Riassunto della mia memoria: „Le curve limite di una varietà data di curve“ ed osservazioni critiche alla medesima. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 226-239, 257-265, 294-300, 265-371.

Eine ausführliche Uebersicht, mit zahlreichen Verbesserungen, der im Titel angegebenen Abhandlung des Verfassers (Rom. Acc. L. Mem. (3) XVIII. 521-586; F. d. M. XVI. 1884. 342-347).

Vi.

W. Scheibner. Ueber eine Transformationsformel für Doppelintegrale. J. für Math. CIII. 77-88.

Abdruck aus den Leip. Ber. 1884. S. 185 ff. Vergl. F. d. M. XVI. 1884. 391.

Capitel 2.

Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen.

J. J. Iwanoff. Interpolation zweier Producte. Chark. Ges. I. 78-81. (Russisch.)

Das Product $(a+b)(2a+b)\dots(xa+b)$ liegt unter der Bedingung $0 < b < a$ zwischen den folgenden Grenzen:

$$\sqrt{2\pi}.a^x.x^{x+\frac{1}{2}+\frac{b}{a}}.e^{-x+\frac{b}{a}C-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

und

$$\sqrt{2\pi}.a^x.x^{x+\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{b}{a}}e^{-x+\frac{1}{12}x+\frac{b}{a}C};$$

C bezeichnet hier die bekannte Euler'sche Constante. Aehnliche Grenzen werden für das Product

$$(1^2a+b).(2^2a+b)\dots(x^2a+b)$$

gegeben. Wi.

N. J. Sonine. Bernoulli'sche Polynome und ihre Anwendungen. Warsch. Univ. Nachr. 1888. (Russisch.)

Die Bernoulli'schen Polynome werden im ersten Abschnitte der Abhandlung durch die Differenzengleichung

$$F(x+1)-F(x)=ix^{i-1}$$

und die Bedingung $F(0)=0$ definirt. Aus dieser Definition werden alle bekannten Eigenschaften der Bernoulli'schen Polynome sehr einfach und elegant abgeleitet. Im zweiten Abschnitte werden die Summenformeln von Euler und Legendre mit den Restgliedern abgeleitet. Ausser verschiedenen Anwendungen dieser Formeln wird besonders die Zerlegung der Summe $\sum_{i=1}^{i=\infty}F(ih)$ nach den Potenzen von h behandelt und mit einer grossen Anzahl von Beispielen erläutert. Für die Grenze des Restgliedes der Zerlegung der Summe $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{e^{ih}-1}$ findet der Verfasser einen Ausdruck, der viel vorteilhafter als der früher von Schlömilch gegebene ist.

Zum Schluss wird die Gleichung behandelt:

$$H(y+h)-H(y)=F(y),$$

falls alle Ableitungen der Function von irgend einer an für $y=\infty$ verschwinden. Wi.

A. Berger. De Bernoulliska talens och funktionernas teori baserad på ett system af funktionaleqvationer. Stockh. Öfv. 433-463.

Der Verfasser giebt zuerst folgende Definition der Bernoulli'schen Zahlen $B(m)$:

$$B(0)=1,\quad \sum_{k=1}^{m}\frac{B(m-k)}{1.2\dots k}=0\qquad (m\geqq 2)$$

und definirt weiter die Bernoulli'schen Functionen durch die Functionalgleichungen

$$\begin{aligned} &\varphi''(z,m+1) = \varphi'(z,m), \qquad (m \geqq 0)\\ &\varphi(z,0) = 0,\\ &\varphi(0,m) = 0, \qquad (m \geqq 0)\\ &\varphi(1,1) = 0,\\ &\varphi(1,m) = 0 \qquad (m \geqq 2). \end{aligned}$$

Die durch diese Gleichungen definirten Zahlen und Functionen sind nicht dieselben, die man gewöhnlich Bernoulli'sche Zahlen und Functionen nennt, was jedoch der Verfasser nicht hervorgehoben hat.

Er zeigt, dass diese Zahlen und Functionen eindeutig definirt sind, stellt die Formel

$$\varphi(z,m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{B(m-k)}{1.2\ldots k} z^k \qquad (m \geqq 1)$$

auf und beweist mehrere Sätze, die für dieselben charakteristisch sind. Mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{e^{zv}-1}{e^v-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(z,k) v^{k-1}$$

sieht man leicht den Zusammenhang zwischen diesen neuen Functionen und den alten. Weiter werden die Bernoulli'schen Functionen in periodische Reihen entwickelt und auch mittels der gefundenen Formeln einige bestimmte Integrale ausgewertet.

K.

C. F. Lindman. Om en serie. Stockh. Öfv. 69-77.

Der Verfasser giebt eine Methode an, um die Reihe

$$S_2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \nu^2 x^{\nu-1}$$

zu summiren. Er studirt weiter die allgemeinere Reihe

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \nu^n x^{\nu-1},$$

zeigt, dass

$$S_n = \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} A_\nu^{(n)} x^{\nu-1}$$

ist, und stellt Formeln auf, um die Coefficienten $A_\nu^{(n)}$ zu berechnen.

K.

C. F. Lindman. Om några definita integraler. Stockh. Öfv. 421-433.

Eine Fortsetzung der früheren Arbeiten des Verfassers, um Fehler und Ungenauigkeiten der Bierens de Haan'schen Integraltafeln zu corrigiren. K.

A. Jonquière. Ueber eine Klasse von Transcendenten, welche durch mehrmalige Integration rationaler Functionen entstehen. Stockh. Öfv. 522-531.

Die allgemeinste Form dieser Transcendenten ist

$$\int \frac{dx}{x-a} \int \frac{dx}{x-b} \int \frac{dx}{x-c} \cdots \int \frac{dx}{x-m}.$$

Wenn man

$$b = c = \ldots = m$$

setzt, wird die obige Transcendente leicht auf die Form

$$\underset{n}{\varDelta} x = \int_0^x \frac{\log^{n-1} t}{1+t} dt$$

zurückgeführt. Zuerst leitet der Verfasser eine für alle Punkte innerhalb des Einheitskreises convergirende Reihe her:

$$\underset{n}{\varDelta}(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^{\lambda-1} \frac{(n-1)!}{(n-\lambda)!} \log^{n-\lambda} x \,.\, S_\lambda(x),$$

wo

$$S_\lambda(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{x^\nu}{\nu^\lambda}.$$

Weiter ergiebt sich

$$\underset{n}{\varDelta}(x) + (-1)^n \underset{n}{\varDelta}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{n} \log^n x + C,$$

$$C = 0, \qquad n = 2m+1;$$

$$C = 2\underset{n}{\varDelta}(1), \qquad n = 2m.$$

Durch diese beiden Formeln kann die Function $\underset{n}{\Delta}(x)$ für die ganze Ebene berechnet werden.

Zuletzt wird gezeigt, dass die Function

$$S_n\left(\frac{1}{x}\right)+(-1)^n S_n(x)$$

eine ganze rationale Function von $\log x$ ist. K.

P. Pizzetti. Sur le calcul du résultat d'un système d'observations directes. Liège Mém. (2) XV. 32 S.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. S. 33-36.

Die Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n beobachteten Werten einer Grösse, welche am besten den Wert dieser Grösse darstellt, muss in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots, x_n$ symmetrisch sein; sich in $c\varphi$ verwandeln, wenn $x_1, \ldots, x_n$ zu $cx_1, \ldots, cx_n$ werden; in $\varphi+k$, wenn $x_1, \ldots, x_n$ um k wachsen; gleich x_1 sein, wenn $x_2, \ldots, x_n$ gleich x_1 sind. Das sind die Grundsätze, welche der Verfasser ausdrücklich als Grundlage seiner Theorie hinstellt.

Mn. (Lp.)

O. Stolz. Ueber die Hauptwerte der Kreisfunctionen. Innsbruck Ber. 67-72.

Um mit vieldeutigen Functionen rechnen zu können, muss man unter ihren einem Wert der unabhängigen Variablen entsprechenden Werten je einen Hauptwert isoliren, deren Gesamtheit dann einen Hauptzweig der Function bildet. Da in Bezug auf die Behandlung dieser schon von Cauchy und neuerdings von Weierstrass und Thomae eingeführten Begriffe die Lehrbücher zu wünschen übrig lassen, werden dieselben für die elementaren Functionen genau festgestellt, und die Unstetigkeiten der Hauptzweige und die wechselseitige Beziehung der Hauptwerte von verschiedenen dieser Functionen angegeben. T.

S. Pincherle. Sur une généralisation des fonctions eulériennes. C. R. CVI. 265-268.

Es werden die Eigenschaften der Function

$$(-1)^z \varphi^{(z)}(x) = \int_0^\infty \frac{\chi(t)\, t^z e^{-xt}\, dt}{\prod_{\nu=1}^{\nu=m} (1-e^{-\alpha_\nu t})}$$

untersucht, wo z eine ganze Zahl $\overline{\gtrless} m$,

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n t^n}{n!}$$

und α_ν Constanten sind, deren reeller Teil positiv ist. Man kann sie durch die Reihe

$$\varphi^{(z)}(x) = \Sigma f^{(z)}(x+w); \; w = \Sigma \lambda_\nu \alpha_\nu$$

darstellen, wo

$$(-1)^z f^{(z)}(x) = \int_0^x \chi(t) t^z e^{-xt} dt$$

ist. Sie genügt der Functionalgleichung:

$$\varphi^{(z)}(x) - \sum_\nu \varphi^{(z)}(x+\alpha_\nu) + \sum_{\mu,\nu} \varphi^{(z)}(x+\alpha_\mu+\alpha_\nu) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^m \varphi^{(z)}(x+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m) = f^{(z)}(x).$$

Für $\chi(t) = 1$ geht $\varphi^{(z)}(x)$ in eine Function $\psi^{(z)}(x)$ über, welche das Multiplicationstheorem hat:

$$\psi^{(z)}(nx) = \frac{1}{n^{z+1}} \Sigma \psi^{(z)}\left(x + \frac{\lambda_1 \alpha_1}{n} + \frac{\lambda_2 \alpha_2}{n} + \cdots + \frac{\lambda_m \alpha_m}{n}\right),$$

wo alle λ von 0 bis $n-1$ variiren. Die $\varphi^{(z)}(x)$ lassen sich in Reihen nach den Derivirten von $\psi^{(z)}(x)$ entwickeln. Es folgen noch einige Beziehungen zu Sätzen von Mittag-Leffler, Hermite und Appell. H.

M. Lerch. Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe. Batt. G. XXVI. 39-40.

Aus

$$F(u) = \int_0^1 l\Gamma(x+u)dx$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{dF(u)}{du} = l\,\frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)} = lu$$

und hieraus durch Integration

$$F(u) = ulu - u + C.$$

Die Integrationsconstante C findet man gleich $\frac{1}{2}l(2\pi)$, wenn
n die Formel

$$l\Gamma(x)+l\Gamma(1-x) = l\pi - l\sin\pi x$$

ischen den Grenzen 0 und 1 integrirt und die Identität

$$\int_0^1 l\Gamma(1-x)dx = \int_0^1 l\Gamma(x)dx$$

rücksichtigt. Ht.

Pringsheim. Zur Theorie der Gamma-Functionen.
Math. Ann. XXXI. 455-481.

Wenn man die Theorie der Gammafunctionen nicht nach
n Principien der modernen Functionentheorie, sondern auf
und eines definirenden analytischen Ausdruckes aufbauen will,
hat man zwischen zwei Definitionen — der Legendre'schen
d der Gauss'schen — die Wahl. Nach der ersteren wird die
nction $\Gamma(x)$ durch ein bestimmtes Integral, nach der letzteren
rch ein unendliches Product erklärt. Indem der Verfasser
Vorzüge der beiden Definitionen gegen einander abwägt,
mmt er zu dem Schlusse, „dass es sich am meisten empfehle,
n der Integral-Definition auszugehen, sodann aber vor allem
Productentwickelung daraus abzuleiten und nunmehr die
rige Theorie auf den gewonnenen Productausdruck zu gründen.“
r consequenten Durchführung dieses Gedankens hat der Ver-
sser die vorliegende Arbeit gewidmet, in welcher man dem-
tsprechend nicht sowohl neue Resultate, als vielmehr eine
enge und systematische Entwickelung der bekannten, wichtigsten
tze über Gammafunctionen findet. Der Uebergang von der
tegraldefinition zur Productdarstellung der Function wird auf
ei verschiedenen Wegen bewerkstelligt, von welchen der erste
egen seiner Einfachheit und Ungezwungenheit die besondere
achtung der Mathematiker verdient.

Von den Sätzen der Theorie finden unter anderen die ver-
hiedenen Integraldarstellungen von $\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$, ferner die
auchy'sche Integraldarstellung von $\log\Gamma(x+1)$, endlich der

Zusammenhang der Gammafunction mit den sogenannten Euler'schen Integralen zweiter Gattung Berücksichtigung. Hz.

L. SAALSCHÜTZ. Weitere Bemerkungen über die Gammafunctionen mit negativen Argumenten. Schlömilch Z. XXXIII. 362-371.

Bekanntlich haben die Euler'schen Integrale

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx$$

nur einen Sinn, wenn die (als reell vorausgesetzten) Grössen a, α, β den Bedingungen $a > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ genügen, obgleich die Functionen $\Gamma(a)$, $B(\alpha, \beta)$ für unbeschränkt veränderliche Argumente einen Sinn besitzen.

Der Verfasser giebt nun die Werte dieser Functionen in Integralform auch für die Fälle, wo die Euler'schen Integrale sinnlos werden. Die hübsche Methode, deren sich der Verfasser hierbei bedient, und welche derselbe offenbar unabhängig entdeckt hat, findet sich, wie der Referent kürzlich bemerkte, schon bei Cauchy in den Exercices. Die Methode besteht darin, von der integrirten Function die Anfangsglieder der Potenz-Entwickelungen fortzunehmen und dadurch das Unstetigwerden des Integrales an den Grenzen zu verhüten.

So ist z. B, wenn man

$$\varphi(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - + \cdots + (-1)^h . \frac{x^h}{h!}$$

setzt,

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} [e^{-x} - \varphi(x)] dx,$$

falls a zwischen $-h-1$ und $-h$ liegt. Und ebenso ergiebt sich, wie Herr Saalschütz in der vorliegenden Mitteilung beweist,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \left[\frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}} - \psi(x) \right] dx,$$

falls α zwischen $-k-1$ und $-k$, sowie β zwischen $-h-1$ und $-h$ liegt und $\psi(x)$ die Summe der ersten $(k+1)$ und der ersten

+1) Glieder in der Entwickelung von $\frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}$ nach auf-
eigenden, bezüglich absteigenden Potenzen von x bedeutet.
er Verfasser giebt von dem eben genannten Satze einige An-
endungen, die sich auf Identitäten aus der Theorie der hyper-
eometrischen Reihen beziehen. Es wird gezeigt, dass diese
nächst nur für positive Werte der auftretenden Constanten
wiesenen Identitäten auch für beliebige positive oder negative
erte jener Constanten gültig bleiben. Hz.

. Láska. Zur Function $\Gamma(x)$. Hoppe Arch. (2) VI. 448.

Scheinbeweise für einige Formeln aus der Theorie der
ammafunction. Hz.

. Schafheitlin. Ueber Integraldarstellung der allgemeinen hypergeometrischen Reihe. J. für Math CIII. 89-97.

Die Lösungen der verallgemeinerten hypergeometrischen
ifferentialgleichung

$$(1) \qquad \sum_{p=0}^{n} x^{p-1}(c_p x - d_p)\frac{d^p y(x)}{dx^p} = 0 \qquad (d_0 = 0),$$

ssen sich durch n-fache bestimmte Integrale darstellen. Der-
tige Darstellungen sind neuerdings von den Herren Pochhammer
d Goursat näher untersucht worden. Der Verfasser giebt nun
nen übersichtlichen Beweis des Hauptresultates von Herrn Poch-
mmer und zeigt sodann, wie man durch eine einfache Sub-
itution von den Integralen des Herrn Pochhammer zu jenen
s Herrn Goursat übergehen kann. Die Hauptpunkte des er-
ähnten Beweises sind die folgenden. Man stellt mit der Glei-
ung (1) die nachstehende Gleichung zusammen, welche eine
n eine Einheit niedrigere Ordnung besitzt:

$$(2) \qquad \sum_{p=0}^{n-1} v^{p-1}(a_p v - b_p)\frac{d^p \varphi(v)}{dv^p} = 0; \quad b_0 = 0.$$

enn nun die Constanten a_p, b_p passend bestimmt werden,

so ist

$$(3)\qquad y(x)=\int_g^h v^\sigma(1-v)^{\tau-\sigma}\varphi(vx)dv,$$

wo σ, τ, g, h ebenfalls geeignet zu bestimmende Constanten bedeuten. Durch wiederholte Anwendung der Formel (3) erhält man schliesslich $y(x)$ dargestellt durch ein n-faches Integral.

Zur Vereinfachung der Rechnung bringt der Verfasser die Differentialgleichungen auf eine Form, welche er zuerst in seiner Dissertation aufgestellt und als „Normalform" bezeichnet hat.

Hz.

S. Pincherle. Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate.
Rom Acc. L. Rend. (4) IV_1. 694-700, 792-799.

Bekanntlich entspricht jeder linearen homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten eine ebensolche Differenzengleichung, deren Lösung zugleich die Lösung der ersteren Gleichung ergiebt. Setzt man in der Differentialgleichung e^{-t} für die unabhängige Variable und $\psi(t)$ für die abhängige Variable, so wird sie von der Gestalt

$$(1)\qquad \sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{p} a_{h,k}e^{-kt}\psi^{(h)}(t)=0,$$

wo $a_{h,k}$ Constanten bedeuten. Die entsprechende Differenzengleichung lautet dann

$$(2)\qquad \sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{p} a_{h,k}(x+k)^h f(x+k)=0,$$

wo $f(x)$ die abhängige und x die unabhängige Variable bezeichnet.

Der Uebergang von dem Integrale der einen Gleichung zu dem der anderen wird vermittelt durch die Formeln

$$(3)\qquad f(x)=\int e^{-xt}\psi(t)dt;\qquad \psi(t)=\int e^{xt}f(x)dx,$$

wobei die Integrationswege in geeigneter Weise zu wählen sind. Der Verfasser betrachtet nun zuerst den Fall $m=1$, p beliebig. In diesem Falle ist die Gleichung (1) sofort integrirbar; es ist nämlich

$$\psi(t)=e^{-\beta t}\prod_{k=1}^{p}(1-\alpha_k e^t)^{\beta_k},$$

wo α_k und β_k Constanten bedeuten. Die erste Formel (3) liefert sodann die Lösung der Differenzengleichung (2) in Gestalt eines bestimmten Integrals. Fasst man dann diese Lösung $f(x)$ als Function von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ auf, so befriedigt dieselbe eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen. Als Function von α_1 betrachtet, genügt $f(x)$ jener linearen Differentialgleichung, welche Herr Pochhammer als eine Verallgemeinerung der hypergeometrischen Differentialgleichung untersucht hat. In dem Falle $p = 3$, $\alpha_1 = 1$ geht $f(x)$ in die von Appell und Picard untersuchten hypergeometrischen Functionen von zwei Variabeln α_2, α_3 über.

In der Fortsetzung seiner Abhandlung betrachtet der Verfasser den Fall, wo in den Gleichungen (1) und (2) die Zahl $p = 1$, dagegen m beliebig ist. Dann lässt sich das Integral der Gleichung (2) sofort angeben; dasselbe lautet nach den Untersuchungen von Mellin

$$f(x) = c^x \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\Gamma(x-\varrho_\nu)}{\Gamma(x-\sigma_\nu)},$$

wo $\Gamma(x)$ das Euler'sche Integral und $\varrho_\nu, \sigma_\nu, c$ Constanten bezeichnen.

Aus $f(x)$ ergiebt sich nach Formel (3) $\psi(t)$ in Gestalt eines bestimmten Integrals. Als Function von $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ aufgefasst, befriedigt $\psi(t)$ lineare Differenzengleichungen. Specielle Fälle von den letzteren sind die 15 Gauss'schen „Relationes inter functiones contiguas", sowie die von Goursat herrührenden Verallgemeinerungen dieser Relationen. Der Verfasser macht zum Schluss auf die Dualität aufmerksam, welche seine Betrachtungen beherrscht, und setzt dieselbe dadurch in ein helles Licht, dass er entsprechende Sätze einander gegenüber stellt.

Hz.

A. Markoff. Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$. St. Pétersbourg. 1888. (Französisch.)

Die neue Tafel giebt die Werte des Integrals $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$ auf

elf Decimalen für alle Tausendstel des Argumentes von $x = 0$ bis $x = 3$ und für alle Hundertstel von $x = 3$ bis $x = 4,8$; eine Ergänzungstafel giebt die Werte des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Die Methoden und die Formeln, welche zur Berechnung der Tafel gedient haben, sind in einer eingehenden Einleitung zusammengestellt. Wi.

B. Elliptische Functionen.

G. H. Halphen. Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. IIme partie. Applications à la mécanique, à la physique, à la géodésie, à la géométrie et au calcul intégral. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 659 S. 8°.

Dass der Schwerpunkt des Halphen'schen Werkes in den Anwendungen der Theorie der elliptischen Functionen liegt, haben wir schon in dem Bericht über den ersten Teil desselben (s. F. d. M. 1886. XVIII. 377) hervorgehoben. Mit der den französischen Mathematikern eigenen Eleganz führt der Verfasser, welcher leider inzwischen der Wissenschaft durch einen frühen Tod entrissen ist, eine Reihe interessanter Anwendungen der elliptischen Functionen durch. Das erste Capitel: „Formules elliptiques pour la rotation des corps“, beginnt mit der Darstellung der Cosinus der Winkel, die eine Gerade mit drei rechtwinkligen Axen bildet, durch die Sigmafunctionen, und löst das Problem der analytischen Geometrie: „Man habe 3 Systeme rechtwinkliger Axen $a, b, c, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$, und es seien die Cosinus der Winkel gegeben, welche die Axen a, b, c mit den 6 übrigen bilden; es sollen die Cosinus der Winkel, welche diese 6 unter einander einschliessen, gefunden werden“ (composition des trièdres trirectangles). Nachdem alsdann die Euler'schen Winkel und ihre Cosinus durch ϑ-Functionen ausgedrückt und in Reihen entwickelt

sind, werden die Fundamentalformeln der Kinematik, welche das Problem der Rotation fester Körper betreffen, kurz zusammengefasst, und es wird dann das Problem mit Hülfe der elliptischen Functionen endgültig gelöst. Cap. II trägt die Ueberschrift: „Les mouvements à la Poinsot". Unter „mouvement à la Poinsot" wird eine continuirliche Rotation verstanden, deren Componenten nach 3 festen Axen in jedem Augenblick in einem constanten Verhältnis stehen zu den Coordinaten eines im Raume beweglichen, aber in der rotirenden Figur unveränderlichen Punktes. Diese Definition knüpft an die von Poinsot (Théorie nouvelle de la rotation des corps, J. de math. (1) XVI. 1851) gegebene an. Nachdem diese Bewegungen durch elliptische Functionen ausgedrückt sind, werden die Gleichungen der Herpolodie, ihre Inflexionspunkte und ihre verschiedenen Formen studirt. Dann folgen die Reihenentwickelungen. In den folgenden Paragraphen werden zwei gleichzeitige Bewegungen à la Poinsot betrachtet; sie heissen übereinstimmend (concordants), wenn die betreffenden elliptischen Functionen dieselbe absolute Invariante haben, und wenn ausserdem die beiden Bewegungen isochron sind, also dieselbe Periode der Zeit haben. Cap. III behandelt das Problem der Rotation eines schweren Umdrehungskörpers, der in einem Punkte seiner Axe aufgehängt ist. Umdrehungskörper (corps de révolution) ist ein fester Körper, dessen centrales Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist. Das Problem ist von Lagrange (Mécanique analytique, 3. éd. par Bertrand, II. 233) auf elliptische Quadraturen zurückgeführt. Jacobi (Werke II) fand den Satz, dass sich die Bewegung eines solchen in einem Punkte seiner Axe aufgehängten Umdrehungskörpers in zwei Bewegungen à la Poinsot zerlegen lässt. Diese Bewegungen werden eingehend behandelt, und dann specielle Fälle betrachtet. Es folgt die Bewegung eines konischen Pendels Ein Fall der Lamé'schen Differentialgleichung wird untersucht, und es schliesst das Capitel mit der Betrachtung der elastischen Curve im Raume. Das Problem des Cap. IV: „Mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini, en l'absense de force accélératrice" führt, wie Kirchhoff (Vorlesungen über mathematische Physik, 236—247)

gezeigt hat, auf ein System von Differentialgleichungen mit 6 Unbekannten. In diesen Gleichungen kommt die unabhängige Variable, d. h. die Zeit, nicht explicite vor; man hat ausserdem 3 unmittelbare Integrale, und man kennt den letzten Multiplicator; mithin führt die Kenntnis eines einzigen neuen Integrals zur vollständigen Lösung. In drei besonderen Fällen kennt man dieses neue Integral, und einer derselben führt auf elliptische Quadraturen. Mit diesem beschäftigt sich der Verfasser im vorliegenden Capitel. Das folgende Cap. V behandelt die ebene elastische Curve, die unter einem normalen und stets gleichförmig verteilten Druck sich befindet. Dieses Problem wurde zuerst von Maurice Lévy behandelt (Sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications, C. R. XCVII. 694 et J. de Mathém. (3) X. 1; s. F. d. M. XV. 1883. 882). Durch Einführung der Weierstrass'schen Functionen $\wp u$ und σu hatte dann Halphen die Discussion der Lösung vereinfacht (Sur une courbe élastique, J. de l'Éc. Polyt. cah. LIV. 183; s. F. d. M. 1884. XVI. 876). Es werden die verschiedenen Formen der elastischen Curve untersucht, dann die Curve ohne Druck betrachtet, ferner das belastete gerade Prisma und der normal gedrückte Ring. Capitel VI enthält die Untersuchung der geodätischen Linien auf den Rotationsflächen zweiten Grades. Es ergeben sich 6 zu discutirende Fälle für die geodätischen Linien auf der Fläche

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1;$$

das abgeplattete Ellipsoid ($a^2>b^2>0$), das längliche Ellipsoid ($b^2>a^2>0$) und das zweischalige Hyperboloid ($b^2>0>a^2$) haben je eine Art von geodätischen Linien, die geradlinige Umdrehungsfläche ($a^2>0>b^2$) hat 3 verschiedene Arten. Aus der Uebereinstimmung der hier gewonnenen Gleichungen mit denen in Cap. II ergeben sich Beziehungen zwischen den geodätischen Linien und der Herpolodie. Ferner folgen Eigenschaften einer Klasse abwickelbarer Flächen und Sätze über confocale Flächen. Die in diesem Capitel gewonnene Theorie wird im folgenden (VII) angewandt auf die geodätischen Linien auf einem abgeplatteten Rotationsellipsoid von geringer Abplattung, wie es die

Erde ist. Es handelt sich um das von Jacobi behandelte Problem der Geodäsie (Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie, Ges. Werke II. 419) und um analoge Probleme. Vollständig durchgeführt wird die Aufgabe, die geodätische Entfernung zweier Punkte zu finden, deren geographische Coordinaten gegeben sind. Gegenstand des Cap. VIII ist das berühmte Problem von Gauss, die Anziehung eines elliptischen Ringes (Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita, Werke III. 333). Eine vollständige Lösung dieses Problems gab G. W. Hill (On Gauss's method of computing secular perturbations, with an application to the action of Venus on Mercury, Amer. Ephemeris and Naut. Almanac under the dir. of S. Newcomb, I. 1882). Herr Hill hat die Lösung des Problems vervollständigt, indem er die Rechnungen von Gauss bis zu dem Punkte fortsetzte, wo die numerischen Werte eingesetzt werden. Hier giebt Halphen mit Hülfe einer neuen und einfachen Analyse zwei verschiedene Lösungen des Problems, deren eine der Gauss'schen entspricht. Das folgende Capitel IX „Équation d'Euler" hat einen rein algebraischen Inhalt, der eher eine Ergänzung der Theorie der elliptischen Functionen als eine Anwendung derselben genannt werden kann. Der Verfasser beginnt mit der allgemeinsten Relation zwischen zwei elliptischen Functionen, $f(u)$ und $f_1(u)$, d. h. zwei rationalen Functionen von $\wp u$ und $\wp' u$. Es existirt eine „doppelt-lineare" Gleichung

$$axy + bx + cy + h = 0,$$

so dass, wenn $x = f(u)$, $y = f_1(u_1)$ gesetzt wird, die Differenz der Argumente u und u_1 constant und gleich der halben Differenz $\frac{1}{2}(w - w_1)$ der Summen der Unendliche beider Functionen ist. Unter einer „doppelt-quadratischen" Gleichung wird eine solche verstanden, die in Bezug auf jede der beiden Variabeln vom zweiten Grade ist. Eine doppelt-quadratische Gleichung, die überdies symmetrisch ist, drückt eine Relation zwischen $f(u)$ und $f(u + U)$ aus, wo U eine Constante; aber jede beliebige doppelt-quadratische Gleichung vermittelt die Beziehung zwischen

zwei elliptischen Functionen desselben Arguments. Vermittelst einer linearen Substitution für eine Variable kann eine nicht symmetrische (dissymétrique) Gleichung in eine symmetrische transformirt werden. Die Betrachtung der Invarianten führt auf die sogenannte „charakteristische Gleichung"

$$(s-p)(s-q)(s-r) = s^3 - k_1 s^2 - k_2 s - k_3 = 0,$$

worin die Coefficienten Invarianten sind. Das Vorige wird nun auf die Integration der Euler'schen Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

worin X und Y Polynome vierten Grades von x resp. y sind, angewandt. Die hier entwickelte Theorie der doppelt-quadratischen Gleichungen liefert ein einfaches Mittel für die Lösung des Schliessungsproblems, wie das folgende Capitel X: „Les polygones de Poncelet", zeigt. Eine jede doppelt-quadratische und symmetrische Gleichung vermittelt die Beziehung zwischen den Endpunkten eines dem Kegelschnitt X eingeschriebenen und dem Kegelschnitt Y umgeschriebenen Polygons. Daraus folgt der Poncelet'sche Satz: „Giebt es ein geschlossenes Polygon, das einem Kegelschnitt eingeschrieben und einem zweiten Kegelschnitt umgeschrieben ist, so giebt es unendlich viele andere Polygone von gleicher Seitenzahl, die jenem ersten Kegelschnitt eingeschrieben und dem zweiten umgeschrieben sind". Die Theorie der Poncelet'schen Polygone lässt sich mit Hülfe der elliptischen Functionen elegant durchführen. Diese Theorie hängt mit der Theorie der algebraischen Formen eng zusammen; sie führt ferner auf die Verdoppelung des Arguments und auf die allgemeine Multiplication der elliptischen Functionen, sowie auf eine neue Integration der Euler'schen Gleichung und auf einen neuen Ausdruck für $\wp u$. — Gleich fruchtbare geometrische Anwendungen enthält das folgende Capitel XI: „Les courbes du premier genre; la cubique plane". Die Coordinaten eines variabeln Punktes auf einer ebenen Curve dritten Grades können durch elliptische Functionen eines Arguments ausgedrückt werden. Haben die Curven einen Doppelpunkt, so entarten die elliptischen Functionen. Soll

eine Curve n^{ten} Grades durch eine Gleichung von der Form

$$\varrho x_i = a_i + b_i \wp u + c_i \wp' u + \cdots + l_i \wp^{(n-2)} u \qquad (i = 1, 2, 3)$$

dargestellt werden, so muss sie $\frac{1}{2}n(n-3)$ Doppelpunkte haben. Eine andere Form dieser Curven:

$$\varrho x_i = \sigma(u - \alpha_i)\sigma(u - \beta_i) \ldots \sigma(u - \lambda_i) \quad (i = 1, 2, 3),$$

mit der Bedingung, dass $\alpha_i + \beta_i + \cdots + \lambda_i$ für alle 3 Coordinaten dieselbe Summe sei, gestattet zugleich die Untersuchung der singulären Zweige. Nach diesen allgemeinen Einleitungen werden die Curven dritten Grades speciell behandelt. Auch gestatten die allgemeinen Betrachtungen eine Anwendung auf die Raumcurven, wie im Folgenden gezeigt und besonders für den Fall $n = 4$ ausgeführt wird. Diese Betrachtung der biquadratischen Curve im Raume führt auf die elliptischen Coordinaten, welche im nächsten Capitel XII „Équation de Lamé" eingehender behandelt werden. Nachdem die elliptischen Coordinaten definirt worden sind und die Gleichung der Potentiale in elliptischen Coordinaten gegeben ist, werden die Fundamentalformeln, in denen die elliptischen Argumente als Temperaturen angesehen werden, zusammengestellt. Dann schreitet der Verfasser zu dem Lamé'schen Problem, wie es in der Abhandlung: „Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux" (J. de Mathém. (1) IV. 126) formulirt ist. Für die weitere Behandlung ist zu erinnern an folgende Literatur: Liouville, Lettre sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique, concernant l'ellipsoïde (ibid. XI. 217 und 261); E. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, I; Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques; Brioschi, Théorèmes relatifs à l'équation de Lamé, und Sur une application du théorème d'Abel (C. R. XCII. 325 und XCIV. 686). Im Vorliegenden wird die Lamé'sche Gleichung

$$y'' = [n(n+1)\wp u + B] y$$

für irgend eine ganze Zahl n gelöst; das Integral hat die Form

$$y = \Pi \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{-u\zeta a}.$$

Nach eingehender Discussion der allgemeinen Lösung wird als besonderer Fall die Riccati'sche Gleichung betrachtet. — Gegen-

stand des XIII[ten] Capitels sind Theoreme über die linearen Differentialgleichungen. Zunächst wird an die Bedingungen erinnert, unter denen das allgemeine Integral der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$y^{(m)}+a_1y^{(m-1)}+a_2y^{(m-2)}+\cdots+a_{m-1}y'+a_my=0,$$

deren Coefficienten eindeutige gebrochene Functionen der unabhängigen Variable u sind, sich in eine nach Potenzen von $(u-u_0)$ fortschreitende Reihe entwickeln lässt. Man vergleiche des Verfassers „Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables“ (Mém. Sav. Étr. XXVIII. 155). Alsdann wendet sich der Verf. zu den von Herrn Picard integrirten Gleichungen (C. R. XC. 128 und 293, J. für Math. XC. 281; siehe auch die Abhandlung von G. Floquet, C. R. XCVIII. 82) und zu solchen, die sich auf Picard'sche Gleichungen zurückführen lassen. Als Beispiel dient die Gleichung dritter Ordnung

$$y'''-\tfrac{4}{3}\wp u.y'-\tfrac{8}{27}\wp'u.y=0,$$

die mit der Teilung des Arguments durch 3 zusammenhängt; ferner die Gleichung vierter Ordnung:

$$y^{\text{IV}}-A\wp u.y''-B\wp'u.y-(C\wp''u-Dg_2)y=0,$$

und überhaupt die linearen Differentialgleichungen, die mit der Teilung des Arguments durch irgend eine ganze Zahl zusammenhängen. Andere Beispiele für die allgemeinen Betrachtungen liefert die oben angeführte Abhandlung des Verfassers und eine zweite: „Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre“ (Acta Math. III. 325). Mit zwei Beispielen, der Gleichung, in der der erste Coefficient nicht constant ist:

$$(\wp u-\wp a)y''-\wp'u.y'-[n(n+1)(\wp u-\wp'a)^2-\wp''a]y=0,$$

und einer zweiten, in der die besonderen elliptischen Functionen für $g_2=0$ auftreten:

$$y'''+(1-n^2)\wp u.y'+[\tfrac{1}{2}(1-n^2)\wp'u-m]y=0,$$

schliesst dieses Capitel. — Das letzte Capitel XIV trägt die Ueberschrift: „Fractions continues et intégrales pseudo-elliptiques“. Es behandelt die Entwickelung von $\sqrt{X}$, wo X ein Polynom vierten Grades ist, in einen Kettenbruch. Jacobi gab zuerst mit Hülfe der elliptischen Functionen ohne Beweis Formeln, welche das Gesetz der Quotienten der Entwickelung enthalten (Note sur

une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'Algèbre, J. für Math. VII. 41; ges. Werke I. 329). Die Betrachtung der Näherungswerte zeigt besser als die der Quotienten den Zusammenhang, in dem diese Theorie mit der Multiplication des Arguments steht. Um das Problem zu erweitern, führt der Verfasser statt $\sqrt{X}$ ein neues wichtiges Element ein, nämlich die Function

$$\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}.$$

Die Voraussetzung Jacobi's, dass X in lineare Factoren zerlegt sei, wird hier überflüssig. Nachdem die Kettenbrüche eingehend studirt sind, wird auch ihre Convergenz untersucht. Es schliesst das Capitel mit einer Betrachtung der pseudo-elliptischen Integrale, mit denen, wie Abel gezeigt hat, die Entwickelung von $\sqrt{X}$ in einen Kettenbruch zusammenhängt (Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, R et ϱ étant des fonctions entières, J. für Math. I und Oeuvres compl. I. 104). Halphen stellt sich folgendes Problem: „Es ist eine rationale Function L von der Form

$$L = -n\sqrt{a_0}\,x + \frac{n_1\sqrt{X_1}}{x-x_1} + \frac{n_2\sqrt{X_2}}{x-x_2} + \cdots + K$$

gegeben, man soll eine andre Function T von der Form

$$T = \frac{\sqrt{Z}}{x-z} - \frac{\sqrt{Z'}}{x-z'} + R$$

finden, so dass $(2L+T):\sqrt{X}$ die logarithmische Ableitung einer rationalen Function von x und $\sqrt{X}$ ist". Die Lösung dieses Problems führt auf eine allgemeine Methode, die pseudo-elliptischen Integrale direct zu construiren.

Wir haben versucht, eine Uebersicht über den zweiten Band des Halphen'schen Werkes in kurzen Zügen zu geben; der Leser wird zu der Ueberzeugung gelangt sein, dass dieses Werk eine Fülle des interessantesten und mannigfaltigsten Materials enthält. Beim Erscheinen des ersten Bandes wurde auch ein dritter Band

angekündigt, von welchem die Verlagsbuchhandlung jetzt „Fragmente“ zu veröffentlichen verspricht. Es ist lebhaft zu bedauern, dass wir infolge des Todes des Verfassers der Vollendung des Werkes verlustig gehen. M.

M. de Sparre Cours sur les fonctions elliptiques professé pendant l'année 1887 à la Faculté catholique des Sciences de Lyon (III[e] partie). Brux. S. sc. XII. B. 1-90.

1. Reduction der Integrale, welche von den elliptischen Functionen abhängen, auf die Functionen $\wp(u)$, wenn die Integrale vorher auf die kanonische Form gebracht sind. 2. Directe Reduction der von den elliptischen Functionen abhängenden Integrale auf die Functionen $\wp(u)$, wenn die Wurzeln der Grösse unter dem Wurzelzeichen nicht in Evidenz treten. 3. Additionstheoreme für $\wp(u)$. 4. Untersuchung von $\wp(u)$, wenn die Discriminante negativ ist. 5-6. Berechnung des Moduls k und des Multiplicators γ als Functionen der Invarianten g_2 und g_3. 7. Directe Berechnung der Perioden und der anderen Elemente als Functionen von γ und k. 8. Definition der Sigmafunctionen. 9. Berechnung des Moduls und des Multiplicators, wenn die Wurzeln der Grösse unter dem Wurzelzeichen in Evidenz sind. 10. Anwendungen: I. Bewegung des Kreispendels in der Luft, wenn man den Widerstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit annimmt. II. Bewegung eines schweren Massenpunktes auf einem Kreise, welcher sich mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit um eine verticale in seiner Ebene befindliche Axe dreht. Mn. (Lp.)

M. Falk. Beweise einiger Sätze aus der Theorie der elliptischen Functionen. Stockh. Vet. Bihang. XIV. 1-30.

Neue Beweise schon bekannter Sätze. K.

M. Lerch. Beiträge zur elementaren Theorie der elliptischen Integrale. Casop. XVII. 49, 145. (Böhmisch.)

Liefert eine elegant gehaltene Einleitung in die genannte Theorie unter Verwendung der modernen Symbolik. Std.

G. PEANO. Definizione geometrica delle funzioni ellittiche. Batt G. XXVI. 255-256.

Schneidet man auf den Radienvectoren OP einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(x=a\cos\vartheta,\ y=b\sin\vartheta)$ gleiche aber entgegengesetzte Strecken $OM=-\frac{l}{2}$, $PN=+\frac{l}{2}$ ab, dann ist die zwischen allen M und N, von $\vartheta=0$ bis ϑ begrenzte Fläche

$$U=lab\int_0^\vartheta\frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta+b^2\sin^2\vartheta}}.$$

M.

T. J. STIELTJES. Sur l'équation d'Euler. Darboux Bull. (2) XII. 222-227.

Das allgemeine Integral der Euler'schen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}\pm\frac{dy}{\sqrt{a_0y^4+4a_1y^3+6a_2y^2+4a_3y+a_4}}=0$$

lässt sich in die elegante Form bringen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{x+y}{2} & xy \\ 1 & a_0 & a_1 & a_2-2m \\ -\frac{x+y}{2} & a_1 & a_2+m & a_3 \\ xy & a_2-2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0,$$

wo m eine willkürliche Constante ist. Diese Formel ergiebt sich sehr leicht aus einer Abhandlung von Richelot: „Einige Bemerkungen zum Euler'schen Additionstheorem der elliptischen Integrale", J. für Math. XLIV. 277. Dies wird im Vorliegenden unter teilweiser Wiedergabe der Richelot'schen Abhandlung gezeigt. M.

T. J. STIELTJES. Sur l'équation d'Euler. C. R. CVII. 617-618.

Wie in der obigen Notiz wird die elegante Determinanten-

Form der Lösung der Euler'schen Gleichung angegeben, ferner die Beziehung zwischen x und y in der Form

$$p+q(x+y)+rxy=0,\ y=\frac{p+qx}{q+ry},$$

und gezeigt, dass, wenn man ein Polynom kennt

$$\alpha x^2+2\beta x+\gamma \text{ proportional } \sqrt{H+mX},$$

wo H die Hesse'sche Determinante von $X=a_0x^4+4a_1x^3+\cdots$, eine der linearen Substitutionen, welche das elliptische Differential in sich selbst überführen, die Form

$$\alpha xy+\beta(x+y)+\gamma=0$$

hat. M.

T. J. Stieltjes. Sur la réduction de la différentielle elliptique à la forme normale. C. R. CVII. 651-653.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}=\pm\frac{dy}{\sqrt{4y^3-Sy-T}}$$

ist

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & x & 0 & \frac{1}{2}y & -xy \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & c \\ x & 0 & 0 & -2 & c & 0 \\ 0 & 0 & -2 & a_0 & a_1 & a_2 \\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2} & c & a_1 & a_2 & a_3 \\ -xy & c & 0 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0,$$

wo c eine willkürliche Constante. Diese Formel ergiebt auch die linearen Substitutionen. M.

T. J. Stieltjes. Sur la transformation linéaire de la différentielle elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$. Toulouse Ann. II. K. 1-26.

Die lineare Transformation des elliptischen Differentials wird hier unter einem von dem bisherigen verschiedenen Gesichtspunkte behandelt, indem die Beziehung zwischen x und y in der Form

$$p+qx+ry+sxy=0$$

und die Polynome vierten Grades in der homogenen Gestalt:

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 x' + 6a_2 x^2 x'^2 + 4a_3 x x'^3 + a_4 x'^4,$$
$$Y = b_0 y^4 + 4b_1 y^3 y' + 6b_2 y^2 y'^2 + 4b_3 y y'^3 + b_4 y'^4$$

geschrieben werden. Bezeichnet man die Wurzeln von $X = 0$, $Y = 0$ mit x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4, so ist

$$p + qx_i + ry_i + sx_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

d. h. das anharmonische Verhältnis der Wurzeln von $X = 0$ ist gleich dem der Wurzeln von $Y = 0$. Damit nun die obige Beziehung erfüllt wird, müssen die Invarianten von X gleich den Invarianten von Y sein, und es existiren immer vier solcher Beziehungen. Diese linearen Integrale der Differentialgleichung werden nun algebraisch bestimmt. Aus der Theorie der biquadratischen Formen werden diejenigen Resultate benutzt, die Herr Hermite (Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées, J. für Math. LII) gewonnen hat. Es handelt sich schliesslich um die Zerlegung des Ausdrucks $XH_y - YH_x$ in vier Factoren von der Form $p+qx+ry+sxy$ und um die Lösung der Gleichung $4u^3 - Su - T = 0$. Man kann auch die Lösung des Problems direct von einer Gleichung vierten Grades abhängig machen. Dies wird gezeigt, nachdem der besondere Fall betrachtet worden ist, wo in der Euler'schen Gleichung $a_i = b_i$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ ist.

M.

J. G. Ptaschitzky. Ueber die endliche Integration der elliptischen Differentiale. St. Petersburg. 1888. (Russisch.)

Die vorliegende Arbeit bezweckt, sowohl die früheren Arbeiten über die Integration der elliptischen Differentiale in endlicher Form, als auch die eigenen Untersuchungen des Herrn Verfassers über diesen Gegenstand auseinander zu setzen. Demgemäss wird diese Arbeit in fünf Capitel geteilt.

Das erste Capitel ist den Untersuchungen von Liouville und Tschebyscheff gewidmet, welche sich auf die endliche Integration der elliptischen Differentiale und auf die Reduction der ellipti-

schen Integrale auf die Form $\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}$ beziehen.

Im zweiten Capitel wird mit einigen Vereinfachungen die Methode von Abel betreffs der Lösung der Frage entwickelt, ob das Integral $\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}$ in endlicher Form dargestellt werden kann.

Das dritte Capitel enthält die eigene Methode des Verfassers. Bei ihr wird das gegebene Integral in die Form gebracht:

$$J = \int \left[\frac{\sqrt{S(b)}}{z-b} + B\right] \frac{dz}{\sqrt{S}},$$

wo S ein Polynom dritten Grades ist. Von diesem Integrale ausgehend, bildet der Verfasser eine gewisse Reihe von Integralen $J_1, J_2, J_3, \dots, J_{i-1}, J_i, \dots$ Damit das Integral J bei einem gegebenen Werte von B sich in endlicher Form ausdrücken lasse, ist es notwendig und hinreichend, dass die Reihe der Integrale J eine endliche oder periodische sei.

Das vierte und das fünfte Capitel enthalten die Ableitung der Ergänzungen zu den Kriterien der Integrabilität. Diese Ergänzungen sind teils von Tschebycheff und Zolotareff, teils vom Verfasser selbst gefunden. Wi.

G. H. Halphen. Sur l'équation d'Euler. Palermo Rend. II. 40-44.

Bericht auf S. 336 dieses Bandes.

W. Heymann. Bemerkung über elliptische Integrale. J. für Math. CIII. 87-88.

W. Heymann. Note über das elliptische Integral mit complexem Modul. Schlömilch Z. XXXIII. 313-314.

L. Saalschütz. Das elliptische Integral erster Gattung mit complexem Modul. Schlömilch Z. XXXIII. 311-313.

Durch Untersuchungen über hyperelliptische Integrale („Beiträge zur Transformation der hyperelliptischen Integrale", Schlömilch Z. XXXIII. 31-55, siehe Abschn. VII, 2 C) ist Herr Heymann auf folgende Formel für das elliptische Integral erster Gattung mit complexem Modul geführt worden:

$$\int^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-(e+fi)u^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2f}}\int_0^w \frac{(1+wi)dw}{\sqrt{w\left(1+\frac{2e}{f}w-w^2\right)\left(1+\frac{2(e-1)}{f}w-w^2\right)}},$$

wo u und w durch die Gleichung

$$\frac{1}{u^2} = \frac{f}{2w}\left(1+\frac{2e}{f}w-w^2\right)$$

verbunden sind. Da sich die Entwickelung für $f=0$ nicht unmittelbar als reell erweist, so wird die obige Formel in der zweiten Note durch Einführung einer neuen Veränderlichen $v = -fw$ in folgende übergeführt:

$$\int^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-(e+fi)u^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_v^{v_1} \frac{(v+fi)\,dv}{\sqrt{v(v^2+2ev-f^2)(v^2+2(e-1)v-f^2)}},$$

wo u und v durch die Gleichung

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{2v}(v^2+2ev-f^2)$$

verbunden sind, und welche Formel nun auch gilt, wenn f verschwindet.

Herr Saalschütz hat direct eine ähnliche Formel für die Zerlegung des elliptischen Integrals

$$J = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-(\alpha+\beta i)x^2)}},$$

worin x reell, positiv und $\leqq 1$ ist, in einen reellen und einen rein imaginären Teil erhalten. Es wird für

$$x^2 = \frac{2(v-\alpha)}{v^2-\alpha^2-\beta^2}:$$

$$J = \int_v^\infty \frac{(v-\alpha+i\beta)dv}{\sqrt{2(v-\alpha)(v^2-\alpha^2-\beta^2)(v^2-\alpha^2-\beta^2-2(v-\alpha))}}.$$

In gleicher Weise hat man für das Integral zweiter Gattung, wenn die Grenzen x_0 und v_0, x_1 und v_1 einander entsprechen,

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1-(\alpha+\beta i)x^2}}{\sqrt{\pm(1-x^2)}}dx$$
$$=\int_{v_1}^{v_0}\frac{(v-\alpha)^2+\beta^2}{v^2-\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{(v-\alpha-i\beta)dv}{\sqrt{\pm 2(v-\alpha)(v^2-\alpha^2-\beta^2)(v^2-\alpha^2-\beta^2-2(v-\alpha))}}.$$

M.

G. H. Halphen. Sur les intégrales pseudo-elliptiques. C. R. CVI. 1263-1270.

Pseudo-elliptische Integrale sind von Malet (nicht, wie der Verfasser meint, von S. Günther) solche Integrale genannt, die die Form elliptischer Integrale

$$\int f(x,\sqrt{R(x)})\,dx$$

haben, sich aber auf algebraische oder logarithmische Functionen zurückführen lassen (s. F. d. M. 1882. XIV. 377). Einzelne derselben sind verschiedentlich untersucht worden. Abel suchte alle Differentiale von der Form $Ldx:\sqrt{X}$ (wo L und X ganze Functionen von x), deren Integrale auf eine Function von der Form $\log\frac{P-\sqrt{X}}{P+\sqrt{X}}$ zurückführbar sind (Oeuvres, 2e éd. I. 104). Halphen giebt hier eine Methode, nach der alle pseudo-elliptischen Integrale $\int\frac{Ldx}{\sqrt{X}}$ gewonnen werden können; er beschränkt sich zwar auf den Fall, wo X vom dritten oder vierten Grade ist, doch gilt seine Methode auch allgemein. Ausser der in der Lösung von Abel auftretenden Kettenbruchentwickelung nach fallenden Potenzen wird hier die folgende nach steigenden Potenzen:

$$\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}=\alpha_1+\cfrac{\beta_2(x-\xi)^2}{\alpha_2+\cfrac{\beta_3(x-\xi)^2}{\alpha_3+\cdots}},$$

wo die α vom ersten Grade in x sind, betrachtet. Eine Reduction erfährt nun zunächst das Problem durch den Satz: „Ist R

eine rationale Function von x und X ein Polynom vierten (oder dritten) Grades, so kann man eine rationale Function Q finden, so dass die Differenz

$$L = R - \sqrt{X}\,\frac{d}{dx}(Q\sqrt{X}),$$

die ebenfalls rational ist, im Nenner nur einfache und von denen des X verschiedene Wurzeln hat, und dass der Grad des Zählers den des Nenners höchstens um zwei übersteigt." Damit nun das Integral $L:\sqrt{X}$ ein pseudo-elliptisches sei, ist es notwendig, dass der Grad des Zählers von L den des Nenners höchstens um eine Einheit übersteigt, und dass L, in einfache Brüche zerlegt, die Form

$$L = \frac{n_1\sqrt{X_1}}{x-x_1} + \frac{n_2\sqrt{X_2}}{x-x_2} + \cdots + n\sqrt{a_0}\,x + K$$

hat, wo die $n_1, n_2, \ldots, n$ ganze Zahlen, X_p das Polynom X für $x = x_p$ und K eine Constante bedeuten. Aber diese Bedingungen sind nicht hinreichend. Es müssen noch die Grössen $x_1, x_2, \ldots$ und K zwei Bedingungen genügen, welche die Theorie der elliptischen Functionen leicht ergiebt, und die hier in rein algebraische Form gekleidet werden. M.

J. C. Malet. On certain definite integrals. Annali di Mat. (2) XVI. 277-290.

Bericht auf S. 303 dieses Bandes.

W. Láska. Reduction einiger Integrale. Hoppe Arch. (2) VII. 110-112.

Bericht auf S. 296 dieses Bandes.

A. Kneser. Elementarer Beweis für die Darstellbarkeit der elliptischen Functionen als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen. Math. Ann. XXXII. 309-330.

Es sei $x = \operatorname{sn} u$ durch die Gleichung

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

als eindeutige und stetige Function von u für alle reellen Werte (U) dieser Grösse definirt, deren absoluter Betrag eine hinreichend klein gewählte positive Grösse nicht übersteigt; dann besteht die Differentialgleichung

$$(\operatorname{sn}' u)^2 = (1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u),$$

und es ist

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u.$$

Nun sei für Grössen u, v, $u+v$ innerhalb des Gebietes (U) das Additionstheorem für $\operatorname{sn}(u+v)$ bewiesen und daraus nach der Schellbach'schen Methode das Additionstheorem für die Integrale zweiter Gattung hergeleitet. Dann lassen sich nach Jacobi $Z(u)$, $\Theta(u)$ und $H(u)$ auch für das Gebiet (U) definiren. Aus den Formeln für $Z(u+v)$ und $Z(u-v)$ erhält man, wie Herr Tichomandritzky gezeigt hat (Math. Ann. XXII. 452),

$$\Theta^2(0)\,\Theta(u+v)\,\Theta(u-v) = \Theta^2(u)\,\Theta^2(v)\,(1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v),$$

und hieraus durch die Substitution

$$\operatorname{sn} w = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(w)}{\Theta(w)}$$

(Fundam. § 61) das Resultat:

$$\Theta^2(0)\,H(u+v)\,H(u-v) = H^2(u)\Theta^2(v) - H^2(v)\,\Theta^2(u),$$

und wenn auch $2u$ dem Gebiete (U) angehört, die Gleichungen:

$$(13)\quad \begin{cases} H'(0)\,\Theta^2(0) H(2u) = 2H(u)\Theta(u)[\Theta(u)H'(u) - H(u)\Theta'(u)], \\ \Theta^4(0)\,\Theta(2u) = \Theta^4(u) - H^4(u). \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass die Potenzreihen, welche für $\Theta(u)$ und $H(u)$ erhalten werden, über das Gebiet hinaus, für welches diese Functionen zunächst definirt sind, beständig convergiren, dass also $\operatorname{sn} u$ sich als Quotient zweier beständig convergenten Potenzreihen darstellen lässt. Zweck der vorliegenden Abhandlung ist nun, die analytischen Sätze, welche die an die Gleichungen (13) geknüpfte Schlussweise benutzten, entbehrlich zu machen, da deren strenge Begründung genauere Untersuchungen über Summen von unendlich vielen Potenzreihen voraussetzt. Es werden deshalb

die folgenden elementaren Sätze über convergente Potenzreihen, d. h. über solche nach Potenzen von u fortschreitenden Potenzreihen, welche für alle von Null verschiedenen Werte von u convergiren, aufgestellt:

(I) „Eine convergente Potenzreihe verschwindet nur dann für alle reellen, dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegenden Werte des Arguments, wenn die sämtlichen Coefficienten den Wert Null haben.

(II) Eine endliche Anzahl nach Potenzen einer und derselben Grösse fortschreitender, in irgend einem Bereich (U) convergenter Potenzreihen können wie endliche Summen addirt, subtrahirt und multiplicirt werden, und ergeben als Resultat einer endlichen Anzahl solcher Operationen eine im Bereich (U) convergente Potenzreihe.

(III) Eine convergente Potenzreihe kann gliedweise differenzirt und integrirt werden; Ableitung und Integral sind ebenfalls convergente Potenzreihen.

(IV) Der Convergenzkreis einer Potenzreihe ist nicht grösser als der ihrer Ableitung.

(V) Zu einer beliebig gegebenen convergenten Potenzreihe $\varphi(u)$ kann eine zweite $f(u)$ gefunden werden, welche gleichfalls convergent ist und der Gleichung

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \varphi(u)$$

genügt".

Diese Sätze genügen, um die Entwickelbarkeit von $\operatorname{sn} u$ in eine convergente Potenzreihe nachzuweisen. Alsdann geben die Sätze (II) und (III) auch die Entwickelbarkeit von $\operatorname{sn}^2 u$ und $Z(u)$, ferner Satz (V) die einer Potenzreihe $f(u)$, welche der Gleichung genügt:

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = Z(u);$$

diese Function wird aber durch passende Bestimmung des willkürlichen Factors gleich $\Theta(u)$. Aus Satz (II) folgt dann, dass auch

$$H(u) = \sqrt{k} \operatorname{sn} u \,.\, \Theta(u)$$

in eine convergente Potenzreihe entwickelt werden kann. Nun ersetzt man in den Gleichungen (13) u durch $\frac{u}{2}$, so folgt aus (I), dass diese Gleichungen nach Einsetzen der Potenzreihen für Θ und H identisch bestehen. Durch Wiederholung des Verfahrens lässt sich zeigen, dass die Reihen für $\Theta(u)$ und $H(u)$ beständig convergiren. Jetzt erklärt man diese Functionen, die ursprünglich nur für das Gebiet (U) definirt waren, durch die Potenzreihenausdrücke für beliebige complexe Argumente, dann liefern die Gleichungen

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

unmittelbar die allgemeinen Functionen $\operatorname{sn} u$ und $Z(u)$. Satz (I) ergiebt die Gültigkeit der Gleichung

$$(H(u)\,\Theta'(u) - H'(u)\,\Theta(u))^2 = (k\Theta^2(u) - H^2(u))\,(\Theta^2(u) - kH^2(u))$$

für jeden Wert von u, mithin genügt auch die allgemeine Function $\operatorname{sn} u$ der Differentialgleichung

$$(\operatorname{sn}' u)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

und aus dieser kann durch Differentiiren und Integriren das Additionstheorem hergeleitet werden, so dass dasselbe auch für beliebige Argumente Gültigkeit hat.

In den folgenden Paragraphen werden die analogen Entwickelungen für die Functionen $\wp u$, ζu, σu durchgeführt.

M.

P. Appell. Sur les équations linéaires intégrables à l'aide de la fonction $\chi_m(x, y)$. Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. 211-218.

Herr Hermite nennt bekanntlich doppeltperiodische Functionen dritter Gattung solche, die den Gleichungen

$$\varphi(u + 2\omega) = \varphi(u)e^{cu+h}, \quad \varphi(u + 2\omega') = \varphi(u)e^{c'u+h'}$$

genügen. Aus ihnen gehen die der ersten Gattung hervor, wenn man $c = c' = h = h' = 0$ setzt, die der zweiten Gattung, wenn $c = c' = 0$ gesetzt wird. Ihre allgemeine Form ist

$$\varphi(u) = Ce^{\frac{c'\eta - c\eta'}{2\pi i}u^2 + \beta u}\, \Pi\{\sigma(u - v)\}^l,$$

wo die l ganze Zahlen bedeuten, deren Summe $\frac{c'\eta - c\eta'}{\pi i}$ ist (Halphen, Traité des fonctions elliptiques, I. 462). Die Zerlegung ler doppeltperiodischen Functionen dritter Gattung in einfache Elemente und die Entwickelung dieser Functionen in Reihen ist Herrn Appell gelungen durch Einführung der Function

$$\chi_m(x,y) = \frac{\pi}{2K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{mnyi}{K}} q^{mn(n-1)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-y-2niK')$$

weier Variabeln. (Siehe Ann. de l'Éc. Norm. (3) I. 135, II. 9, II. 9; F. d. M. XV. 1883. 340, XVI. 1884. 383, XVII. 1885. 09, XVIII. 1886. 385).

Im Vorliegenden wird eine lineare Differentialgleichung mit weitem Gliede aufgestellt, deren Coefficienten aus Functionen ϑ und deren Ableitungen zusammengesetzt sind, und deren allemeines Integral durch Θ-Functionen und die Function $\chi_m(x,y)$ usgedrückt werden kann. Zunächst wird für die specielle 'unction $\chi_1(a,z)$ die Differentialgleichung gewonnen:

$$\frac{d}{dz}\chi_1(a,z) - \chi_1(a,z)\frac{d}{dz}\log g_0^{(1)}(z) = \eta'^2\frac{g_0^{(1)}(gz-a)}{g_0^{(1)}(z).H^2(a-z)},$$

o

$$g_0^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{n\pi zi}{K}} q^{n(n-1)} = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi zi}{2K}} H_1(z)$$

nd $H(z-K) = H_1(z)$ ist. Diese Differentialgleichung ist sofort ittels elementarer Methoden integrirbar. Man findet

$$\frac{g_0^{(1)}(a)}{g_0^{(1)}(z)}\chi_1(a,z) = Z(z-K) - Z(z-a) + \psi(a),$$

o die Constante $\psi(a)$ durch Entwickelung nach Potenzen von $-a)$ gefunden wird als:

$$\psi(a) = \frac{\pi i}{2K} - \frac{\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin\frac{n\pi}{K}(a-iK').$$

ach derselben Methode wird nun im Folgenden eine lineare ifferentialgleichung m^{ter} Ordnung mit zweitem Gliede gebildet, er die Function $\chi_m(a,z)$ für ein positives ganzes m genügt. iese Differentialgleichung kann auch dadurch erhalten werden, iss man die Methode der Zerlegung in einfache Elemente auf

die Function

$$\Phi(a) = e^{\frac{m\pi i}{2K}[(m+1)z-a]} \frac{H[(m+1)z-a-mK]}{H^{m+1}(a-z)}$$

anwendet, die in dem Periodenparallelogramm den Pol $a = z$ von der Ordnung $(m+1)$ besitzt. M.

Ch. Hermite. Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques. Toulouse Ann. II. C. 1-12.

Jede eindeutige Function $F(x)$ mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ und den innerhalb des Periodenrechtecks gelegenen Polen $a, b, \dots, l$ hat die Form:

$$F(x) = C + \Sigma A \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \Sigma D_x A' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \Sigma D_x^2 A'' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \cdots.$$

Die Function $\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}$, welche hier die Rolle des einfachen Elementes spielt, ist nicht doppeltperiodisch; aber ihre Ableitungen sind es, wie die Relation

$$D_x \frac{H'(x)}{H(x)} = \frac{J}{K} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}$$

zeigt. Es wird nun aber auch die erste Summe unter einer doppeltperiodischen Form dargestellt, was wegen der Bedingung $\Sigma A = A + B + C + \cdots + L = 0$ möglich ist. Der Herr Verfasser erhält folgende Form für $F(x)$:

$$F(x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x) . \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

wo $\varphi(\operatorname{sn}^2 x)$ und $\psi(\operatorname{sn}^2 x)$ rationale Functionen von $\operatorname{sn}^2 x$ bedeuten. Das zweite Glied enthält einen scheinbar singulären Punkt $x = iK'$, der sich in der Formel

$$\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}$$

findet. Dieser Nachteil war bei den einfachen Elementen $\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}$ vermieden; aber in dem besonderen Falle, wo für

eine gerade doppeltperiodische Function alle Pole einfach sind, giebt es keinen scheinbaren Pol; denn alsdann ist

$$F(x) = C + \Sigma \frac{A \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a}.$$

Dieser Fall ist nicht der einzige. Es wird im Folgenden bewiesen, dass dasselbe noch unter andern Bedingungen stattfindet, wo der Ausdruck der doppeltperiodischen Functionen eine neue Form gewinnt. Zu dem Zweck werden die Functionen betrachtet, die sich nach Addition halber Perioden bis auf das Vorzeichen wiederholen,

$$F_1(x+iK) = -F_1(x), F_2(x+K+iK') = -F_2(x), F_3(x+K) = -F_3(x).$$

Diese Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ haben als einfache Elemente die doppeltperiodischen Functionen

$$D_x \log \operatorname{sn} x,\ D_x \log \operatorname{cn} x,\ D_x \log \operatorname{dn} x$$

und zeigen keinen scheinbaren Pol. Die Integrale dieser Functionen sind pseudo-elliptische Integrale, d. h. sie lassen sich in expliciter endlicher Form durch elementare Functionen ausdrücken. Es ergeben sich hier dieselben Resultate wie in den Abhandlungen von Goursat und Raffy (s. F. d. M. XVI. 1884. 412 und XIX. 1887. 483), in denen nichts der Theorie der doppeltperiodischen Functionen entlehnt ist. Schliesslich betrachtet Herr Hermite die Functionen $\Phi(x)$ mit den Perioden $4K$ und $4iK'$ und zeigt, dass dieselben sich als rationale Functionen von $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ und $\operatorname{dn} x$ darstellen lassen. Es ergiebt sich

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x)$$

und

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x) &= \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,\\
\Phi_1(x) &= \varphi_1(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x + \psi_1(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,\\
\Phi_2(x) &= \varphi_2(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{cn} x + \psi_2(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x,\\
\Phi_3(x) &= \varphi_3(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{dn} x + \psi_3(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x,
\end{aligned}$$

wo die φ und ψ rationale Functionen bezeichnen. Setzt man

$$\Psi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x)$$

und

$$\begin{aligned}
2\Psi_1(x) &= \Psi(x) + \Psi(x+2iK'),\\
2\Psi_2(x) &= \Psi(x) + \Psi(x+2K+2iK'),\\
2\Psi_3(x) &= \Psi(x) + \Psi(x+2K),
\end{aligned}$$

so haben die Functionen $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, $\Psi_3(x)$ die charakteristischen Eigenschaften der Functionen $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$. M.

M. Krause und G. Mohrmann. Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen. Math. Ann. XXXII. 331-341.

Die Reihenentwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art, bei denen die Zahl der Nullpunkte grösser ist als die der Unendliche, ist von Herrn Krause zurückgeführt auf das Problem, die Grössen

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv+na,\, n\tau)}{\vartheta_\beta(v,\tau)}$$

zu entwickeln (Math. Ann. XXX. 425-436 und 516-534; s. F. d. M. XIX. 1887. 448). Die beiden indirecten Lösungen, welche in den früheren Arbeiten gegeben wurden, sollen hier durch drei directe Lösungen desselben Problems ersetzt werden. Die erste beruht auf den Eigenschaften der complexen Integrale. Es wird nämlich das Integral

$$a_x = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(v)\,.\, e^{-2k\pi i v}\, dv$$

ausgewertet, das in der Function

$$\varphi(v) = \frac{\vartheta_0(nv+na,\, n\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} a_x e^{2x\pi i v}$$

vorkommt. Ist dies geschehen, so ergiebt sich mit Hülfe von Recursionsformeln die Entwickelung in trigonometrische Reihen in expliciter Form. Die zweite und dritte Methode können als Verallgemeinerung der Methode des Herrn Biehler angesehen werden; sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie mit ganz elementaren Mitteln operiren. Aus den fertigen Formeln kann man durch Specialisirung die Entwickelungen der gewöhnlichen elliptischen Functionen unmittelbar ableiten. Während in der früheren Arbeit die Restfunctionen als einmal gegeben angenommen wurden, gelangt der Herr Verfasser hier naturgemäss und systematisch zu der Definition und der Darstellung derselben. Die Durchführung der beiden ersten Methoden rührt von

Herrn Mohrmann her. Die dritte Methode ist nur für die Functionen zweiter Art durchgeführt. M.

M. Krause. Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen. (Dritte Abhandlung.) Math. Ann. XXXIII. 108-118.

Mit dieser Abhandlung gelangt die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art für den Fall, dass die Zahl der Nullstellen grösser ist, als die Zahl der Unendlichkeitsstellen, zu ihrem Abschluss. Ueber die früheren Abhandlungen siehe das vorstehende Referat. Es wird die letzte directe Methode gegeben, um die Primfunctionen

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv+na, n\tau)}{\vartheta_\beta(v,\tau)}$$

in trigonometrische Reihen zu entwickeln; es beruht dieselbe im wesentlichen auf der Multiplication zweier trigonometrischen Reihen. Der Herr Verfasser beginnt mit der Aufstellung gewisser unendlicher Reihen, die später in den fertigen Ausdrücken auftreten. Es sind dies die Reihen

$$a_r = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{(r+m+\frac{1}{2})^2},$$

welche als Coefficienten in der Reihe für $\vartheta_2(v,\tau)$ vorkommen und auch in die übrigen drei Thetafunctionen und ihre Reciproken eingeführt werden. Für die Nullwerte des Arguments fliessen daraus zahlentheoretisch wichtige Formeln, wie solche früher Herr Hermite verschiedentlich aufgestellt hat. Nach dieser Einleitung wird zunächst der Fall der Functionen zweiter Art behandelt durch Multiplication der Reihen $\vartheta_1(v+a)$ und $\dfrac{\vartheta_1'}{\pi\vartheta_0(v)}$. Im dritten Paragraphen folgt der Fall $n=2$ und im vierten die Behandlung des allgemeinen Falles. Ueberall wird hier nur die Function

$$\frac{\vartheta_1(nv+na, n\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)}$$

entwickelt. Die Zusammenstellung der fertigen Formeln für alle anderen Functionen behält sich der Herr Verfasser vor.

M.

G. Mohrmann. Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der doppeltperiodischen Functionen dritter Gattung. Diss. Rostock. 56 S. 8°.

J. W. L. Glaisher. On the series which represent the twelve elliptic and the four Zeta functions. Mess. (2) XVIII. 1-84.

In dieser Abhandlung werden die verschiedenen Systeme von Reihen betrachtet, durch welche die elliptischen und die Zetafunctionen dargestellt werden können. Die sechzehn Functionen bilden ein vollständiges System. Zwar sind die Zetafunctionen nicht doppeltperiodisch wie die elliptischen Functionen; doch sind sie es beinahe, und ihnen fehlt so zu sagen nur gerade die Eigenschaft völliger doppelter Periodicität. Die vier Zetafunctionen sind wirklich erforderlich zur Vervollständigung der vier Gruppen, in welche die elliptischen Functionen sich trennen, und in der That gleichen sich die Darstellungen der elliptischen und der Zeta-Functionen so völlig in ihrem Aussehen, dass es immer ein merkwürdiger und interessanter Gegenstand ist, für den Fall jedes einzelnen Reihensystems die Weise zu betrachten, nach welcher es erkannt wird, dass die Zetareihen desselben Umfanges der Periodicität ermangeln, wie der ist, den die anderen erreichen.

Die zwölf elliptischen Functionen werden durch die Symbole bezeichnet sn, cn, dn; ns, ds, cs; dc, nc, sc; cd, sd, nd, und die vier Zetafunctionen durch zn, zs, zc, zd. Die gewonnenen Reihen stellen die sechzehn Functionen dar:

$$\begin{array}{cccc}
\varrho\,\mathrm{ns}\,u, & \varrho\,\mathrm{dc}\,u, & k\varrho\,\mathrm{cd}\,u, & k\varrho\,\mathrm{sn}\,u, \\
\varrho\,\mathrm{ds}\,u, & k'\varrho\,\mathrm{nc}\,u, & kk'\varrho\,\mathrm{sd}\,u, & k\varrho\,\mathrm{cn}\,u, \\
\varrho\,\mathrm{cs}\,u, & k'\varrho\,\mathrm{sc}\,u, & k'\varrho\,\mathrm{nd}\,u, & \varrho\,\mathrm{dn}\,u, \\
\varrho\,\mathrm{zs}\,u, & \varrho\,\mathrm{zc}\,u, & \varrho\,\mathrm{zd}\,u, & \varrho\,\mathrm{zn}\,u,
\end{array}$$

wo $\varrho = 2K/\pi$ und $u = \varrho x$. Folgendes sind die Formen der hauptsächlichsten betrachteten Reihen:

1) Reihen, die nach Potenzen von q fortschreiten. Z. B., wenn man die erste Gruppe nimmt:

$$\varrho \operatorname{ns} \varrho x = \operatorname{cec} x + 4 \sum_1^\infty \Delta(\sin nx) q^n,$$
$$\varrho \operatorname{ds} \varrho x = \operatorname{cec} x + 4 \sum_1^\infty (-1)^n \Delta(\sin nx) q^n,$$
$$\varrho \operatorname{cs} \varrho x = \cot x - 4 \sum_1^\infty \zeta'(\sin 2nx) q^{2n},$$
$$\varrho \operatorname{zs} \varrho x = \cot x + 4 \sum_1^\infty \sigma(\sin 2nx) q^{2n},$$

worin Δ, ζ', ... Functionen bedeuten, welche von den Teilern von n abhängen (z. B. $\Delta\varphi(n) = \varphi(\delta_1) + \varphi(\delta_2) + \cdots$, wenn δ_1, δ_2, ... die ungeraden Teiler von n sind); die Function cec x ist $= 1/\sin x = \operatorname{cosec} x$.

Die Coefficienten der Potenzen von q werden auch in verschiedenen anderen Formen ausgedrückt.

2) Reihen aus den reciproken Werten der Kreisfunctionen, wie:

$$\varrho \operatorname{ns} \varrho x = \sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cec}(x + ni\mu),$$
$$\varrho \operatorname{ds} \varrho x = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \operatorname{cec}(x + ni\mu),$$
$$\varrho \operatorname{cs} \varrho x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cot(x + ni\mu),$$
$$\varrho \operatorname{zs} \varrho x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cot(x + ni\mu),$$

wo μ für $\pi K'/K$ steht. Die entsprechenden Reihen mit hyperbolischen Functionen werden auch gegeben.

3) Reihen, die aus den gewöhnlichen q-Reihen abgeleitet sind, wie z. B.:

$$k \varrho \operatorname{sn} \varrho x = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{\sinh \frac{1}{2} m\mu},$$
$$k \varrho \operatorname{cn} \varrho x = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{\cosh \frac{1}{2} m\mu},$$
$$\varrho \operatorname{dn} \varrho x = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{\cosh n\mu},$$
$$\varrho \operatorname{zn} \varrho x = \frac{-2x}{\mu} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{\sinh n\mu},$$

worin m irgend eine ungerade Zahl bedeutet und sinh, cosh den hyperbolischen Sinus und Cosinus bezeichnen.

4) Reihen, die nach Potenzen von x fortschreiten, indem die Coefficienten in Gliedern mit k^2 ausgedrückt werden, so wie:

$$\begin{aligned} \mathrm{ns}\,x &= x^{-1} + \Sigma_1^\infty \chi_n(1, k^2) x_{2n-1}, \\ \mathrm{ds}\,x &= x^{-1} + \Sigma_1^\infty \chi_n(k'^2, -k^2) x_{2n-1}, \\ \mathrm{cs}\,x &= x^{-1} + \Sigma_1^\infty (-1)^n \chi_n(1, k'^2) x_{2n-1}, \\ \mathrm{zs}\,x &= x^{-1} - \tfrac{1}{3}(i+g+e)x - \Sigma_1^\infty F_{n-1}(1, k^2) x_{2n-1}, \end{aligned}$$

wo x_n für $x^n/n!$ steht, und χ_n, F_n, ... Functionen bedeuten, die näher betrachtet und in Tabellen gebracht werden. (Bei diesen Entwickelungen werden $\mathrm{ns}\,x$, ... statt $\varrho\,\mathrm{ns}\,\varrho x$, ... genommen.)

Obiges sind lauter einfach unendliche Reihen. Die Formen der doppelt unendlichen Reihen sind:

5) Reihen, die nach Potenzen von q und e^{ix} fortschreiten, wie:

$$\begin{aligned} \varrho\,\mathrm{ns}\,\varrho x &= \mathrm{cec}\,x + 4\Sigma_1^\infty \Sigma_1^\infty q^{\frac{1}{2}r_1 s_1} \sin s_1 x, \\ \varrho\,\mathrm{ds}\,\varrho x &= \mathrm{cec}\,x + 4\Sigma_1^\infty \Sigma_1^\infty (-1)^r q^{\frac{1}{2}r_2 s_1} \sin s_1 x, \\ \varrho\,\mathrm{cs}\,\varrho x &= \cot x + 4\Sigma_1^\infty \Sigma_1^\infty (-1)^r q^{\frac{1}{2}r_2 s_2} \sin s_2 x, \\ \varrho\,\mathrm{zs}\,\varrho x &= \cot x + 4\Sigma_1^\infty \Sigma_1^\infty q^{\frac{1}{2}r_1 s_2} \sin s_2 x, \end{aligned}$$

wo die Summationen sich auf r und s beziehen und $r_1 = 2r-1$, $r_2 = 2r$, $s_1 = 2s-1$, $s_2 = 2s$ gesetzt ist.

Die Reihen, welche nach Potenzen von q' und e^x fortschreiten, werden ebenfalls gegeben.

6) Reihen von der Form $\Sigma_{-\infty}^\infty \Sigma_{-\infty}^\infty \dfrac{e^{six}}{r\mu + si\pi}$, wie:

$$\begin{aligned} k\varrho\,\mathrm{sn}\,\varrho x &= -z\,\Sigma_{-\infty}^\infty \Sigma_{-\infty}^\infty (-1)^r \frac{z^{s_1}}{r_2\pi + s_1 i\mu}, \\ k\varrho\,\mathrm{cn}\,\varrho x &= z\,\Sigma_{-\infty}^\infty \Sigma_{-\infty}^\infty (-1)^r \frac{z^{s_1}}{r_1\pi + s_1 i\mu}, \\ \varrho\,\mathrm{dn}\,\varrho x &= -z\,\Sigma_{-\infty}^\infty \Sigma_{-\infty}^\infty (-1)^r \frac{z^{s_2}}{r_1\pi + s_2 i\mu}, \\ \varrho\,\mathrm{zn}\,\varrho x &= -z\,\Sigma_{-\infty}^\infty \Sigma_{-\infty}^\infty (-1)^r \frac{z^{s_2}}{r_2\pi + s_2 i\mu}, \end{aligned}$$

wo z für e^{ix} steht. Wir können diese Reihen auch in anderer Form ausdrücken, so z. B.:

$$k\varrho\,\mathrm{cn}\,\varrho x = -8\pi\Sigma_1^\infty \Sigma_1^\infty (-1)^r \frac{r_1 \cos s_1 x}{r_1^2\pi^2 + s_1^2\mu^2}.$$

7) Reihen von der Form $\Sigma_1^\infty \Sigma_1^\infty \frac{1}{x+r\pi+sl\mu}$, wie:

$$\varrho \operatorname{ns} \varrho x = \Sigma_{-\infty}^{\infty} \Sigma_{-\infty}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{x+\frac{1}{2}r_2\pi+\frac{1}{2}s_2 i\mu},$$

$$\varrho \operatorname{ds} \varrho x = \Sigma_{-\infty}^{\infty} \Sigma_{-\infty}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{1}{x+\frac{1}{2}r_2\pi+\frac{1}{2}s_2 i\mu},$$

$$\varrho \operatorname{cs} \varrho x = \Sigma_{-\infty}^{\infty} \Sigma_{-\infty}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{x+\frac{1}{2}r_2\pi+\frac{1}{2}s_2 i\mu},$$

$$\varrho \operatorname{zs} \varrho x = \Sigma_{-\infty}^{\infty} \Sigma_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{2}r_2\pi+\frac{1}{2}s_2 i\mu}.$$

8) Entwickelungen nach Potenzen von q und x, wie:

$$k\varrho \operatorname{sn} \varrho x = 4 \Sigma_1^\infty \Sigma_1^\infty (-1)^{t-1} \varDelta_{2t-1}(m) q^{\frac{1}{2}m} \frac{x^{2t-1}}{(2t-1)!}, \cdots,$$

worin $\varDelta_t(n)$ die Summe der t^{ten} Potenzen der ungeraden Divisoren von n bedeutet.

Die Eigenschaften solcher Functionen wie $\varDelta_t(n)$, welche die Coefficienten in den sechzehn Entwickelungen ausdrücken, werden auch betrachtet.

Der Rest der Abhandlung besteht aus Resultaten, die man durch Gleichsetzung der verschiedenen Ausdrücke gewinnt, die für die sechzehn Functionen erhalten worden sind. Wir erlangen so Werte für die sechzehn Doppelsummen von der Form

$$\Sigma\Sigma \frac{\pm 1}{(s\mu+ri\pi)^n},$$

in denen s und r beide gerade sind, oder das eine gerade, das andere ungerade, u. s. w. Diese Werte werden sowohl in Gliedern mit q als auch mit k ausgedrückt.

Indem man $\mu = \pi$ setzt, was dem Falle $k = 1/\sqrt{2}$ entspricht, erhalten wir die sechzehn Formeln in complexen Zahlen, welche den wohlbekannten Formeln entsprechen:

$$1 + \frac{1}{2^{2t}} + \frac{1}{3^{2t}} + \frac{1}{4^{2t}} + \cdots = 2^{2t-1} \frac{B_t}{(2t)!} \pi^{2t}, \text{ etc.},$$

die in ähnlicher Art aus Kreisfunctionen abzuleiten sind. Die Werte der Formeln mit den complexen Zahlen werden vermittelst der „lemniskatischen" Functionen ausgedrückt.

Die Abhandlung schliesst mit einigen Ausdrücken für die

Bernoulli'schen Zahlen in Reihenform, z. B.:

$$\frac{B_t}{t} = 4\sum_1^\infty \frac{n^{2t-1}}{e^{2n\pi}-1} = 4\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{n^{2t-1}}{e^{n\pi}+(-1)^n}$$

$$= 4\sum_1^\infty \frac{n^{2t-1}}{e^{n\pi}-(-1)^n},$$

$$(2^{2t}-1)\frac{B_t}{t} = 4\sum_1^\infty \frac{n^{2t-1}}{e^{n\pi}-(-1)^n},$$

wenn B_t die t^{te} Bernoulli'sche Zahl ist. Glr. (Lp.)

A. Cayley. On Hermite's *H*-product theorem. Mess. (2) XVIII. 104-107.

Die erwähnte Formel lautet:

$$A\frac{H(x-\alpha_1)H(x-\alpha_2)\dots H(x-\alpha_{2n})}{\Theta^{2n}(x)} = F(s^2)+\text{scd}F_1(s^2),$$

worin $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{2n}=0$; s, c, d bedeuten sn$x$, cn$x$, dn$x$, und A ist eine Constante. Der Aufsatz enthält eine allgemeine Erläuterung der Art, wie dieses Theorem gebraucht werden kann, um sn, cn, dn von $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{2n-1}$ durch die sn, cn, dn der $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}$ zu liefern. Glr. (Lp.)

Ed. Weyr. Remarque sur la décomposition des fonctions doublement périodiques en éléments simples. Darboux Bull. (2) XII. 246-248.

Durch Betrachtung der Brüche $\frac{1}{f(z)-f(\alpha_1)}$ und $\frac{f'(z)}{f(z)-f(\alpha_1)}$, wo $f(z)$ eine Function zweiter Ordnung mit den Perioden ω, ω' und den Unendlichen α, β ist, gelangt Herr Weyr zu derselben Formel

$$F(z) = C+\Sigma A\frac{\text{sn}\,z\,\text{cn}\,z\,\text{dn}\,z+\text{sn}\,a\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{\text{sn}^2 z-\text{sn}^2 a}$$

für die Zerlegung einer doppeltperiodischen Function in einfache Elemente, die Herr Hermite in dem oben S. 454 besprochenen Aufsatze gegeben hat. M.

M. Lerch. Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques. Acta Math. XII. 51-55.

Nach einer directen und einfachen Methode wird hier die Function

$$\frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)}, \text{ wo } \vartheta_0(u) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nu\pi, \ (q = e^{\tau\pi i}),$$

in eine trigonometrische Reihe entwickelt. Zunächst lässt sich diese Function, die die Periode 1 hat und in einem unendlichen Streifen zwischen zwei durch die Punkte $ux \pm \frac{\tau}{2}$ zur reellen Axe parallelen Linien endlich bleibt, ausdrücken durch eine Reihe von der Form:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) e^{2nu\pi i}, \quad \Phi_n(x) = \int_0^1 \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)} e^{-2nu\pi i}\, du.$$

Die Betrachtung dieses Integrals führt zu den Resultaten:

$$\Phi_0(x) = \int_0^1 \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)}\, du = \frac{1}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0}\frac{\vartheta_1(x)}{\sin\pi x},$$

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0}\frac{\vartheta_1(x)}{\sin\pi(x+n\tau)}$$

und

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0\frac{\vartheta_0(u+x)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nu\pi i}}{\sin\pi(x+n\tau)},$$

woraus nach einer Transformation des zweiten Gliedes folgt:

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_0(u+x)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(x)} = \frac{\pi}{\sin\pi x} + 4\pi\sum_{\substack{m=1,2,\dots\\ n=1,2,\dots}} q^{mn}\sin\pi(2nu+mx).$$

Aus diesen Resultaten ergiebt sich leicht eine Reihe interessanter Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen, die Herr Hermite entwickelt hat, und welche im zweiten Teile der Abhandlung des Herrn Lipschitz: „Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale", J. für Math. CI. 223 sich finden.

M.

L. Gegenbauer. Ueber ein Theorem des Herrn E. de Jonquières. Wien. Ber. XCVII. 82-89.

Bei der Entwickelung des elliptischen Integrals erster Gattung ist Herr E. Catalan auf eine Reihe ganzer Zahlen P_n gestossen, die der Relation

$$n^2 P_n - 8(3n^2 - 3n + 1)P_{n-1} + 128(n-1)^2 P_{n-2} = 0 \; (P_0 = 1, P_1 = 8)$$

genügen (F. d. M. XVIII. 1886. 386), und Herr E. de Jonquières hat eine allgemeine Klasse von Zahlen Q_n untersucht (F. d. M. XVII. 1885. 438), welche die Catalan'schen ganzen Zahlen P_n als specielle Fälle enthalten. Der von Herrn de Jonquières für die Zahlen Q_n (C. R. CI. 415-417) mitgeteilte Satz wird nun von Herrn Gegenbauer zu folgendem Satze verallgemeinert: „Sind die Zahlen $P_0, P_1, P_2, \ldots$ durch das Gleichungssystem:

$$P_0 = 1, \; P_1 = 2^\lambda, \; g_n P_n = \varphi_n P_{n-1} + \psi_n P_{n-2} \quad (n > 1)$$

definirt, wo

$$\varphi_n = 2^\lambda u_n, \; g_n = 2^{k_n \alpha} u_{1,n}, \quad \psi_n = 2^{2\lambda + g + \sigma_n \alpha} u_{2,n}$$

für $n = 2^\alpha u$ oder $n = 2^\alpha u + 1$, λ eine beliebige reelle, g eine ganze positive Zahl ist, $u, u_\varrho, u_{1,\varrho}, u_{2,\varrho}$ positive ungerade, $k_\varrho, \sigma_\varrho$ ganze nicht negative Zahlen sind und so beschaffen, dass für jedes m

$$P_m = 2^{\beta_m} U_m$$

ist, wo U_m eine positive ungerade Zahl vorstellt, so ist

$$\beta_{2r} = 2r\lambda - \sum_{\varrho=0}^{r-1} k_{2(r-s)-1}(2 - s_{2(r-s)-1} + s_{2(r-s)-3})$$
$$- \sum_{\varrho=0}^{r-1} k_{2(r-s)}(2 - s_{2(r-s)} + s_{2(r-s)-2}),$$

$$\beta_{2r+1} = (2r+1)\lambda - \sum_{\varrho=0}^{r-1} (k_{2(r-s)+1} + k_{2(r-s)})(2 - s_{2(r-s)+1} + s_{2(r-s)-1}),$$

wo s_m die Anzahl der von Null verschiedenen Ziffern bei der Darstellung der Zahl m im dyadischen Zahlensysteme ist, und es sind

$$U_0 = U_1 = 1, \; u_{1,n} U_n = u_n U_{n-1} + 2^{\gamma_n} u_{2,n} U_{n-2} \quad (n > 1)$$

bestimmt, wo

$$\gamma_{2r} = g + 2(\sigma_{2r-1} + k_{2r-2}) - (s_{2r} - s_{2r-2})\sigma_{2r-1} - k_{2r-2}(s_{2r-1} - s_{2r-3}),$$
$$\gamma_{2r+1} = g + (\sigma_{2r+1} + k_{2r})(2 - s_{2r+1} + s_{2r-1})$$

ist.“ Für die Segner'schen Zahlen T_n, welche angeben, auf wie viele Arten irgend ein convexes Polygon von n Seiten mit Hülfe der Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden kann, und deren er-

zeugende Function nach Binet $\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x})$ ist, besteht die Relation

$$T_n = 2^{2n} U_n,$$

wie der Herr Verfasser am Schlusse der Abhandlung erwähnt.

M.

ROLLIN A. HARRIS. On the expansion of sn x. Annals of Math. IV. 87-90.

Um die Coefficienten in der Entwickelung von sn$x$, nämlich

$$\text{sn}\,x \equiv A_0 x + A_1 x^3 + A_2 x^5 + \cdots,$$

u finden, setzt der Herr Verfasser in die Formel

$$\text{sn}(x+y)(\text{sn}\,x\,\text{cn}\,y\,\text{dn}\,y - \text{sn}\,y\,\text{cn}\,x\,\text{dn}\,x) = \text{sn}^2 x - \text{sn}^2 y$$

ie Reihen für sn$x$, sn$y$, sn$(x+y)$ und

$$\text{cn}\,x\,\text{dn}\,x = \text{sn}'x - A_0 + 3A_1 x^2 + 5A_2 x^4 + \cdots,$$

ndlich für cn$y$dn$y$ ein und setzt die auf der linken Seite sich rgebenden Coefficienten der Glieder von der Form $cx^p y^q$, wo $,q > 0$, gleich Null und vergleicht die übrigen. M.

. W. L. GLAISHER. Expressions for $\Theta(x)$ as a definite integral. Mess. (2) XVII. 152.

Vier Ausdrücke für $\Theta(x)$ als bestimmte Integrale zwischen en Grenzen 0 und ∞. Glr. (Lp.)

CH. HERMITE. Sur la transformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce. Toulouse Ann. II. G. 1-6.

Sind G, A und R ganze Functionen von x, haben A und nur einfache Factoren, und sind sie relativ prim unter sich, so ilt die Formel

$$\int \frac{G\,dx}{A^2\sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{A} + \int \frac{Q_1\,dx}{A\sqrt{R}},$$

ie leicht aus einer allgemeineren Form in des Verfassers Cours

d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris, 3e éd., p. 28 folgt. Diese Formel wird auf das elliptische Integral

$$\int \frac{\lambda^2 y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}$$

angewandt, wo $y = \frac{U}{V}$ die Jacobi'sche Transformationsformel ist, die der Gleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

genügt. Man erhält

$$\int \frac{\lambda^2 U^2 dx}{V^2 \sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{V} + \int \frac{Q_1 dx}{V\sqrt{R}},$$

und es lässt sich zeigen, dass Q_1 durch V teilbar ist, dass also das zweite Glied keine Integrale dritter Gattung mit logarithmischen Unendlichen enthält. Als Resultat der Transformation ergiebt sich

$$\int \frac{\lambda^2 U^2 dx}{V^2 \sqrt{R}} = -\frac{M^2 V' \sqrt{R}}{V} + M^2 \int \frac{(nk^2 x^2 + 2B')dx}{\sqrt{R}},$$

aus der die Jacobi'sche Formel

$$\frac{1}{M} \int \frac{\lambda^2 y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}$$
$$= -\frac{V' \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}{V} + \int \frac{(nk^2 x^2 + 2B')dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

folgt. Nachdem die Teilbarkeit der Function Q_1 durch V rein algebraisch gezeigt worden ist, werden einige interessante Folgerungen gegeben, unter anderem die Relationen:

$$4RU'V' - U(2RV'' + R'V') \equiv 0 \text{ (mod. } V),$$
$$4RU'V' - V(2RU'' + R'U') \equiv 0 \text{ (mod. } U).$$

M.

L. Kiepert. Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade. Math. Ann. XXXII. 1-135.

Es ist bekannt, dass man eine Transformation vom Grade

ab erhält, wenn man nach einander eine Transformation a^{ten} Grades und eine b^{ten} Grades ausführt. Aus diesem Grunde hat man sich bisher meist bei der wirklichen Ausführung der Rechnungen auf Transformationen, deren Grad eine Primzahl ist, beschränkt, zumal der Grad der Modulargleichung bei zusammengesetzten Transformationen noch schneller wächst, als der Transformationsgrad. Herr Kiepert zeigt nun im Vorliegenden, dass diese Beschränkung auf Primzahlgrade auch ihre Nachteile hat. Es lassen sich nämlich die algebraischen Beziehungen, auf welche es hier lediglich abgesehen ist, für den zusammengesetzten Transformationsgrad bei directer Behandlung mit weit einfacheren Mitteln gewinnen als auf dem bisherigen Umwege. Wir wissen, dass zwischen der absoluten Invariante

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

der ursprünglichen elliptischen Function und der absoluten Invariante $\bar{J}$ der transformirten Function eine Gleichung besteht, deren Rang ϱ (das Riemann'sche p) leicht bestimmt werden kann und im Verhältnis zum Grade dieser Gleichung klein ist. Daher muss es auch Hülfsgrössen ξ geben, die rationale Functionen von J und $\bar{J}$ sind und die Eigenschaft haben, dass die Gleichungen zwischen ξ und J, resp. ξ und $\bar{J}$:

$$(1) \qquad F(\xi, J) = 0, \quad F_1(\xi, \bar{J}) = 0$$

in Bezug auf J und $\bar{J}$ von niedrigerem Grade sind, als die Invarianten-Gleichung zwischen J und $\bar{J}$. Für den Fall $\varrho = 0$ vergleiche die Arbeiten von F. Klein (Math. Ann. XIV. 111-172; F. d. M. X. 1878. 69) und Gierster (ib. 537-544). Für $\varrho = 1$ giebt es sogar Hülfsgrössen, für welche die Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\bar{J}$ nur noch vom zweiten Grade sind. Durch Mittel, welche die Theorie der elliptischen Functionen selbst lieferte, ist es Herrn Kiepert gelungen, auf rein algebraischem Wege eine solche Hülfsgrösse ξ für $\varrho = 1$ und höhere Werte von ϱ zu finden, die er als „Parameter" bezeichnet. Der Grad der Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\bar{J}$ heisst der „Charakter" des Parameters ξ. Bei zusammengesetztem Transformationsgrade

ist es nun gar nicht nötig, die Gleichungen (1) herzustellen; man kann mehrere Parameter mit möglichst niedrigem Charakter bilden, die Form der Gleichungen, welche zwischen je zweien unter ihnen besteht, feststellen und die noch unbestimmten Zahlcoefficienten dadurch ausrechnen, dass man die beiden Parameter nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{2}{n}} = z$ entwickelt.

Diese Methoden werden im ersten Teile (Abschnitt 1 und 2, S. 8-54) entwickelt und die allgemeinen Eigenschaften der Transformationsgleichungen sowie der Parameter gewonnen. Der zweite Teil enthält die Anwendungen auf besondere Transformationsgrade. Und zwar werden im dritten Abschnitt die Transformationen vom Grade 2, 4, 8, 16 und allgemein 2^{α} erledigt, im vierten folgen die Grade 3, 9, 27, 81, 343 und 3^{α}; die Potenzen der Primzahlen a, die von 2 und 3 verschieden sind, besonders 5, 5^2, 5^3, 7, 7^2, folgen im fünften Abschnitt. Der sechste Abschnitt enthält die Transformationen vom Grade $2a$, besonders $n = 6$, 10, 14, 22 und 26. Mit Hülfe der Transformation vom Grade 22 liess sich auch der Fall $n = 11$ erledigen, was deutlich zeigt, dass die Lösung für zusammengesetzte Transformationen die für Primzahltransformationen erleichtert. Abschnitt 7 behandelt den Grad von der Form $4a$, insbesondere $n = 12$, 20 und 28; Abschnitt 8 die Formen $8a$, $16a$ und allgemein $2^{\alpha}a$ mit den besonderen Fällen 24, 48, 96, ..., 40, 80, ... Im neunten Abschnitt folgen die Grade $3a$, besonders 15, 21; im zehnten die Grade $9a$, besonders $n = 18$ und $n = 45$; und der letzte Abschnitt erläutert die Transformation $6a^{\text{ten}}$ Grades durch das Beispiel $n = 30$. M.

R. Russell. On $\varkappa\lambda$-$\varkappa'\lambda'$ modular equations. Lond. M. S. Proc. XIX. 90-111.

Es wird eine allgemeine Methode gegeben, die Modulargleichungen für einen beliebigen Primzahlgrad der Transformation zu erhalten. Wenn $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, so ist für $\omega = \frac{iK'}{K}$

$$\psi(\omega) = \sqrt[4]{\varkappa'} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots}$$

und

$$\varphi(\omega) = \sqrt[4]{\varkappa} = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}\,\frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+\cdots},$$

oder, wenn man nach Potenzen von q entwickelt,

$$\varphi(\omega) = \sqrt[4]{\varkappa} = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}(1-q+2q^2-3q^3+4q^4-6q^5+9q^6-12q^7 \\ +16q^8-22q^9+\cdots),$$

$$\psi(\omega) = \sqrt[4]{\varkappa'} = 1-2q+2q^2-4q^3+6q^4-8q^5+12q^6-16q^7 \\ +22q^8-30q^9+\cdots.$$

Diese Entwickelungen werden benutzt, um die Modulargleichungen für jede Primzahl n abzuleiten. Um die Relationen zwischen $\sqrt[4]{\varkappa\lambda}$ und $\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'}$, wo $\lambda = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$, $\lambda' = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$, $\varkappa'\lambda = 2\sqrt{\varkappa}\lambda'$, für $n = \frac{(1+\varkappa)x}{1+\varkappa x^2}$, zu finden, muss man q zwischen den Gleichungen

$$\sqrt[4]{\varkappa\lambda} = 2q^{\frac{n+1}{8}}(1-q+2q^2-3q^3+\cdots)(1-q^n+2q^{2n}-3q^{3n}+\cdots),$$

$$\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} = (1-2q+2q^2-4q^3+6q^4+\cdots)(1-2q^n+2q^{2n}-4q^{3n}+\cdots)$$

eliminiren. Dies geschieht durch Bestimmung der Form der Gleichung zwischen $x = (\sqrt[4]{\varkappa\lambda})^s$ und $y = (\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'})^s$. Es ist z. B. für $n = 1$, $x = \varkappa\lambda$, $y = \varkappa'\lambda'$, $P = x+y-1$, $Q = xy-x-y$, $R = -xy$ die Modulargleichung

$$P = 0;$$

für $n = 3$, $x = \sqrt{\varkappa\lambda}$, $y = \sqrt{\varkappa'\lambda'}$, und die Modulargleichung

$$P = 0;$$

für $n = 5$, $x = \varkappa\lambda$, $y = \varkappa'\lambda'$, und die Modulargleichung

$$P^3 - 32R = 0,\quad \varkappa\lambda+\varkappa'\lambda'+2\sqrt[3]{4\varkappa\lambda\varkappa'\lambda'} = 1;$$

für $n = 7$, $x = \sqrt[4]{\varkappa\lambda}$, $y = \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'}$, und die Modulargleichung

$$P = 0;$$

für $n = 11$, $x = \sqrt{\varkappa\lambda}$, $y = \sqrt{\varkappa'\lambda'}$, und die Modulargleichung

$$P^3 - 16R = 0,\quad \sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} + 2\sqrt[6]{4\varkappa\lambda\varkappa'\lambda'} = 1;$$

für $n = 23$, $x = \sqrt[4]{\varkappa\lambda}$, $y = \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'}$, und die Modulargleichung

$$P^2 - 4R = 0, \quad \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} + \sqrt[3]{4}\sqrt[4]{\varkappa\lambda\varkappa'\lambda'} = 1.$$

Der Herr Verfasser behandelt ausser den angegebenen Beispielen die Fälle $n = 13, 17, 19, 31$ und 47. M.

R. Fricke. Ueber ausgezeichnete Untergruppen in der Gruppe der elliptischen Modulfunctionen. Math. Ann. XXXI. 227-234.

Verallgemeinerung von Abschnitt I und II der Arbeit: „Ueber die ausgezeichneten Untergruppen vom Geschlechte $p = 1$, welche in der Gruppe der linearen ω-Substitutionen enthalten sind", Math. Ann. XXX. 345-400; s. F. d. M. XIX. 1887. 471.

M.

A. Cayley. A case of complex multiplication with imaginary modulus arising out of the cubic transformation in elliptic functions. Lond. M. S. Proc. XIX. 300-301.

Aus der Modulargleichung

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0$$

entspringt eine complexe Multiplication, wenn $v^8 = u^8$, da

$$y = \frac{\left(1 + \frac{2u^3}{v}\right)x + \frac{u^6}{v^2}x^3}{1 + vu^2(v + 2u^3)x^2}$$

ergiebt

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-v^8y^2)}} = \frac{\left(1 + \frac{2u^3}{v}\right)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-u^8x^2)}}.$$

Setzen wir $v = \gamma u$, wo $\gamma^8 = 1$, so erhalten wir in dem Falle $\gamma^4 = -1$ die Transformation

$$y = \frac{(\omega - \omega^2)x + \omega^2 x^3}{1 - \omega^2(\omega - \omega^2)x^2} \qquad (\omega^2 + \omega + 1 = 0)$$

und

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\omega y^2)}} = \frac{(\omega-\omega^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\omega x^2)}}$$

(wie in der „Note on the Theory of Elliptic Functions", Math. Ann. XII. 143-146), oder für den Modul $k^2 = -w$ wird

$$\operatorname{sn}(\omega-\omega^2)\vartheta = \frac{(\omega-\omega^2)\operatorname{sn}\vartheta+\omega^2\operatorname{sn}^3\vartheta}{1-\omega^2(\omega-\omega^2)\operatorname{sn}^2\vartheta}.$$ M.

H. WEBER. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Zweite Abhandlung. Acta Math. XI. 333-390.

Fortsetzung der Untersuchungen Acta Math. VI. 329-416, über welche F. d. M. XVII. 1885. 456 berichtet worden ist. Der erste Teil der vorliegenden Abhandlung (S. 334-359) enthält allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen, besonders aus der Theorie der Modulargleichungen. Die Formeln dieser Theorie werden nicht nur unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte betrachtet, sondern auch teils erweitert, teils vereinfacht. Der Herr Verfasser nimmt statt der F. Klein'schen absoluten Invariante $J(\omega)$ eines Systems doppeltperiodischer Functionen mit den Perioden $(1, \omega)$ die Grösse:

$$j(\omega) = 2^8\frac{(1-k^2k'^2)^3}{k^4k'^4} = 2^6.3^3J(\omega)$$

und statt der Invarianten g_2, g_3:

$$\gamma_2(\omega) = 3\sqrt[3]{4}\,g_2(\omega) = \sqrt[3]{j(\omega)},$$
$$\gamma_3(\omega) = 2.3^3g_3(\omega) = \sqrt{j(\omega)-2^6.3^3}.$$

Es werden in § 1 statt der Hermite'schen Functionen (Sur la théorie des équations modulaires, Paris 1859) $\varphi(\omega), \psi(\omega), \chi(\omega)$ die Functionen

$$f(\omega) = \frac{\sqrt[6]{2}}{\chi(\omega)} = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{kk'}},$$

$$f_1(\omega) = \frac{\sqrt[6]{2}\,\psi(\omega)}{\chi(\omega)} = \sqrt{2}\sqrt[12]{\frac{k'^2}{k}},$$

$$f_2(\omega) = \frac{\sqrt[6]{2}\,\varphi(\omega)}{\chi(\omega)} = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{k^2}{k'}}$$

eingeführt und die Fundamentalformeln der Transformation erster und zweiter Ordnung, sowie die für die allgemeine lineare Transformation zusammengestellt. § 2 behandelt die Transformation n^{ten} Grades, insbesondere die Invariantengleichungen und die sogenannten Schläfli'schen Modulargleichungen (s. J. für Math. LXXII) für $f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)^r$ (r ein Divisor von 24), deren Coefficienten rationale Functionen von $f(\omega)^r$ sind. In § 3 wird ein neues Princip zur Aufstellung von Transformationsgleichungen gegeben mit Hülfe rationaler Functionen $\Phi_{a,c}$ der sechs Grössen:

$$f(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega), f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right),$$

welche durch die Substitutionen

$$\left(\omega, -\frac{1}{\omega}\right), \qquad (\omega, \omega+1)$$

in einander übergehen. Im folgenden § 4 wird dieses Princip auf die Schläfli'schen Modulargleichungen anwendbar gemacht, und in § 5 auf die irrationalen Modulargleichungen. Der letzte § 6 behandelt die zusammengesetzten Transformationsgrade.

Der zweite Abschnitt (S. 359—389) enthält die Anwendungen auf die complexe Multiplication. Es werden die aus der complexen Multiplication entspringenden algebraischen Zahlen, die sogenannten singulären Moduln, unter Anwendung verschiedenartiger Methoden berechnet. Einige dieser algebraischen Zahlen finden sich schon in den älteren Arbeiten von Hermite (l. c.) und Kronecker (Berl. Monatsber. v. 26. Juni 1862). Die hier angewandten Methoden, welche alle bisher bekannten Fälle umfassen, vermehren das Material um ein Beträchtliches. Die Resultate erscheinen meist in sehr einfacher Gestalt. Der Herr Verfasser benutzt nicht, wie Hermite und Kronecker, lediglich numerische Rechnungen, sondern algebraische Umformungen und wendet die numerische Ausrechnung der Coefficienten der in

Betracht kommenden Reihen nur zur Kontrolle der Richtigkeit
und zur leichteren Auffindung rationaler Factoren an. M.

A. G. Greenhill. Complex multiplication moduli of elliptic functions. Lond. M. S. Proc. XIX. 301-364.

Die Untersuchungen des Herrn Greenhill über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen sind schon im vorigen Bande der F. d. M. (XIX. 469) erwähnt worden. Während dort die allgemeinen Formeln für die complexe Multiplication gegeben wurden, werden hier alle bisher erhaltenen numerischen Lösungen für ganze Werte der Primzahl $\Delta = \frac{k'^2}{k^2}$ gruppenweise zusammengestellt. Es werden in Bezug auf die Form von Δ vier Klassen unterschieden:

Klasse A) $\Delta \equiv 3$ (mod. 8), B) $\Delta \equiv 7$ (mod. 8), C) $\Delta \equiv 1$ (mod. 4), D) $\Delta \equiv 2$ (mod. 4), und für jede dieser Klassen wird die absolut einfachste numerische Invariante gewählt. Benutzt werden die Arbeiten von F. Klein (Math. Ann. XXVI. 1886), Sohncke (J. für Math. XVI), Schröter (Diss. 1854, J. de math. 1858, Acta Math. 1882), Hermite (Théorie des équations modulaires 1859), Klein und Kiepert (Math, Ann. XVI. 111, XXVI. 369, XXXII. 1), G. H. Stuart (Quart. J. XX. 18), E. W. Fiedler (Diss. 1885), R. Russell (Lond. M. S. Proc. 1887). Der Herr Verfasser bemerkt zuletzt, dass die inzwischen erschienene Abhandlung des Herrn H. Weber: „Zur Theorie der elliptischen Functionen“, zweite Abhandlung, (Acta Math. XI) eine Anzahl numerischer Resultate für die Modularfunctionen in der complexen Multiplication enthält, welche in vieler Hinsicht mit den hier gegebenen übereinstimmen (s. das vorige Referat). M.

W. Scheibner. Die complexe Multiplication der Thetafunctionen. Leipz. Ber. 154-162.

Es wird gezeigt, wie die complexe Multiplication der elliptischen Thetafunctionen sich sehr einfach ableiten lässt, wenn

man zwei quadratische Gleichungen mit einander verbindet, welche der nämlichen Irrationalität entsprechen. Die vier coordinirten Thetafunctionen $\Theta_\delta^\varepsilon(u, q)$ werden, wie Jacobi in seinen Vorlesungen hervorgehoben hat, durch die doppelte Functionalgleichung

$$f(u) = \delta f(u+\pi) = \varepsilon q e^{2ui} f(u+h\pi), \quad \delta^2 = \varepsilon^2 = 1, \; q = e^{h\pi i}$$

bis auf einen von u unabhängigen Factor bestimmt. Die Transformation setzt Thetafunctionen in Beziehung, deren Argumente $q = e^{h\pi i}$, $q' = e^{h'\pi i}$ durch Gleichungen von der Form

$$h' = \frac{k' + l'h}{k + lh}, \quad h = \frac{-k' + kh'}{l' - lh'}$$

verbunden sind, wo die Coefficienten ganze Zahlen sind. Die complexe Multiplication tritt ein, wenn $h = h'$ ist, oder wenn die quadratische Gleichung

$$lh^2 + (k - l')h - k' = 0$$

erfüllt ist. Damit $[q] < 1$ sei, muss

$$D = 4(kl' - lk') - (k + l')^2 > 0$$

sein, woraus folgt

$$h = \frac{l' - k}{2l} + \frac{i}{2l}\sqrt{D}.$$

Nun bestimmt der Herr Verfasser m durch die quadratische Gleichung:

$$m^2 - 2am + N = 0, \qquad N = a^2 + b^2 D,$$

in welcher a und b ganze reelle positive oder negative Zahlen sind; alsdann nehmen die beiden conjugirten Wurzeln die doppelte complexe Form an:

$$\begin{aligned} m \; &= a + bi\sqrt{D} = \alpha + \beta h, \\ m' &= a - bi\sqrt{D} = \alpha' - \beta h. \end{aligned}$$

Hierauf wird die Function

$$f(u) = e^{\frac{-2blu^2}{m\pi}} \prod_{-\frac{1}{2}(N-1)}^{\frac{1}{2}(N-1)} \Theta_\delta^\varepsilon\left(\frac{u + p\pi}{m}, q\right)$$

betrachtet, die, wie gezeigt wird, den beiden Functionalgleichungen

genügt, und die Entwickelung von $C_\delta^e \Theta_\delta^e(mu, q)$ hergestellt. Unter der Voraussetzung, dass in dem Ausdrucke

$$k'N = k'\alpha^2 - (k-l')\alpha\beta' - l\beta'^2$$

α und $\beta' = 2bk'$ keinen gemeinsamen Factor besitzen, lässt sich eine analoge Rechnung für die Function

$$f(u) = e^{\frac{-bku^2 i}{m\pi}} \Pi\, \Theta_\delta^e\left(\frac{u+ph\pi}{m}, q\right)$$

durchführen. Von Interesse sind die speciellen Fälle, in denen $k-l'$ oder α verschwinden. Am Schlusse werden die einfachsten Beispiele betrachtet:

$$h = e^{\frac{\pi i}{2}},\quad h = e^{\frac{\pi i}{3}},\quad h = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

M.

Th. Lohnstein. Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. Schlömilch Z. XXXIII. 129-136. Berichtigung. ibid. 318.

Eine neue Herleitung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{1}{1-t^2}v + \frac{3t^2-1}{t(1-t^2)}\frac{dv}{dt} + \frac{2}{v}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

welcher das arithmetisch-geometrische Mittel aus $1+t$ und $1-t$ genügt. Die Rechnung schliesst sich eng an ein Gauss'sches Fragment (Werke III. 372 ff.) an. Die Literatur über das arithmetisch-geometrische Mittel findet sich in Enneper, Elliptische Functionen, 2. Auflage 1890, S. 364. M.

Th. Lohnstein. Ueber das harmonisch-geometrische Mittel. Schlömilch Z. XXXIII. 316-318.

Bekanntlich ist das harmonische Mittel zweier Zahlengrössen x und y die Grösse $x_1 = \dfrac{2xy}{x+y}$.

Man kann nun durch Combination dieses harmonischen Mittels mit dem geometrischen einen Algorithmus entwickeln, der dem des arithmetrisch-geometrischen ganz analog ist. Es zeigt sich, dass, wenn man die Reihe von Grössenpaaren bildet:

$$x_1 = \frac{2xy}{x+y}, \quad y_1 = \sqrt{xy},$$
$$x_2 = \frac{2x_1 y_1}{x_1+y_1}, \quad y_2 = \sqrt{x_1 y_1},$$
$$x_3 = \frac{2x_2 y_2}{x_2+y_2}, \quad y_3 = \sqrt{x_2 y_2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_\nu = \frac{2x_{\nu-1} y_{\nu-1}}{x_{\nu-1}+y_{\nu-1}}, \quad y_\nu = \sqrt{x_{\nu-1} y_{\nu-1}},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

sich x_ν und y_ν für reelle und complexe x und y einer und derselben Grenze $\overline{M}(x,y)$ nähern, die das harmonisch-geometrische Mittel von x und y genannt werden kann. Dieses harmonisch-geometrische Mittel lässt sich sehr einfach durch das arithmetisch-geometrische Mittel $M(x, y)$ ausdrücken; es ist nämlich

$$M(x, y) \,.\, \overline{M}(x, y) = xy.$$

$\overline{M}(1+t, \; 1-t)$ genügt der homogenen linearen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{1+t^2}{t(1-t^2)}\frac{dw}{dt} + \frac{3+t^2}{(1-t^2)^2}w = 0.$$

M.

P. Nazimow. Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des nombres. Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. 23-48, 147-176.

Das Vorliegende ist ein Auszug aus der grossen, in russischer Sprache veröffentlichten Arbeit des Herrn Verfassers, über welche F. d. M. XVII. 1885. 139 berichtet worden ist. Von den sieben Capiteln sind hier fortgelassen Cap. II, V und VII, da sie Resultate enthalten, die aus deutschen und französischen Arbeiten hinlänglich bekannt sind. M.

E. Oekinghaus. Zur Theorie der Schliessungsprobleme. Hoppe Arch. (2) VI. 186-217.

Das Poncelet'sche Schliessungsproblem, die Bedingungen da-

für zu finden, dass ein geschlossenes n-Eck einer Curve zweiten Grades eingeschrieben und einer zweiten solchen umgeschrieben sei, ist schon mehrfach mit Hülfe der elliptischen Functionen gelöst worden. Die hier gewählte Methode geht von der Lagrange'schen Relation aus, die sich auf das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Art bezieht, da ihre die Amplituden dieser Integrale enthaltenden Ausdrücke Producte von Wurzelwerten bestimmter Gleichungen darstellen, welche jene Relation in eine Kegelschnitts- oder höhere Gleichung transformiren. Es ergeben sich bei dieser Gelegenheit bemerkenswerte Beziehungen zwischen confocalen Ellipsen. Auch eine neue geometrische Darstellung der Addition der elliptischen Integrale wird gewonnen. Endlich wird auf die Analogie gewisser hier auftretender Integrale mit den aus der Pendelbewegung resultirenden hingewiesen. M.

G. B. Mathews. Some applications of elliptic functions to the theory of twisted. Lond. M. S. Proc. XIX. 507-520.

Die allgemeine Theorie der Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen, wurde behandelt von Clebsch (J. für Math. LXIV. 210-270) und F. Klein („Ueber die elliptischen Normalcurven der n^{ten} Ordnung“, Leipz. Abh. 1885, s. F. d. M. XVII. 1885. 453). Die specielle Anwendung auf Raumcurven vierter Ordnung machten Laguerre (Journ. de Math. (2) XV. 193), A. Harnack (Math. Ann. XII. 47: „Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppeltperiodische Functionen“, und Math. Ann. XV. 560: „Notiz über die algebraische Parameterdarstellung der Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung“), Westphal („Ueber das simultane System zweier quaternären Formen zweiten Grades und eine allgemeine algebraische Parameterdarstellung der Raumcurve vierter Ordnung $p = 1$“, Math. Ann. XIII. 1), und E. Lange („Die sechzehn Wendeberührungspunkte der Raumcurve vierter Ordnung

erster Species“, Schlömilch Z. XXVIII. 1-23 u. 65-82; s. F. d. M. XV. 1883. 720). Hier wird die Weierstrass'sche Function $\wp u$ angewandt, um einige Eigenschaften dieser Raumcurven vierter Ordnung einfach darzustellen. Der Ort (x, y, z, t) wird angenommen als Durchschnitt der Flächen

$$S \equiv x^2 - 4yz + g_2 zt + g_3 t^2 = 0,$$
$$V \equiv z^2 - yt = 0.$$

Es wird das Tetraeder betrachtet, das durch die Ebenen

$$\mu X = x = 0,\ \mu Y = y - 2e_1 z - (e_1^2 + e_2 e_3)t,\ \mu Z = y - 2e_2 z - (e_2^2 - e_3 e_1)t,$$
$$\mu T = y - 2e_3 z - (e_3^2 + e_1 e_2)t$$

gebildet wird, nach der Methode von Klein. Es giebt 32 Collineationen, welche die Curve vierter Ordnung in sich selbst transformiren; diese werden gruppirt. Ferner werden die Linien uv untersucht, wo u, v die Parameter irgend zweier Punkte auf der Raumcurve, und die Fälle $u+v = \pm a$, $u-v = a$ betrachtet. Alsdann wird die Frage der Quadricuspidalen erörtert, nach de la Gournerie („Recherches sur les surfaces tétraédrales symétriques“). Der specielle Fall $v \equiv u$ wird betrachtet, dann der, wo $v \equiv u + a$, und die Gleichung des Complexes aufgestellt, der von allen die Curve einmal schneidenden Geraden gebildet wird.

M.

E. Padova. Una nuova applicazione della teoria delle funzioni ellittiche alla meccanica. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV. 507-509.

Es wird folgendes Problem behandelt: „Eine Kugel mit dem Mittelpunkt S sei gezwungen, auf einer horizontalen Ebene zu bleiben, auf der sie rollen aber nicht gleiten darf; die Masse derselben sei so verteilt, dass der Schwerpunkt in S liegt und die Hauptträgheitsmomente einander gleich sind. Im Punkte C der Kugel wirke eine verticale constante Kraft P, es soll die Bewegung der Kugel, die anfangs mit irgend einer Geschwindigkeit behaftet sei, bestimmt werden.“ Die Lösung führt auf eine elliptische Function der Zeit.

M.

F. Caspary. Sur une manière d'exprimer, au moyen des fonctions thêta d'un seul argument, les coefficients de trois systèmes orthogonaux dont un est composé des deux autres. C. R. CVII. 859-862.

F. Caspary. Sur l'application des fonctions thêta d'un seul argument aux problèmes de la rotation. C. R. CVII. 901-903, 937-938.

Jacobi hat in seiner berühmten Abhandlung „Sur la rotation d'un corps" J. für Math. XXXIX. 293; Ges. Werke II. 291, die neun Coefficienten eines orthogonalen Systems durch elliptische Thetafunctionen ausgedrückt und daraus die Lösung des Problems der Rotation eines festen Körpers, auf den keine beschleunigenden Kräfte wirken, abgeleitet. Lottner hat dann die Rotation eines schweren Umdrehungskörpers bestimmt, der in einem Punkte seiner Axe aufgehängt ist (J. für Math. L. 113). Die von Lottner gegebenen Ausdrücke der neun Coefficienten finden sich in einer nur wenig veränderten Form auch in einem hinterlassenen Manuscripte Jacobi's (Ges. Werke II. 493), das überdies wichtige Transformationen dieser Ausdrücke enthält. Später sind die Arbeiten Jacobi's Ausgangspunkt der Untersuchungen anderer Mathematiker geworden, wie Hermite, Halphen,' Darboux und Hess. Im Vorliegenden werden diese Resultate aus reinen Identitäten hergeleitet. Es lassen sich nämlich sehr einfach die Coefficienten dreier orthogonalen Systeme, deren eines aus den beiden andern zusammengesetzt ist, identisch durch elliptische Thetafunctionen ausdrücken, welche von vier, bez. zwei beliebigen Variabeln abhängen. Setzt man diese Variabeln teils constant, teils gleich linearen Functionen der Zeit, so ergeben sich die erwähnten Resultate. Bei der Anwendung seiner Formeln auf das Problem der Rotation eines festen Körpers, der durch keine beschleunigende Kraft beeinflusst wird, gelangt Herr Caspary zu denselben Formeln, die Herr Hermite in seinem Werke: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques", Paris 1886, p. 27, 34, 35, 44) gewonnen hat. Aus ihnen aber gehen die Jacobi'schen Formeln (Ges. Werke II. 293, 308, 321) durch ein-

fache Transformation hervor. Auf das Problem der Rotation eines schweren Umdrehungskörpers, der in einem Punkt seiner Axe befestigt ist, werden dann die in der ersten Note gewonnenen Ausdrücke ebenfalls angewandt. Herr Caspary gelangt so zu den Lottner-Jacobi'schen Resultaten (J. für Math. L. 113; Jacobi, Ges. Werke, II. 505, 507-511) und zu den Formeln von Dumas für das konische Pendel (J. für Math. L. 67), die von Hermite (l. c. 112) in eine elegantere Form gebracht sind.

M.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

C. Guichard. Sur les intégrales $\int \frac{G(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$.

Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. 193-210.

Stellt $G(x)$ eine ganze Function und $R(x)$ das Polynom $(1-a_1 x)(1-a_2 x)\dots(1-a_{2p+2}x)$ vor, so kann man das Integral, um seine Perioden zu bestimmen, vorerst in zwei Teile zerlegen, von denen der eine keine Periode hat und unmittelbar integrabel ist, während der andere das Integral eines algebraischen Differentials darstellt.

Sind $A_1, A_2, \dots, A_{2p+2}$ die Werte des Integrals

$$u = \int_0^x \frac{G(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

längs der vom Anfangspunkte um die Punkte $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_{2p+1}}$ laufenden Schleifen, und bezeichnet u_1 den Wert, welchen das Integral auf irgend einem Wege von Null bis x annimmt, so sind seine Werte enthalten in den beiden Formeln:

$$u_1 + m_1(A_2-A_1) + m_2(A_3-A_1) + \dots + m_{2p+1}(A_{2p}-A_1)$$

und

$$A_1 - u_1 + n_1(A_2-A_1) + n_2(A_3-A_1) + \dots + n_{2p+1}(A_{2p+2}-A_1),$$

wo m und n ganze positive oder negative Zahlen sind. Also hat das Integral im allgemeinen $2p+1$ Perioden:

$$\omega_i = A_{i+1} - A_1 \quad (i = 1, 2, \dots, 2p+1).$$

Diese Perioden können willkürlich gewählt werden, wenn man $G(x)$ entsprechend wählt.

Macht man speciell $G(x) = \frac{1}{2}R'(x)\varphi(x) + R(x)\varphi'(x)$, wo $\varphi(x)$ eine ganze Function von x bezeichnet, so hat das Integral keine Periode. Sind jetzt $b_{q,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2p+1)$ die Perioden des Integrals

$$u_q = \int^{x} \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt{R(x)}},$$

und ist die Determinante Δ der $b_{q,i}$ von Null verschieden, so kann man immer $2p+1$ Grössen λ_a so bestimmen, dass

$$w_i = \lambda_1 b_{1,i} + \lambda_2 b_{2,i} + \cdots + \lambda_{2p+1} b_{2p+1,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p+1)$$

wird; dann hat das Integral

$$\int \frac{G(x) - \lambda_1 - \lambda_2 x - \ldots - \lambda_{2p+1}x^{2p}}{\sqrt{R(x)}} dx$$

den Wert $\varphi(x)\sqrt{R(x)}$, folglich keine Periode, und daraus folgt:

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{2p+1}u_{2p+1} + \varphi(x)\sqrt{R(x)}$$

und

$$G(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \cdots + \lambda_{2p+1}x^{2p} + \frac{1}{2}R'(x)\varphi(x) + R(x)\varphi'(x),$$

womit die Zerlegung erreicht ist, sobald die Constanten λ_a berechnet sind, wofür der Verfasser eine Methode angiebt. Dieses Resultat wird zur Untersuchung der Fälle von einer und von zwei Perioden benutzt. Der erste Fall enthält folgende zwei Aufgaben:

a) Alle jene Functionen eines Punktes der Curve $y^2 = R(x)$ zu finden, die nirgends zu Null werden. (Functionen, die nur im Unendlichen singuläre Punkte haben.)

b) Alle Paare von ganzen Functionen X und Y zu bestimmen, die der Gleichung $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ genügen, oder mit anderen Worten: alle ganzen Transformationen eines Kreises in eine algebraische Curve zu bestimmen.

Ad a). Bezeichnet $F(x)$ eine solche Function, so ist dieselbe immer von der Form:

$$F(x) = e^{\int f_1(x)dx} \cdot e^{\varphi(x)\sqrt{R(x)} + \sqrt{-1}\Sigma_i m_i v_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p+1),$$

wo $f_1(x)$ eine ganze Function von x ist, und die v_i solche

speciellen Integrale u_q sind, die nur eine Periode 2π haben.

Ad b). Die allgemeinsten Functionen, die die Lösung bilden, sind:

$$X = \varphi\cos\lambda(x) - y\psi\sin\lambda(x),$$
$$Y = \varphi\sin\lambda(x) + y\psi\cos\lambda(x),$$

wo $\lambda(x)$ eine ganze Function von x ist, und φ die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}} = \frac{G(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

befriedigt, während

$$\psi^2 = \frac{1-\varphi^2}{R(x)}$$

ist.

Der Autor giebt eine Methode an, alle ganzen Functionen φ zu bestimmen, welche dieser Differentialgleichung genügen.

Zweiter Fall. a) Hat das Integral $v = \int\frac{G(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$ die zwei Perioden $2\alpha\pi$ und $2\beta\pi$, so ist stets

$$v = \sum_{1}^{2p+1}(m_i\alpha + n_i\beta)\,v_i.$$

b) Ist $X = \frac{f(x)}{\psi(x)}$ eine meromorphe Lösung der Differentialgleichung

$$dv = \frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}} = \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

so findet man nach dem Vorhergehenden:

$$v = \chi(x)\,R(x) + \Sigma\left(m_i\frac{2\omega}{2\pi} + n_i\frac{\omega'}{2\pi}\right)v_i,$$

wo 2ω und ω' die Perioden des Integrals $\int dv$ sind; umgekehrt, wenn diese Gleichung stattfindet, so hat die Differentialgleichung eine meromorphe Lösung. Setzt man endlich

$$X = \frac{f(x)}{\psi(x)}, \quad Y = \frac{\varphi(x)}{\psi^2(x)}\cdot y,$$

so entspricht jedem Punkte der Curve $y^2 = R(x)$ ein Punkt der Curve $Y^2 = (1-X^2)(1-k^2X^2)$, und wenn

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \operatorname{sn}(t), \quad \frac{\varphi(x)}{\psi^2(x)} = \operatorname{cn}(t)\operatorname{dn}(t)$$

gesetzt wird, so hat man die weiteren Transformationsformeln:

$$X = \operatorname{sn}(mt + \alpha),$$
$$Y = \operatorname{cn}(mt+\alpha)\operatorname{dn}(mt+\alpha),$$

wo α constant und m ganz ist. Bm.

G. Pick. Ueber die Reduction hyperelliptischer Differentiale in rationaler Form. Math. Ann. XXXII. 443-449.

Es werden hier die Vorschriften zusammengestellt, nach denen man sich bei Ausführung der Reduction der hyperelliptischen Differentiale in rationaler Form zu richten hat, wenn die im Nenner des gegebenen Differentials enthaltenen ganzen Polynome nicht in aufgelöster Form gegeben sind. Eine allgemeine Lösung des Problems durch covariante Ausdrücke ist gegenwärtig noch nicht möglich.

Ist das hyperelliptische Differential, in der bekannten Schreibweise:

$$\frac{M(x_1, x_2)(x\,dx)}{N(x_1, x_2)\sqrt{f(x_1, x_2)}},$$

d. h. ist f ein ganzes Polynom vom Grade $2p+2$, und der Grad von M um $p-1$ höher als der von N, so kann man N in lauter Factoren von der Form φ^h zerlegen, worin h eine positive ganze Zahl ist, und φ ein rationales bekanntes Polynom mit lauter einfachen Linearfactoren bedeutet, das entweder gegen f teilerfremd oder ein Teiler von f ist. Die Polynome von φ sind unter einander zu zweien relativ prim. Hieraus folgt dann eine Zerlegung von $\frac{M}{N}$ in lauter Summanden von der Form $\frac{\psi}{\varphi^h}$, worin der Grad von ψ den von φ^h um $p-1$ übersteigt. Damit ist das Differential in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt,

welche die Form

$$\frac{\psi\, dx}{\varphi^h \sqrt{f}}$$

annehmen. Weiter gelingt es dann, jeden dieser Brüche entweder in die Gestalt zu bringen

$$\frac{\psi_0\, dx}{\varphi\sqrt{f}} + \frac{\omega_0\, dx}{f\sqrt{f}} + d\left\{\frac{\psi_n}{\varphi^{h-1}\sqrt{f}}\right\},$$

oder in die Gestalt

$$\frac{\omega_0\, dx}{f\sqrt{f}} + d\left\{\frac{\psi_n}{\varphi^{h-1}\sqrt{f}}\right\},$$

je nachdem φ mit f teilerfremd oder ein Teiler von f ist. Also lässt sich auf diese Weise ein hyperelliptisches Differential reduciren auf:

1) eine Reihe von Differentialen dritter Gattung von der Form $\frac{\psi_0\, dx}{\varphi\sqrt{f}}$,

2) auf Differentiale erster und zweiter Gattung, die in der Form $\frac{\omega\, dx}{f\sqrt{f}}$ enthalten sind,

3) auf das vollständige Differential einer algebraischen Function.

Das noch nicht vollständig reducirte Differential 2) lässt sich auf zwei Arten behandeln: entweder sucht man die Bedingungen, wann ein solches Differential ein vollständiges Differential einer algebraischen Function ist, oder man reducirt diese Grösse weiter, bis man auf irreducible Bestandteile kommt; beide Methoden werden durchgeführt. Bm.

F. G. Teixeira. Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques (Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch.) Prag. Ber. 222-227.

Die Abhandlung enthält das folgende bekannte Resultat. Ist X eine ganze rationale Function von x vom Grade n, $f(x, \sqrt{X})$ eine rationale Function von x und $\sqrt{X}$, so lässt sich das Integral $\int f(x, \sqrt{X})\, dx$ in das Integral eines rationalen Differentials,

$\int G\,dx$, und in das Integral eines speciellen zweiwertigen algebraischen Differentials von der Form $\int \frac{H\,dx}{\sqrt{X}}$ zerlegen, wo G und H rationale Functionen von x sind; dieses letztere aber lässt sich wiederum in Integrale von der Gestalt

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{X}} \text{ und } \int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{X}} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

zerlegen, und diese lassen sich sämtlich durch die Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \ldots, \int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{X}} \text{ und } \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}$$

ausdrücken. Kr.

W. Heymann. Beiträge zur Transformation der hyperelliptischen Integrale. Schlömilch Z. XXXIII. 31-55.

Es werden folgende Transformationen hyperelliptischer Differentiale behandelt und für eine Reihe specieller Fälle durchgeführt. Bezeichnet man mit $\Delta(x)$ die Discriminante der Function $\varphi(v)-x=0$ und führt darin an Stelle von x die Variable v ein, so wird: 1) wenn $\varphi(v)$ eine ganze rationale Function vom n^{ten} Grade ist, $\Delta(x) = \Delta[\varphi(v)] = \frac{1}{n^2}\varphi'(v^2)\psi(v)$, wo $\psi(v)$ eine ganze rationale Function vom Grade $(n-1)(n-2)$ ist, und daher $dV = \frac{dx}{\sqrt{\Delta(x)}} = \frac{n\,dv}{\sqrt{\psi(x)}}$; 2) wenn dagegen $\varphi(v) = \frac{\Phi(v)}{v^p}$ und $\Phi(v)$ eine ganze rationale Function vom n^{ten} Grade ist,

$$\Delta(x) = \Delta[\varphi(v)] = v^{-pn}\vartheta^2(v)\psi(v),$$

wo $\vartheta(v)$ eine ganze rationale Function vom n^{ten}, $\psi(v)$ eine ganze rationale Function vom $n(n-2)^{\text{ten}}$ Grade ist, und daher

$$dV = \frac{dx}{\sqrt{\Delta(x)}} = \frac{(n-p)v^{\frac{1}{2}pn-p-1}\,dv}{\sqrt{\psi(v)}}.$$

Bezeichnet man ferner mit $\psi(v)$ eine reciproke ganze rationale Function vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, so kann man das Differential $\frac{v^p\,dv}{\sqrt{\psi(v)}}$

durch eine Substitution von der Form $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{x-\gamma} \pm \sqrt{x-\beta}}{\sqrt{\beta-\gamma}}$ in die Summe zweier hyperelliptischen Differentiale zerfällen, bei denen die im Nenner unter dem Wurzelzeichen stehenden ganzen rationalen Functionen nur vom Grade $n+1$ sind. Kr.

F. Brioschi. Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni iperellittiche a due variabili. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV₂. 341-347, 429-436.

Bezeichnet man in der Theorie der elliptischen Functionen mit ω und η die Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung, mit g_2 und δ die quadratische Invariante und die Discriminante der Form vierten Grades, setzt:

$$J = g_2^3 \delta^{-1}, \qquad y = \omega \delta^{\frac{1}{12}}, \qquad z = \eta \delta^{-\frac{1}{12}}$$

und betrachtet y und z als Functionen von J, so bestehen zwischen y und z gewisse Differentialgleichungen erster Ordnung (vergl. Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. Première partie, page 313), aus denen weiter für y und z allein die hypergeometrischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung folgen. Die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung ist, die analogen Differentialgleichungen für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung nachzuweisen. Kr.

J. P. Dolbnia. Neuer Beweis der Abel'schen Theoreme über die Integration der Differentiale der Form $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}}$. Kas. Ges. VI. 307-324. (Russisch.)

Die Eigenschaften der vollständigen Quotienten in der Zerlegung der Wurzel $\sqrt{R}$ in einen Kettenbruch werden gebraucht, um den Zusammenhang zwischen der Auflösung der unbestimmten Gleichung $P^2 - Q^2 R =$ Const. und der Periodicität des Kettenbruchs zu zeigen, in welchen die Wurzel $\sqrt{R}$ zerlegbar ist.

Wi.

E. Wiltheiss. Partielle Differentialgleichungen der hyperelliptischen Functionen und der Perioden derselben. Math. Ann. XXXI. 134-155

E. Wiltheiss. Die partiellen Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen. Math. Ann. XXXIII. 267-290.

Der Herr Verfasser hat im IC. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik (dieses Jahrbuch XVII. 1885. 480) Differentialgleichungen entwickelt, welche zwischen den partiellen Derivirten der hyperelliptischen Thetafunctionen nach den Argumenten und nach den Parametern bestehen, und hat später im XXIX. Bande der Mathematischen Annalen (dieses Jahrbuch XIX. 1887. 489) diese Differentialgleichungen für den einfachsten Fall $\varrho = 2$ so umgeformt, dass die sämtlichen darin vorkommenden Ausdrücke mit der Invariantentheorie in engster Verbindung stehen. Die Aufgabe der ersten der beiden vorliegenden Abhandlungen ist, die entsprechende Form der Differentialgleichungen für die hyperelliptischen Thetafunctionen von ϱ Argumenten auf directem Wege herzustellen. Zu dem Ende werden von dem Herrn Verfasser zunächst Differentialgleichungen abgeleitet, welche zwischen den partiellen Derivirten der Perioden der Normalintegrale erster und zweiter Gattung nach den in der Definitionsgleichung des hyperelliptischen Gebildes $y^2 = \sum\limits_{\varkappa}\binom{2\varrho+2}{\varkappa} A_\varkappa x^\varkappa$ vorkommenden Coefficienten $A_\varkappa$ bestehen (Gleichungen A, B, C, D der §§ 2 und 3), und es werden dann mit ihrer Hülfe die Differentialgleichungen der Thetafunctionen selbst (Gleichungen E und F oder in anderer Form E_1 und F_1 des § 4) abgeleitet. Die letzte Gruppe von Differentialgleichungen (Gleichungen F oder F_1) noch auf einem etwas anderen Wege herzustellen, ist die Aufgabe der zweiten Abhandlung. Dabei wird zunächst in den ersten vier Paragraphen die Form und Beschaffenheit dieser Differentialgleichungen, soweit es möglich ist, auf Grund der Invarianteneigenschaft der Thetafunctionen ohne Rechnung festgestellt. Es bleiben dann noch zwei Covarianten zu be-

stimmen übrig, deren Ausdrücke im fünften Paragraphen durch Rechnung ermittelt werden. Kr.

E Wiltheiss. Ueber die Potenzreihen der hyperelliptischen Thetafunctionen. Math. Ann. XXXI. 410-423.

Bekanntlich besteht diejenige Eigenschaft, welche die Weierstrass'schen hyperelliptischen Thetafunctionen vor den Jacobi'schen auszeichnet, darin, dass die Coefficienten der Entwickelung der ersteren nach Potenzen der Argumente rationale Functionen der Verzweigungspunkte und gewisser in den Integralen zweiter Gattung vorkommenden Grössen sind. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, unter möglichst wenigen Voraussetzungen einen einfachen unmittelbaren Beweis dafür zu erbringen, dass diese Coefficienten bei richtiger Bestimmung der genannten, in den Integralen zweiter Gattung vorkommenden Grössen, abgesehen von einem allen gemeinsamen Factor, auch ganze Functionen der Verzweigungspunkte sind. Kr.

F. Schottky. Zur Theorie der Abel'schen Functionen von vier Variabeln. J. für Math. CII. 304-352.

Da die im Falle $p = 4$ zur Definition einer Klasse Abel'scher Functionen dienende algebraische Gleichung höchstens neun wesentliche Constanten enthält, andererseits aber in einer vierfach unendlichen Thetareihe zehn verschiedene Parameter τ vorkommen, so sind die bei der Darstellung der Abel'schen Functionen auftretenden Thetafunctionen insofern specielle, als bei ihnen zwischen den Parametern τ eine Beziehung bestehen muss. Um diese aufzufinden, weist der Herr Verfasser darauf hin, dass es für diese speciellen Thetafunctionen bei beschränkten Werten der Argumente u möglich ist, sämtliche Quotienten ungerader Thetafunctionen als symmetrische und zerfallende Functionen zweier unabhängigen Variablen darzustellen (Seite 322). Führt man diese Ausdrücke in ein gewisses System homogener quadratischer Gleichungen ein, welches auch im allgemeinen Falle

zwischen den ungeraden Thetafunctionen besteht (Gleichung (6), Seite 324), so findet man, dass dieses Gleichungssystem nur dann durch die eingeführten Ausdrücke erfüllt werden kann, wenn man zwischen den Nullwerten der geraden Thetafunctionen eine gewisse Gleichung (Gleichung (3), Seite 340) annimmt, die für die allgemeinen Thetafunctionen nicht besteht und daher den zur Darstellung der Abel'schen Functionen dienenden Thetafunctionen eigentümlich ist. — Dass die vorliegende Arbeit ausser diesem interessanten Resultate noch eine Reihe wertvoller Einzelheiten aus der Theorie der vierfach unendlichen Thetareihen enthält, darauf kann hier nur im allgemeinen hingewiesen werden.

Kr.

F. Schottky. Ueber specielle Abel'sche Functionen vierten Ranges. J. für Math. CIII. 185-203.

Es wird vorausgesetzt, dass eine gerade Thetafunction Θ_n existirt, welche Null wird, wenn die Argumente gleich Null gesetzt werden; eine solche Annahme trägt wesentlich dazu bei, die Untersuchung einfach zu gestalten. Unter dieser Voraussetzung wird die Aufgabe behandelt, unter den Ausdrücken $\sqrt{\frac{u_a u_b}{u_c u_{abc}}}$, die aus den 120 Grössen $\sqrt{u_m}$ gebildet werden können, zwei auszuwählen, durch die alle übrigen rational und in übersichtlicher Form dargestellt werden können, und ausserdem die Gleichung anzugeben, welche zwischen diesen beiden ausgewählten Grössen besteht.

Kr.

G. Frobenius. Ueber das Verschwinden der geraden Thetafunctionen. Gött. N. 67-74.

Sind x und y zwei willkürliche Punkte einer Riemann'schen Fläche, so verschwindet der Ausdruck $\vartheta_k\left(\int_x^y dw\right)$ als Function des Punktes y, falls er nicht identisch Null ist, an p Stellen $y_1, y_2, \ldots, y_p$, die im Falle einer geraden Charakteristik k sämtlich von x abhängen. Wie $y_1, y_2, \ldots, y_p$ durch x bestimmt sind,

zeigen Regeln, welche Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Functionen, Seite 197) und Herr Nöther (Mathematische Annalen XVII. 280) angegeben haben; die gegenseitige Abhängigkeit der p Punkte $y_1, y_2, \ldots, y_p$ von einander kann dagegen auf folgende Weise charakterisirt werden. Alle Wurzelfunctionen dritter Ordnung $\sqrt{\Phi}$ mit der Charakteristik k, die in q gegebenen Punkten $y_1, y_2, \ldots, y_q$ verschwinden, bilden eine Schar von der Dimension $r \geqq 2p-2-q$, und zwar ist für $q \gtreqless p-1$ stets $r = 2p-2-q$, im Falle $q = p$ kann auch $r = p-1$ sein. Solche Systeme von p Punkten $y_1, y_2, \ldots, y_p$ (die auch dadurch charakterisirt werden können, dass jede Wurzelfunction dritter Ordnung, die in $p-1$ derselben verschwindet, auch in dem p^{ten} verschwindet) sind die Nullpunkte einer Function $\vartheta_k\left(\int_x^y dw\right)$, und der Herr Verfasser zeigt, wie man zu p in solcher Art von einander abhängigen Punkten $y_1, y_2, \ldots, y_p$ den Punkt x und umgekehrt zu einem beliebig gegebenen Punkte x solche p Punkte $y_1, y_2, \ldots, y_p$ bestimmen kann. — In welcher Weise das gefundene Resultat im Falle $p = 3$ geometrisch gedeutet werden kann, wird zum Schlusse erörtert. Kr.

A. von Braunmühl. Ueber die Göpel'sche Gruppe p-reihiger Thetacharakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Fundamentalrelationen der zugehörigen Thetafunctionen. Math. Ann. XXXII. 513-544.

In einer früheren Abhandlung (München. Abh. XVI$_2$. 327-368, dieses Jahrbuch XIX. 1887. 496) hat der Herr Verfasser bereits für p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, die Göpel'schen Gruppen von je 3^p Charakteristiken definirt. Der näheren Untersuchung derselben, insbesondere für den Fall $p = 2$, sind die ersten beiden Artikel der gegenwärtigen Abhandlung gewidmet. Die folgenden Artikel beschäftigen sich, wieder mit besonderer Berücksichtigung des speciellen

Falles $p = 2$, mit der Aufstellung von Relationen, welche zwischen den 3^{2p} Thetafunctionen mit Drittelcharakteristiken bestehen. Die Grundlage bildet dabei eine Formel (Gleichung (3) des § 3), welche der Herr Verfasser gleichfalls schon in seiner früheren Abhandlung hergeleitet hat. Man erhält dieselbe auch aus der von Herrn Prym und dem Ref. im III. Bande der Acta Mathematica mitgeteilten Formel (Θ_2''), wenn man darin $r = 3$ setzt, an Stelle der Charakteristik $[\eta]$ der Reihe nach die 3^p Charakteristiken $[\nu_\beta]$ einer Göpel'schen Gruppe treten lässt und die 3^p so entstehenden Gleichungen, indem man sie mit passend gewählten Einheitswurzeln multiplicirt, zu einander addirt, endlich über die Charakteristiken $[\varrho]$ in geeigneter Weise verfügt.

Kr.

F. Klein. Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen. (Zweite Abhandlung.) Math. Ann XXXII. 351-380.

In einer ersten unter dem vorstehenden Titel veröffentlichten Abhandlung (Math. Ann. XXVII. 431-464, vergl. dieses Jahrbuch XVIII. 1886. 418) hat der Herr Verfasser gezeigt, dass sich die Definition der σ-Functionen, die Herr Weierstrass zunächst nur für den Fall $p = 1$ gegeben hat, bei zweckmässiger Deutung der Weierstrass'schen Formeln in einfacher und naturgemässer Weise auf den Fall $p = 2$ übertragen lässt. Während aber in dieser Abhandlung die σ-Functionen aus den ϑ-Functionen abgeleitet werden, erscheinen in der gegenwärtigen die σ-Functionen als der natürliche Durchgangspunkt, um vom hyperelliptischen Gebilde zu den zugehörigen ϑ-Functionen zu gelangen. Andererseits erstrebt der Herr Verfasser in der gegenwärtigen Abhandlung die Erweiterung aller Entwickelungen auf hyperelliptische Functionen beliebigen Geschlechts. Es werden dementsprechend in den Art. 7 und 8 die hyperelliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung für beliebiges p behandelt, und insbesondere als Integral dritter Gattung jenes schon in der früheren Abhandlung hervorgehobene Integral $Q^{x'y'}_{xy}$ aufgestellt, welches dadurch ausgezeichnet ist, dass der Zähler eine ganze Covariante

von f ist; es werden sodann weiter in Art. 9 die allgemeinen σ-Functionen definirt und, nachdem in Art. 10 einige Eigenschaften derselben, in den Art. 11, 12 und 13 ihre Reihenentwickelung nach steigenden Potenzen der ihnen zu Grunde liegenden Integralsummen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ und in Art. 14 ihre Periodicität behandelt worden ist, aus ihnen die zu dem vorgelegten hyperelliptischen Gebilde gehörigen ϑ-Functionen abgeleitet, die auf diese Weise, ebensowie die σ-Functionen selbst, explicit definirt erscheinen. Kr.

H. Burkhardt. Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen. Math. Ann. XXXII. 381-442.

Der Herr Verfasser bemerkt über den Zweck und den Inhalt der Arbeit das Folgende:

Die vorliegende Arbeit beabsichtigt, die in der Abhandlung des Herrn F. Klein: Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen (Math. Ann. XXXII. 351-380) für die Behandlung der hyperelliptischen Sigmafunctionen aufgestellten Gesichtspunkte ins Einzelne durchzuführen.

Im ersten Abschnitte wird nach einigen Bemerkungen über die Integrale erster und zweiter Gattung die Normalform der Integrale dritter Gattung einer näheren Untersuchung unterworfen und die analytische Natur der durch sie definirten Function festgestellt. Der Herr Verfasser glaubte jedoch nicht auf die für die folgenden Abschnitte unentbehrlichen Entwickelungen sich beschränken zu sollen; es sind vielmehr auch einige naheliegende andere Fragen berührt worden, deren Beantwortung Nutzen für eine Weiterführung der Theorie zu versprechen schien. Unter anderem werden die bilinearen Relationen zwischen den Perioden der hier zu Grunde gelegten Integrale sowohl nach der Methode von Riemann als nach der des Herrn Weierstrass abgeleitet.

Der zweite Abschnitt discutirt in gleicher Weise die Uebergangsformen, welche Herr Klein benutzt, um von den Integralen zur Definition der Sigmafunctionen zu gelangen. Insofern aber diese Uebergangsformen zum Teil keine Functionen von z allein,

sondern eben Formen sind, d. h. homogene Functionen von z_1 und z_2, deren Dimension nicht Null ist, schien es zweckmässig, diesem Abschnitte einige allgemeine Auseinandersetzungen über den Gebrauch homogener Variablen in der Functionentheorie einzuverleiben.

Der dritte Abschnitt erläutert die von Herrn Klein gegebene Definition der Sigmafunctionen und entwickelt ihre wesentlichsten Eigenschaften. Insbesondere wird gezeigt, dass sie eindeutige ganze Functionen der Integralsummen sind. Dieser Beweis ist demjenigen nachgebildet, welchen Herr Weierstrass (Journ. für Math. LII) gegeben hat; nachdem jedoch die Untersuchungen von Herrn Klein zu einer Definition der Sigmafunctionen selbst, nicht nur ihrer Quotienten, am algebraischen Gebilde geführt haben, ist es ermöglicht, die ganze Betrachtung auf Potenzreihen allein zu stützen, den Gebrauch der Quotienten von Potenzreihen aber zu vermeiden, und damit an allen denjenigen Schwierigkeiten vorbei zu kommen, welche das Auftreten von ausserwesentlich singulären Stellen zweiter Art mit sich bringt. Die Untersuchung der Abhängigkeit der σ-Functionen von den Coefficienten des algebraischen Gebildes, und die explicite Aufstellung des ersten Gliedes der Reihenentwickelung samt Bestimmung der numerischen Constanten bilden den Schluss der Arbeit; ausserhalb des Rahmens derselben bleibt die Verfolgung der Operationen, welche von den Sigmafunctionen zu den Thetafunctionen führen und damit den eigentlich transcendenten Boden betreten. Kr.

F. Klein. Sur la résolution par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du 27e degré de laquelle dépend la détermination des 27 droites d'une surface cubique. Journ. de Math. (4) IV. 169-176.

Bericht in Abschnitt IX, 3 C.

D. Kugel- und verwandte Functionen.

W. BRAUN. Ueber die Coefficienten der Kugelfunctionen einer Veränderlichen. Schlömilch Z. XXXIII. 314-316.

Die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x in der Kugelfunction $P^n(x)$ enthalten, wie bekannt, wenn sie auf die kleinste Benennung gebracht sind, im Nenner nur Potenzen von 2. Diese Eigenschaft springt sofort ins Auge, wenn man den Factor von x^{n-2r} in die Form bringt:

$$(-1)^r \frac{1}{2^n} \binom{2n-2r}{n-r} \cdot \binom{n-r}{r}.$$

Die beiden letzten Factoren sind als Binomialcoefficienten ganze Zahlen. Mit Hülfe dieser Form der Coefficienten kann man auch die Gleichung, durch welche $P^n(x)$ als n-facher Differentialquotient dargestellt wird, leicht beweisen. Wn.

O. ZANOTTI-BIANCO. Alcuni teoremi sui coefficienti di Legendre. Torino Atti. XXIII. 5-25.

Im Anschluss an die im vorigen Jahre (F. d. M. XIX. 1887. 507-508) besprochene Arbeit entwickelt der Verfasser unter Anwendung bekannter Formeln die Werte der Integrale

$$\int_0^\pi P_n(\cos\vartheta)\sin^{m+1}\vartheta\, d\vartheta, \quad \int_0^\pi P_n(\cos\vartheta)\cos^r\vartheta\sin^{m+1}\vartheta\, d\vartheta,$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n(\cos\vartheta, \varphi)\sin^{m+1}\vartheta\, d\vartheta d\varphi,$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n(\cos\vartheta, \varphi)\cos^r\vartheta\sin^{m+1}\vartheta\, d\vartheta d\varphi,$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n(\cos\vartheta, \varphi)\cos^r\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

und ähnlicher, wobei Y_n die allgemeine Kugelfunction mit zwei Veränderlichen ist. Die Resultate sind weder wichtig noch einfach genug, um sie hier wiederzugeben. Es wird ferner angedeutet, wie man zu den Werten solcher Integrale gelangen kann,

die aus den obigen entstehen, wenn man unter dem Integralzeichen noch das Product mehrerer einfacher Kugelfunctionen mit dem Argument cos ϑ hinzufügt. Wn.

F. A. TARLETON. On the determination of the numerical factors in the expansion of Laplace's coefficients. Dublin Proc. (3) I. 16-19.

Nimmt man den Laplace'schen Coefficienten n^{ter} Ordnung in der Form an

$$L_i = \Sigma_0^i a_n(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}n}(\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{d^nP_i}{d\mu^n}\cdot\frac{d^nP'_i}{d\mu'^n}\cos n(\varphi-\varphi'),$$

wo P_i ein Legendre'scher Coefficient ist, so wird a_n durch Benutzung der grundlegenden Sätze der Laplace'schen Analyse ohne trigonometrische Entwickelungen gefunden. Die Formel

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} Y_i L_i d\mu\, d\varphi = \frac{4\pi}{2i+1}Y',$$

wo Y_i eine Kugelfunction vom Grade i ist, liefert

$$a_n\Delta_n \equiv a_n\int_{-1}^{1}(\mu^2-1)^n\left(\frac{d^nP_i}{d\mu^n}\right)^2 d\mu = \frac{4}{2i+1},$$

ausser wenn $n=0$, in welchem Falle $a_0\int_{-1}^{1}P_i^2\,d\mu = \frac{2}{2i+1}\cdot$

Aus der Differentialgleichung, der P_i genügt, folgt

$$\Delta_{n+1}+(i-n)(i+n+1)\Delta_n = 0,$$

und da a_0 als 1 gefunden ist, so wird Δ_n in der Form erhalten:

$$\Delta_n = (-1)^n\frac{2}{2i+1}(i+n)(i+n-1)\dots(i-n+1),$$

und a_n in der Form

$$a_n = (-1)^n.\,2\frac{(i+n)!}{(i-n)!}\cdot$$

Gbs. (Lp.)

J. Deruyts. Sur une classe de polynômes analogues aux fonctions de Legendre. Liège Mém. (2) XIV. 15 S.

Untersuchung der Polynome P_n, welche durch die Gleichung

$$P_n = \left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-p}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{1-q}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-\frac{x}{b}\right)^{n+p-1}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{n+q-1}\right]$$

definirt sind, in welcher a und b reell und nicht Null, p und q positiv sind. Mn. (Lp.)

Errata contained in Ferrer's treatise on spherical harmonics. Tokio Math. Gesellsch. III. 267.

Verbesserungen von 15 Fehlern, welche nicht in dem Lehrbuche selbst erwähnt sind. E.

A. Pellet. Sur la formule de Fourier et ses analogues. C. R. CVI. 1062-1065.

Die Fourier'sche Formel wird gewonnen, indem man in dem Integrale

$$\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

den Punkt z von der geschlossenen Curve $ACDBEFA$, von der zwei Punkte A, B durch einen Kreisbogen innerhalb der Curve verbunden sind, die Wege $ACDBA$ und $BEFAB$ durchlaufen lässt, und im ersten Falle $\frac{1}{z-x}$ nach aufsteigenden, im letztern nach absteigenden Potenzen von x entwickelt. Davon wird Anwendung gemacht auf die Legendre'schen Polynome X_n und auf die Entwickelung einer Function zweier Winkel nach Laplace'schen Functionen Y_n. H.

Fr. Cohn. Ueber Lamé'sche Functionen mit complexen Parametern. Diss. Königsberg i. Pr.

Die Lamé'schen Functionen n^{ter} Ordnung $E_s^{(n)}(\mu)$ hängen be-

kanntlich ausser von ihrem Argumente μ von zwei gegebenen Parametern b, c sowie von der Wurzel v einer algebraischen Gleichung ab, die für gerade n vom Grade $\frac{n}{2}+1$ oder $\frac{n}{2}$ ist, je nach der Klasse, der E angehört, für ungerade n von der Ordnung $\frac{n+1}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$. Man weiss ferner, dass für reelle Werte von b und c die Wurzeln einer jeden der erwähnten algebraischen Gleichungen reell und von einander verschieden sind [cf. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Aufl., Bd. I, Teil 2, Cap. 3]. Für complexe Werte von b und c dagegen kann es vorkommen, dass die algebraische Gleichung für v eine Doppelwurzel besitzt, wenn nämlich b und c so gewählt werden, dass die Discriminante der Gleichung verschwindet. Tritt dieser Fall ein, so fallen von den $2n+1$ Functionen E der Ordnung n zwei (im allgemeinen aber nicht mehr) zusammen. Es entsteht dann die Frage, welche Function an Stelle der ausfallenden zu setzen ist, um bei Entwickelungen nach den E die nötige Zahl $2n+1$ von Functionen der Ordnung n zu erhalten. Diese Frage lässt sich, wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, mit Hülfe des folgenden Grenzüberganges beantworten.

Es seien v_1 und v_2 die beiden Wurzeln der algebraischen Gleichung $f(v)=0$, die schliesslich zusammenfallen sollen. Dann lege man den verfügbaren Grössen in den Coefficienten der Gleichung solche Werte bei, dass v_1 und v_2 nahe gleich sind, die Discriminante $\varDelta$ der Gleichung also nur wenig von Null verschieden ist. Für derartige Werte von $\varDelta$ lassen sich v_1 und v_2, da für $\varDelta=0$ nur diese beiden, aber nicht mehr Wurzeln der Gleichung zusammenfallen, folgendermassen darstellen:

$$v_1 = w_1 + w_2\sqrt{\varDelta},$$
$$v_2 = w_1 - w_2\sqrt{\varDelta},$$

wobei w_1 und w_2 Grössen sind, die sich nach steigenden Potenzen von $\varDelta$ entwickeln lassen. Die den beiden Wurzeln v_1 und v_2 entsprechenden Lamé'schen Functionen $E_1(\mu)$ und $E_2(\mu)$ nehmen dementsprechend für kleine Werte von $\varDelta$ die Form an:

$$E_1(\mu) = \mathfrak{E}_1(\mu) + w_2 \sqrt{\Delta}\, \mathfrak{E}_2(\mu),$$
$$E_2(\mu) = \mathfrak{E}_1(\mu) - w_2 \sqrt{\Delta}\, \mathfrak{E}_2(\mu).$$

Für $\Delta = 0$ fallen E_1 und E_2 zusammen. An Stelle des ausfallenden E_2 tritt die Function

$$\mathfrak{E}_2(\mu) = \frac{\partial E_1(\mu)}{\partial v_1}.$$

Der Verfasser führt die Untersuchung zuerst für Lamé'sche Functionen mit zwei Variabeln (Producte zweier Lamé'schen Functionen) durch. An Stelle des Productes $E_2(\mu)\, E_2(\nu)$ tritt, falls $v_1 = v_2$ wird, die Function

$$\frac{\partial [E_1(\mu)\, E_1(\nu)]}{\partial v_1},$$

und diese genügt derselben partiellen Differentialgleichung wie das Product $E_1(\mu)\, E_1(\nu)$, während bei den Lamé'schen Functionen einer Variabeln die Differentialgleichung, durch welche die Ersatzfunction $\mathfrak{E}_2(\mu)$ bestimmt ist, sich von der eigentlichen Lamé'schen Gleichung noch um ein von E_1 abhängiges Glied unterscheidet.

Der Verfasser zeigt weiter, welche Aenderungen in der Entwickelung der auf elliptische Coordinaten transformirten Kugelfunctionen nach Producten Lamé'scher Functionen eintritt, wenn v_1 und v_2 zusammenfallen; ferner wie sich für $v_1 = v_2$ die Bestimmung der Coefficienten bei der Entwickelung einer beliebigen Function nach jenen Producten gestaltet; insbesondere wird die Reihe für die reciproke Entfernung zweier Punkte betrachtet. Am Schluss wird die Untersuchung auf die Lamé'schen Functionen höherer Ordnung (cf. Heine, Kugelfunctionen, Bd. I., T. 3) ausgedehnt. Wn.

K. Heun. Beiträge zur Theorie der Lamé'schen Functionen. Math. Ann. XXXIII. 180-196.

Irgend n unabhängige Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung erfahren bei Umläufen der unabhängigen Variabeln gewisse lineare Substitutionen, welche in ihrer Gesamtheit eine Gruppe bilden. Der Verfasser geht nun

von der Bemerkung aus, dass der Zusammenhang gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Kettenbruch-Entwickelungen unmittelbar gestattet, die zugehörigen Gruppen zu bestimmen. So ergiebt sich z. B. die Gruppe der Differentialgleichung der Kugelfunctionen aus der bekannten Gleichung

$$Q^{(n)}(x) = \tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}P^{(n)}(x) - Z^{(n)}(x),$$

welche bei der Kettenbruch-Entwickelung von $\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$ auftritt. Die Lamé'schen Functionen stehen, wie Heine gefunden hat, in Beziehung zu der Kettenbruch-Entwickelung vollständiger elliptischer Integrale dritter Gattung. Heine bewies, dass die Teilnenner dieser Entwickelung bis zu einem gewissen linear sind, und dass dieser letztere quadratisch ist. Wie die Teilnenner hierüber hinaus beschaffen sind, blieb fraglich. Die gruppentheoretische Interpretation gestattet nun dem Verfasser, diesen Punkt zu erledigen. Es ergiebt sich, dass die Teilnenner, welche auf den quadratischen folgen, wieder sämtlich linear sind. Da die Lamé'schen Functionen specielle Riemann'sche Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten sind, so knüpft die Untersuchung an die im Referate S. 419 dieses Bandes besprochene Abhandlung desselben Verfassers an. Hz.

L. Gegenbauer. Ueber die Functionen $C_n^\nu(x)$. Wien. Ber. XCVII. 259-270.

Der Verfasser entwickelt, gestützt auf die in einer früheren Arbeit (F. d. M. XVI. 1884. 452) abgeleiteten Resultate, eine grosse Anzahl neuer Formeln für die Function $C_n^\nu(x)$. Letztere ist dieselbe Function, die Heine (Kugelfunctionen Bd. I, T. 3) Kugelfunction höherer Ordnung nennt und mit $P^n(2\nu+1, x)$ bezeichnet; sie ist der Coefficient von α^n in der Entwickelung von

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu};$$

mithin ist

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = C_{n-1}^1(\cos x).$$

Nun lässt sich $C_n^\nu(\cos x)$ durch eine Summe von Producten von Functionen C mit verschiedenen oberen und unteren Indices darstellen. Daraus gewinnt man eine analoge Darstellung von $\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$. Auch kann man das Legendre-Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{n}{m}\right)$, das nach Eisenstein

$$= \prod_{k=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} \frac{\sin\frac{2kn\pi}{m}}{\sin\frac{2k\pi}{m}}$$

ist, durch ein Product derartiger Summen ausdrücken.

Weiter kann man $C_n^\nu(x)$ in Form einer Determinante darstellen. Daraus ergiebt sich nach einigen Umformungen die Formel:

$$\frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = \begin{vmatrix} 2\cos x, & 1, & 0, & 0, \ldots, 0, & 0 \\ 1, & 2\cos x, & 1, & 0, \ldots, 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2\cos x, & 1, \ldots, 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, 1, & 2\cos x \end{vmatrix}.$$

Das Symbol $\left(\frac{n}{m}\right)$ lässt sich hiernach durch ein Product von Determinanten ausdrücken.

Neben der Function $C_n^\nu(x)$ wird noch die Function $E_\lambda^{\mu,\nu,\sigma}(x)$ betrachtet, die als der Coefficient von α^λ in der Entwickelung von

$$\frac{1}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^\nu}\int_0^\alpha \frac{\alpha^\sigma d\alpha}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^\mu}$$

definirt wird. Zwischen den Functionen C und E werden verschiedene Beziehungen aufgestellt, und es wird gezeigt, dass für die E mit gleichen oberen, aber verschiedenen unteren Indices genau dieselbe Recursionsformel gilt wie für die C. Für den Fall $\nu = \frac{1}{2}$ gehen die Functionen C_n^ν in die Kugelfunctionen über, und es ergiebt sich

$$P_{n+1}(x) = xE_{n+1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(x) - E_{n+1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}(x),$$

eine Formel, die von Catalan aufgestellt ist.

Zum Schluss werden aus der Integraldarstellung von $C_n^\nu(x)$ mehrere Formeln abgeleitet, von denen die folgende hier Platz finden möge:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=2n} \frac{(-1)^\lambda \cos^{2n-\lambda} x\, C_\lambda^\nu(\cos x)}{\Pi(\lambda+2\nu-1)\Pi(2n-\lambda)} = \frac{(-1)^n \Pi\left(\frac{2n-1}{2}\right)\sin^{2n} x}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi(2n)\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)}.$$

Wn.

G. Giuliani. Alcune osservazioni sopra le funzioni sferiche di ordine superiore al secondo e sopra altre funzioni che se ne possono dedurre. Batt. G. XXVI. 155-171.

Der erste Teil der Arbeit betrifft die aus der Entwickelung von

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\frac{1-p}{2}}$$

nach Potenzen von α entstehenden Functionen $X_n(p, x)$. Gestützt auf einige in Heine's Kugelfunctionen abgeleitete Formeln, erörtert der Verfasser das Verhalten der erwähnten Functionen für $n = \infty$ und $x^2 < 1$ oder $x^2 = 1$. Ferner untersucht er die Lage der Wurzeln der Gleichung $X_n(p, x) = 0$ und zeigt, wie der Dini'sche Beweis für die Entwickelbarkeit einer Function nach Kugelfunctionen auf die Entwickelung nach Functionen $X_n(p, x)$ übertragen werden kann.

Im zweiten Teil der Arbeit wird die folgende Verallgemeinerung der Bessel'schen Functionen betrachtet:

$$J_n(p, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi-n\varphi)\,.\cos^{p-2}\varphi\, d\varphi.$$

In Bezug auf diese Functionen wird eine Anzahl von Formeln aufgestellt, die bekannten Formeln aus der Theorie der Bessel'schen Functionen ($p = 2$) analog sind. Insbesondere wird gezeigt, dass $J_0(p, x)$, abgesehen von einem constanten Factor, die Grenze von $n^{2-p} X_n\left(p, \cos\frac{x}{n}\right)$ für $n = \infty$ ist, wo X_n dieselbe Bedeutung hat, wie oben; dass ferner $J_n(p, x)$ für $n > 0$ einer

linearen Differentialgleichung vierter Ordnung, für $n = 0$ einer solchen zweiter Ordnung genügt. Auch wird angedeutet, wie man zu einer Reihenentwickelung von $J_n(p, x)$ gelangen kann, und es werden mehrere nach jenen Functionen fortschreitende Reihen betrachtet. Dabei ergiebt sich das merkwürdige Resultat:

$$\sum_0^\infty J_n(p, x) = \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} J_0(p, x).$$

Schliesslich wird gezeigt, dass

$$x^n J_0(2n+2, x) = J_n(2, x)$$

ist; die Function rechts ist aber die Bessel'sche Function $J_n(x)$.

Wn.

E. Haentzschel. Ueber die Fourier-Bessel'sche Transcendente. Schlömilch Z. XXXIII. 185-186.

Dass die Kugelfunction P^m mit dem Argument $\cos \frac{u}{m}$ für $m = \infty$ in die Bessel'sche Function mit dem Argumente u übergeht, ist zuerst von Herrn Mehler gezeigt. Durch einen anderen Grenzübergang hatte der Verfasser in einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 430) die Bessel'schen Functionen aus den Kugelfunctionen abgeleitet. Allerdings wird auch hierbei, was früher übersehen war, der Index m der Kugelfunction unendlich. Trotzdem sind beide Grenzübergänge nicht identisch, der des Herrn Haentzschel ist vielmehr allgemeiner, als der Mehler'sche. Das Unendlichwerden des Index m ist erst ein secundäres Moment; die Hauptsache ist das Verschwinden der Weierstrass'schen e's, und darauf hat der Verfasser zuerst aufmerksam gemacht.

Wn.

A. Hurwitz. Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Functionen. Math. Ann. XXXIII. 246-266.

Von den Nullwerten der Bessel'schen Transcendente $J_n(z)$ weiss man, dass sie sämtlich reell sind, wenn der Index n einen reellen Wert besitzt, der nicht kleiner als -1 ist. In der vorliegenden Arbeit wird die Untersuchung jener Nullwerte weiter

geführt und auf beliebige reelle Werte von n ausgedehnt. Statt der Function J_n selbst wird die Reihe

$$f_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{\Gamma(n+r+1)\Gamma(r+1)},$$

die der Verfasser als „Bessel'sche Reihe" bezeichnet, der Betrachtung zu Grunde gelegt. Dieselbe hängt mit $J_n(z)$ durch die Gleichung zusammen:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n f_n\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

Der Verfasser leitet zunächst folgenden allgemeinen Satz über die Nullstellen analytischer Functionen ab: „Es sei in einem endlichen Gebiet G die Function $f(z)$ die gleichmässige Grenze der Reihe von Functionen $g_1(z)$, $g_2(z)$, ..., $g_\nu(z)$, ..., also $\lim g_\nu(z) = f(z)$. Innerhalb G möge ferner jede einzelne der genannten Functionen den Charakter einer rationalen Function besitzen. Dann sind im Innern von G die Nullstellen der Function $f(z)$ identisch mit denjenigen Stellen, an welchen sich die Wurzeln der Gleichungen

$$g_1(z) = 0,\ g_2(z) = 0,\ \ldots,\ g_\nu(z) = 0,\ \ldots$$

verdichten. Und zwar liegen in einer beliebig kleinen Umgebung der Stelle a, welche eine r-fache Nullstelle von $f(z)$ ist, genau r Wurzeln der Gleichung $g_\nu(z) = 0$, sobald ν eine bestimmte, von der Grösse jener Umgebung abhängende Zahl überschreitet."

Um diesen Satz auf die Bessel'sche Reihe anzuwenden, werden als Functionen g_ν die Näherungszähler und -Nenner der Kettenbruchentwickelung von $\frac{f_n(z)}{f_{n+1}(z)}$ gewählt. Für diese g_ν gelten die Relationen:

$$\text{a)}\ \begin{cases} f_{n-1} = g_\nu \cdot f_{n+\nu-1} + z g_{\nu-1} f_{n+\nu}, \\ g_{\nu+1} = (n+\nu) g_\nu + z g_{\nu-1}, \\ g_{-1} = 0,\ g_0 = 1. \end{cases}$$

Aus ihnen ergiebt sich, dass in jedem endlichen Gebiete f_{n-1} die gleichmässige Grenze von $\frac{g_\nu}{\Gamma(n+\nu)}$ ist. Man kann daher die Nullstellen von $f_{n-1}(z)$ mit beliebiger Genauigkeit durch Auflösung der Gleichung $g_\nu(z) = 0$ finden.

Wenn man nun auf die Reihe der Functionen

$$g_0, g_2, g_4, \ldots, g_{2\nu}, \ldots$$

eine der Sturm'schen analoge Deduction anwendet, so findet man:

1) Für $n > -1$ sind die Wurzeln der Gleichungen

$$g_2(z) = 0, \; g_4(z) = 0, \; \ldots, \; g_{2\nu}(z) = 0, \ldots$$

sämtlich reell. Die Gleichung $g_{2\nu}(z) = 0$ hat eine positive und $2\nu - 1$ negative Wurzeln, wenn n zwischen -1 und 0 liegt; dagegen sind für $n > 0$ alle Wurzeln jener Gleichung negativ.

2) Wenn n zwischen $-2\mu - 1$ und $-2\mu + 1$ liegt (μ eine ganze Zahl > 0), so besitzt die Gleichung $g_{2\nu}(z) = 0$ genau 2μ imaginäre Wurzeln, falls ν eine gewisse Zahl N überschreitet. Zugleich ist von den reellen Wurzeln dieser Gleichung eine oder keine positiv, je nachdem n zwischen $-2\mu - 1$ und -2μ oder zwischen -2μ und $-2\mu + 1$ liegt.

Hieraus folgen für die Bessel'sche Reihe folgende Resultate:

1) Die Wurzeln der Gleichung $f_n(z) = 0$ sind sämtlich reell, falls $n > -2$ ist. Diese Wurzeln sind für $n > -1$ alle negativ; dagegen ist eine derselben positiv und die übrigen sind negativ, wenn n zwischen -2 und -1 liegt.

2) Die Gleichung $f_n(z) = 0$ hat für negative, zwischen $-2\mu - 2$ und -2μ liegende Werte von n (ganzzahlige negative Werte von n sind auszuschliessen) genau 2μ paarweis conjugirt imaginäre und im übrigen unendlich viele reelle Wurzeln. Von letzteren sind entweder alle oder alle bis auf eine negativ, je nachdem n zwischen $-2\mu - 1$ und -2μ oder zwischen $-2\mu - 2$ und $-2\mu - 1$ liegt. Zur näheren Bestimmung der imaginären Wurzeln hat man eine unendliche Reihe algebraischer Curven $\varphi_\nu(x, y) = 0$, $\varphi_{\nu+1}(x, y) = 0$ etc., von denen jede einzelne aus 2μ im Endlichen und ausser einander liegenden Ovalen besteht. Das einzelne Oval der Curve $\varphi_x = 0$ berührt und umschliesst je ein Oval der nächstfolgenden Curve und enthält zugleich in seinem Innern je eine imaginäre Nullstelle von $f_n(z)$. Auf diese Nullstelle zieht sich das Oval mit wachsendem x immer mehr und mehr zusammen.

Einen Teil dieser Resultate leitet der Verfasser noch auf

anderem Wege ab, teils direct aus der Reihenentwickelung von $f_n(z)$, teils durch Anwendung der Integralsätze der Bessel'schen Functionen. Er erläutert sodann das allgemeine Resultat an dem speciellen Beispiel, wo n zwischen -3 und $-3+\frac{4}{5}$ liegt (hier liegen die beiden imaginären Wurzeln innerhalb einer Kreissichel), und wendet sich am Schluss der Betrachtung imaginärer Werte von n zu. Durch Anwendung der Integralsätze ergiebt sich hier: „Es sei n eine Zahl mit positivem reellen Bestandteil. Man ziehe durch den Punkt $-\frac{n^2}{4}$ zwei Halbstrahlen, von welchen der erste parallel der Axe der negativen reellen Zahlen läuft, während die Rückverlängerung des zweiten durch den Nullpunkt geht. Die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $f_n(z)=0$ liegen dann in dem von den genannten Halbstrahlen begrenzten Winkelraum." Hat n einen reellen Wert, so reducirt sich dieser Raum auf ein doppelt überdecktes Stück der Axe der reellen negativen Zahlen. Wn.

W. F. Sheppard. On some expressions of a function of a single variable in terms of Bessel's functions. Quart. J. XXIII. 223-260.

Um eine Function durch ein Doppelintegral darzustellen, das von Bessel'schen Functionen abhängt, führt der Verfasser die Function

$$\varphi_m(x, u) = \left(\frac{x}{u}\right)^m J_m(xu)$$

ein, wobei der Index m der Bessel'schen Function beliebig ist, jedoch nicht kleiner als $-\frac{1}{2}$. Dann findet die leicht zu beweisende Gleichung statt:

$$\int_0^\xi \varphi_m(x, u)\varphi_m(u, \beta)\, u\, du$$
$$= \frac{x^m}{\beta^m(\beta^2 - x^2)}\{\beta\xi J_{m+1}(\beta\xi)J_m(x\xi) - x\xi J_{m+1}(x\xi)J_m(\beta\xi)\}.$$

Diese Gleichung wird, nachdem sie mit x multiplicirt ist, nach x zwischen den Grenzen 0 und α integrirt, sodann wird an

Stelle von $J_m(\lambda)$ der für grosse Werte von λ gültige Näherungswert

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\cos\left(\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\lambda\right)$$

gesetzt, endlich zur Grenze für $\xi = \infty$ übergegangen. Wenn man noch beachtet, dass

$$\int_0^\alpha \varphi_m(x,u)x\,dx = \varphi_{m+1}(\alpha,u)$$

ist, so ergiebt die Grenzbetrachtung das folgende Resultat:

Es ist

$$(1)\qquad \int_0^\infty \varphi_{m+1}(\alpha,u)\varphi_m(u,\beta)\,u\,du \begin{cases} = 0, & \text{falls } 0 \leqq \alpha < \beta, \\ = \frac{1}{2}, & \text{„}\quad \alpha = \beta > 0, \\ = 1, & \text{„}\quad \alpha > \beta > 0. \end{cases}$$

Daraus folgt mittels einfacher Umformungen weiter, dass

$$(2)\int_0^\infty\int_0^q J_m(ux)\,J_m(uv)f(v)\,uv\,du\,dv \begin{cases} = 0 & \text{für } x > q, \\ = \frac{1}{2}f(x) & \text{„}\quad x = q, \\ = f(x) & \text{„}\quad q > x > 0 \end{cases}$$

ist, wobei $f(v)$ eine beliebige Function ist, die zwischen $v=0$ und $v=q$ continuirlich und endlich ist. Hat $f(v)$ diese Eigenschaft zwischen $v=0$ und $v=\infty$, und ist $\int\sqrt{v}\,f(v)\,dv$, bis unendlich erstreckt, endlich, so wird

$$(3)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty J_m(ux)J_m(uv)f(v)\,uv\,du\,dv = f(x).$$

Aendert sich f an einer Stelle x discontinuirlich, so wird die rechte Seite von (3)

$$\tfrac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\};$$

doch muss die Zahl der Discontinuitätsstellen eine endliche sein. Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn f an einigen Stellen unendlich wird, während $\int f(v)\sqrt{v}\,dv$ noch endlich bleibt.

Der Verfasser zeigt weiter, wie man aus (2) und (3) auch umgekehrt die Gleichung (1) ableiten kann. Er weist dann, unabhängig von dem Früheren, durch teilweise Integration und Differentiation nach einem Parameter nach, dass, wenn die Glei-

chungen (1) und (3) für irgend einen Wert von $m \geqq -\frac{1}{2}$ gelten, sie auch für $m+1$ gültig bleiben. Für $m = -\frac{1}{2}$ resp. $m = \frac{1}{2}$ geht (3) in den Fourier'schen Satz über, (1) wird Dirichlet's discontinuirlicher Factor. Für die Gleichung (3) werden sodann noch einige andere Formen angegeben. Endlich wird Folgendes erörtert: Wenn man in (3) an Stelle von $J_m(ux).u$, $J_m(uv).v$ allgemein $F(ux).\chi(u)$ resp. $F(uv).\chi(v)$ setzt, wo $F(\vartheta)$ irgend einer Differentialgleichung beliebiger Ordnung genügt, und wenn man verlangt, dass das Doppelintegral auch dann noch $= f(x)$ sei, so muss jene Differentialgleichung für F mit der Gleichung der Bessel'schen Functionen identisch sein.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Darstellung einer Function durch eine Summe von Integralen. Ist

$$\sum_0^\infty \psi(n)\delta n = \tfrac{1}{2}\psi(0)+\psi(1)+\psi(2)+\cdots,$$

so soll die Formel gelten:

$$(4)\qquad \sum_0^\infty \varphi_{m+1}(\alpha,n)\varphi_m(n,\beta)n'\delta n \begin{cases} = 0 & \text{für } 0 \leqq \alpha < \beta \leqq \xi, \\ = \frac{1}{2} & \;\;\text{„}\;\; 0 < \alpha = \beta < \xi, \\ = 1 & \;\;\text{„}\;\; \xi \geqq \alpha > \beta > 0. \end{cases}$$

Darin ist n' eine gewisse Function von n, die für alle reellen n endlich ist, für sehr grosse Werte von n aber gleich n wird. Dieselbe ist ebenso wie ξ noch von m abhängig; ξ ist kleiner als π.

Daraus folgt:

$$(5)\qquad \sum_0^\infty \int_0^\xi J_m(nx)J_m(nv)f(v)n'v\delta n\,dv$$
$$= \tfrac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\},\quad \xi > x > 0;$$

und umgekehrt lässt sich (4) aus (5) ableiten. Der Beweis von (4) resp. (5) ist dem Verfasser indessen nur für den Fall gelungen, dass m eine ganze Zahl i oder von der Form $i-\frac{1}{2}$ ist; für letzteren Fall ist $n' = n$. Zum Nachweis der Richtigkeit genügen für den Fall $m = i$ nicht mehr rein analytische Erörterungen, der Verfasser muss vielmehr Betrachtungen über das Potential einer Kreisscheibe zu Hülfe nehmen. Für beliebige Werte von m ver-

mag der Verfasser nur zu zeigen, dass, wenn obige Gleichungen für irgend ein m gelten, sie auch für $m+1$ richtig sind, vorausgesetzt, dass n' für m und $m+1$ dieselbe Function ist.

Ausserdem wird im Anfang des zweiten Teils die Gleichung (3) noch auf einem neuen Wege abgeleitet. In der bekannten Darstellung einer Function $f(x)$ durch eine Reihe der Form

$$\Sigma_\alpha A_\alpha J_m(\alpha x),$$

wo die verschiedenen α, mit ein und derselben Grösse ξ multiplicirt, die Wurzeln der Gleichung $J_m(x) = 0$ sind, lasse man ξ, das beliebig ist, über alle Grenzen wachsen, so geht die Summe in ein Integral über oder vielmehr, da die Coefficienten A schon Integrale sind, in ein Doppelintegral; und man gelangt so zu (3). Was der Verfasser bei dieser Gelegenheit über die Convergenz der obigen (resp. die einer etwas allgemeineren) Reihe sagt, scheint dem Referenten zum Nachweis der Convergenz nicht zu genügen. Wn.

E. Haentzschel. Ueber die Differentialgleichung der Functionen des parabolischen Cylinders. Schlömilch Z. XXXIII. 22-30.

Die Functionen des parabolischen Cylinders, welche durch die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 z}{du^2} = (h^2\alpha^2 u^2 - \nu^2) z$$

definirt werden, sind für endliche Werte von u von Herrn K. Baer eingehend untersucht (cf. F. d. M. XV. 1883. 450). Ueber das Verhalten dieser Functionen für sehr grosse Werte von u ist jedoch noch nichts bekannt. Der Verfasser versucht diese Lücke folgendermassen auszufüllen. Transformirt man die Gleichung (1), indem man statt u als unabhängige Variable $s = \frac{1}{u^2}$, statt z als abhängige Veränderliche $\xi = zs^{\frac{1}{4}}$ einführt, und benutzt die Kummer'sche Differentialgleichung dritter Ordnung für den Quotienten η zweier particulären Integrale der Gleichung für ξ, so wird man darauf geführt, von ξ den Factor $s^{1 \pm \frac{n}{4}} e^{\pm \frac{h\alpha}{2s}}$ ab-

zusondern, wo $n = \frac{\nu^2}{h\alpha}$ ist. Die für den andern Factor von ξ resultirende Differentialgleichung gestattet eine Entwickelung ihrer Integrale nach steigenden Potenzen von s, und man gewinnt so zwei particuläre Integrale von (1); diese kann man mit Hülfe der hypergeometrischen Reihe folgendermassen ausdrücken:

$$(2)\quad \begin{cases} \bar{z}_1 = cs^{\frac{1+n}{4}} e^{\frac{h\alpha}{2s}} F\left(\frac{1+n}{4}, \frac{3+n}{4}, g, \frac{gs}{h\alpha}\right) \text{ für } g = \infty, \\ z_1^* = c's^{\frac{1-n}{4}} e^{-\frac{h\alpha}{2s}} F\left(\frac{1-n}{4}, \frac{3-n}{4}, g, \frac{-gs}{h\alpha}\right) \text{ für } g = \infty. \end{cases}$$

Durch Anwendung einer Kummer'schen Formel gelingt es sodann, die Integrale $\bar{z}_1$ und z_1^* durch die von Baer aufgestellten particulären Integrale z_1 und z_2, welche die Lösung von (1) in der Umgebung von $u = 0$ darstellen, linear auszudrücken, so dass, gewisse Fälle ausgenommen, $\bar{z}_1$ und z_1^* ein Fundamentalsystem bilden. Andererseits kann man, vermöge der Bedeutung von η, aus $\bar{z}_1$ und z_1^* noch je ein particuläres Integral von (1) ableiten:

$$(3)\qquad \bar{z}_2 = \bar{z}_1 \bar{\eta}, \qquad z_2^* = z_1^* \eta^*.$$

Für die Stelle $s = 0$, die nach der Bezeichnung von Fuchs eine Stelle der Unbestimmtheit mit bestimmter Verzweigung ist, gilt also der Satz, dass es in der Umgebung eines singulären Punktes stets nur ein Fundamentalsystem von Integralen giebt, nicht mehr. Vielmehr bilden $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ einerseits und z_1^*, z_2^* andererseits dort zwei verschiedene Fundamentalsysteme. Der Verfasser sucht noch $\bar{\eta}$ und η^* und damit $\bar{z}_2$ und z_2^* durch Reihen darzustellen. In denselben kommt jedoch je eine Constante vor, deren Bestimmung dem Verfasser, der seine Erörterungen ausdrücklich als einen ersten Versuch hinstellt, noch nicht gelungen ist.

Wn.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

H. C. Schwarz. Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen. Diss. Halle. H. W. Schmidt.

Der Verfasser stützt sich auf die von Hrn. G. Cantor begründete Mannigfaltigkeitstheorie und liefert insofern einen wertvollen Beitrag zu derselben, als er gewisse fundamentale (endliche) Anzahlen ermittelt und elegante zahlentheoretische Beziehungen zwischen denselben aufdeckt.

Die Hauptaufgabe lautet: Die Anzahl $\Phi(m, n)$ aller n-fachen endlichen „Ordnungstypen" zu bestimmen, welche zu einer beliebigen Cardinalzahl m gehören.

Zuvörderst werden die n-fachen Ordnungstypen zur Cardinalzahl m in „Klassen" eingeteilt vermöge der verschiedenen „Rangstufen", die es nach den verschiedenen „Richtungen" giebt. Das Problem kommt so auf das einfachere zurück, die Anzahl $V^m_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n}(\varrho_i = 1, 2, \ldots, m)$ aller unter einer und derselben Klasse stehenden n-fachen Ordnungstypen zur Cardinalzahl m anzugeben; die gesuchte Anzahl $\varphi(m, n)$ ist dann nichts anderes, als die Summe aller möglichen Anzahlen V.

Durch eine geeignete Verallgemeinerung der Zahl V wird der Begriff derselben vereinfacht, und es gelingt mit verhältnismässiger Kürze die Ableitung der bereits von Hrn. Cantor angegebenen Formel:

$$V^m_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n} = \Sigma(-1)^{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-1}}\binom{\varrho_1}{\sigma_1}\binom{\varrho_2}{\sigma_2}\cdots\binom{\varrho_{n-1}}{\sigma_{n-1}}\binom{S}{g_1}\binom{S}{g_2}\cdots\binom{S}{g_{\varrho_n}}$$

$$(g_1+g_2+\cdots+g_{\varrho_n} = m;\ \sigma_k = 0, 1, \ldots, \varrho_{k-1};\ k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

aus der ein erster Ausdruck für die Anzahl $\Phi(m,n)$ hervorgeht. Um jedoch zu brauchbareren Ergebnissen zu gelangen, geht der Verfasser auf die Natur der Zahlen V tiefer ein und giebt zunächst einen sehr einfachen Beweis für einen von Hrn. Goldscheider stammenden eleganten Satz, demzufolge die Grössen V als Entwickelungscoefficienten des m^{ten} Binomialcoefficienten eines Productes n beliebiger Grössen x erscheinen, nämlich:

$$\binom{x_1 . x_2 \ldots x_n}{m} = \Sigma\binom{x_1}{\varrho_1}\binom{x_2}{\varrho_2}\cdots\binom{x_n}{\varrho_n}V^m_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n}$$

$$(\varrho_\nu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

während $\varphi(m,n)$ selbst mit der Summe aller Coefficienten V übereinstimmt.

Sodann wird zu gleichem Zwecke die ursprüngliche Aufgabe nach zwei Richtungen verallgemeinert, indem einmal die einer Cardinalzahl $m+\alpha$ entsprechenden Typen auf solche zur Cardinalzahl m zurückgeführt werden. Dies führt auf die (von Hrn. Fitting angegebene) Recursionsformel:

$$(m+1)\,\Phi(m+1,n)+m\,\Phi(m,n) = \Sigma(2\varrho_1+1)\ldots(2\varrho_n+1)\,V^m_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho}$$

$$(\varrho_k = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

vermöge deren wiederum eine Recursionsformel für die V allein gewonnen wird.

Zweitens lassen sich n-fach geordnete Typen auf $(n-\nu)$-fach geordnete zurückführen, was die neue durchsichtige Recursionsbeziehung liefert:

$$V^m_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n} = \Sigma\, V^{m-k}_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}} \cdot V^m_{\varrho_n,m-k}.$$

Aber durch passende Verallgemeinerung der gezogenen Schlüsse kommt man noch weiter; es gelingt die Berechnung sämtlicher Functionen $\Phi(m,n)$, sobald man die auf zweifache Ordnungs-

typen bezüglichen Functionen $V^m_{m,\varrho}$ kennt. Dies leistet das wichtige Gesetz:

$$\left[\sum_{\varrho=1}^{m} V^m_{m,\varrho}\right]^n = \Phi(1,n)\, V^m_{m,1} + \Phi(2,n)\, V^m_{m,2} + \cdots + \Phi(m,n)\, V^m_{m,m}.$$

Man kommt dadurch weiter zu der Erkenntnis, dass die Function $\Phi(m,n)$ aus den Functionen $\Phi(m-k, n-1)$ ebenso entspringt, wie $\Phi(m,2)$ aus der Einheit.

Demnach concentrirt sich der Verfasser nunmehr auf die Untersuchung der zweifach geordneten Typen und der zugehörigen Anzahlen $V^m_{m,\varrho} = \Pi(m, \varrho)$.

Von den Ergebnissen sind verschiedene früher von Herrn Schrader als Folge gewisser Determinantenrelationen hergeleitet worden.

Eine Reihe numerischer Tabellen beweist die praktische Anwendbarkeit der Formeln für die Grössen $\Pi(m, \varrho)$. Die Berechnung der letzteren kann wiederum auf die einer gewissen Gattung derselben reducirt werden.

Zum Schluss teilt der Verfasser noch einige elegante, von Herrn H. Wiener stammende Formeln über Ordnungstypen mit, die derselbe auf Grund der sogenannten „Typennetze" gefunden hat.

Der Referent möchte darauf hinweisen, dass die vorliegenden Fragestellungen, vom rein combinatorischen Standpunkt aus aufgefasst, mit denjenigen der Sylvester'schen Schule, welche sich auf die sogenannten partitions of numbers beziehen, eine merkwürdige Verwandtschaft zeigen. My.

R. Beez. Ueber euklidische und nicht-euklidische Geometrie. Plauen i. V. Neupert.

Nach einem kurzen Rückblick auf die Geschichte der Geometrie im Altertum wendet sich der Verfasser zu einer Kritik der Definitionen und Axiome Euklid's, die er ebenso, wie eine Reihe neuerer Verbesserungsvorschläge, eingehend bespricht. Das Parallelen-Axiom bietet den Uebergang zur nicht-euklidischen Geometrie, deren Entwickelungsgeschichte ebenfalls ausführlich

dargelegt wird. Die pseudosphärische Geometrie will der Verfasser nicht ganz in demselben Sinne als Veranschaulichung der nichteuklidischen gelten lassen, wie die sphärische als Bild der Riemann'schen, weil im euklidischen Raume die pseudosphärischen Flächen nicht existiren. Bei der Besprechung der verschiedenen Raumformen macht der Verfasser auf die Schwierigkeiten aufmerksam, die sich der Beurteilung des reellen oder imaginären Charakters dieser Formen bei grösserer Dimensionenzahl entgegenstellen, und zeigt namentlich, dass die beiden Krümmungstheorien von Riemann und Kronecker hierbei zu wesentlich verschiedenen Ergebnissen führen, indem nach der letzteren der nichteuklidische Raum sich als imaginär in Bezug auf einen ebenen vierdimensionalen Raum darstellt, während nach der ersteren diese Beziehung, also auch der imaginäre Charakter, wegfällt. Aus Gründen des analogen Zusammenhanges der verschieden dimensionirten Gebiete unter einander entscheidet sich der Verfasser zu Gunsten der Kronecker'schen Theorie. Der ablehnende Standpunkt aber, welchen er, unter Citirung eines bekannten Wortes von Steiner, den imaginären Gebilden gegenüber einnimmt, dürfte nicht allgemein geteilt werden. Wir meinen im Gegenteil, dass Schwierigkeiten, wie die oben bezeichneten, gerade durch die grundsätzliche Gleichstellung imaginärer und reeller Gebilde gehoben werden. Was endlich die vom Verfasser schliesslich berührte Frage nach der möglichen Form des Weltraums betrifft, so kann allerdings, wie z. B. Most gezeigt hat, neben der euklidischen nur die sphärische in Betracht kommen, gleichviel ob man die pseudosphärische für reell oder imaginär hält; aber in der Meinung, dass die sphärische Form ein reales ebenes vierdimensionales Gebiet zur Voraussetzung habe, können wir dem Verfasser nicht beipflichten; denn gedankliche Voraussetzungen und Constructionsmöglichkeiten brauchen nicht immer realisirt zu sein. Endlich rühren auch die anscheinenden Absurditäten, welche aus der Anwendung des Biegungsprocesses in höheren Dimensionen hervorgehen, wohl nur von der Unmöglichkeit her, mit unserer dreidimensionalen Auffassung solchen Processen zu folgen. Schg.

F. Tirelli. Le fonti della geometria di Euclide (con cinquecento proposizioni di geometria projettiva). Napoli. Tip. Tocco. 1884-1886.

F. Tirelli. Saggio di geometria metrico-projettiva. Salerno. Tip. Miglianio. 1888.

Unter dem Namen „Quellen der euklidischen Geometrie" versteht Herr Tirelli die Gesamtheit der Sätze hinsichtlich der Geometrie einer Ebene, in welcher der absolute Kegelschnitt durch ein beliebiges Punktepaar dargestellt wird, Sätze, die auf die euklidischen zurückkommen, wenn diese Punkte die unendlich fernen Kreispunkte sind. Von 442 dieser Sätze (Lehrsätze und Aufgaben) giebt der Verfasser den Wortlaut in den 4 ersten Teilen des Werkes „Le fonti della geometria d'Euclide"; wir prüfen nicht, wie viele von den Sätzen neu sind. Der letzte Teil, welcher der Darstellung der allgemeinen Methoden gewidmet ist, die aus den vorangehenden Constructionen folgen, sowie aus den Beziehungen, welche sie zur euklidischen Geometrie haben, ist gesondert unter dem Titel veröffentlicht worden: „Saggio di geometria metrico-projettiva". Zum Schlusse fügen wir hinzu, dass der Verfasser in einer an die „onorevoli componenti la commissione esaminatrice nel concorso alla cattedra di matematica nel R. Liceo Terenzio Mamiani di Roma" gerichteten Schrift die Verallgemeinerung des dritten Buches des Euklid gemäss der oben auseinandergesetzten Anschauung erörtert hat.

La. (Lp.)

M. Sibiriakoff. Les principes de la géométrie élémentaire. Moscou. 1887.

In vier Capiteln werden Bemerkungen über Linienelemente und Verhältnisse von Winkeln und Bogen vorgetragen, welche zu erneuten Versuchen benutzt werden, das Problem der Winkelteilung und das Parallelenaxiom zu erledigen. Angehängt sind die bereits früher (F. d. M. XVI. 1884. 463 u. 491) besprochenen Schriften des Verfassers über dieselben Gegenstände.

Schg.

M. Pasch. Ueber die uneigentlichen Geraden und Ebenen.
Math. Ann. XXXII. 159-160. W. St.

R. S. Ball. On the theory of content. Dublin Trans. XXIX. (Part V). 123-182.

Die in der Theorie der nichteuklidischen Geometrie auftretende Schwierigkeit, den gewöhnlichen Begriff des Abstandes durch den Logarithmus eines gewissen anharmonischen Verhältnisses zu ersetzen, während dieses Verhältnis selbst den Begriff des nach gewöhnlicher Art gemessenen Abstandes in sich schliesst, hat diese Abhandlung „über die Theorie des Inhaltes" veranlasst, welche mit der Theorie der sogenannten nichteuklidischen Geometrie oder der Geometrie des elliptischen Raumes äquivalent oder identisch ist. Diese letzteren Bezeichnungen giebt Herr Ball jetzt auf, da er die Gedankenverbindungen, zu denen sie Anlass geben, als sehr irreführend erkannt hat (S. 151). Die Arbeit ist umfangreich, daher wird dieser Bericht nur die grundlegenden Festsetzungen in hinreichender Ausführlichkeit geben, muss aber wegen aller Einzelheiten auf die Schrift selber verweisen.

In der Einleitung wird erläutert, dass das Wort „Inhalt" (content) so verstanden ist wie bei Grassmann das „Gebiet von vier extensiven Grössen", indem die einzelnen Grössen die „Objecte" des Inhalts bilden. Die Abhandlung ist in neun Abschnitte geteilt. Der Abschnitt I giebt die vorläufigen Begriffsbestimmungen. Es seien a_1 ein Symbol, welches ein „Object" bedeutet; a_2, a_3, a_4 andere Symbole für andere Objecte; x_1, x_2, x_3, x_4 vier Zahlgrössen mit beliebiger Tragweite; dann bezeichnet der symbolische Ausdruck $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$ ein „Object" X. Wenn Y ebenso für $y_1 a_1 + y_2 a_2 + y_3 a_3 + y_4 a_4$ steht, so ist Y dann und nur dann identisch mit X, wenn $x_1/y_1 = x_2/y_2 = x_3/y_3 = x_4/y_4$. Alle die verschiedenen Objecte, welche man durch Aenderung der Verhältnisse von x_1, x_2, x_3, x_4 in $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$ erhält, bilden den „Inhalt". Alle die Objecte, welche durch $x_1 a_1 + x_2 a_2$ bezeichnet werden, wenn das Verhältnis $x_2 : x_1$ variirt, bilden eine „Rotte" (range) und die durch $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$

bezeichneten, wenn die Verhältnisse $x_2 : x_1$ und $x_3 : x_1$ variiren, eine „Ausweitung“ (extent). Offenbar liegen Objecte einer Ausweitung, deren Coordinaten eine lineare Gleichung befriedigen, auf einer Rotte; entsprechend beim Inhalt. Eine Rotte n^{ten} Grades besteht aus denjenigen Objecten in einer Ausweitung, deren Coordinaten eine homogene Gleichung n^{ten} Grades befriedigen. Der Abschnitt II handelt vom „Zwischengang“ (intervene) zwischen zwei Objecten auf einer Rotte, indem der „Zwischengang“ dem „Abstande“ in der gewöhnlichen Geometrie entspricht. Die Bestimmung des Zwischengangs zeigt den Nutzen der ersten Gruppe der Axiome vom Inhalte, nämlich: 1) Wenn drei Objecte P, Q, R auf einer Rotte nach aufsteigendem Parameter geordnet werden, dann sind die Zwischengänge PQ, QR, PR so zu bestimmen, dass $PQ + QR = PR$. 2) Der Zwischengang zwischen zwei Objecten kann nicht Null sein, wofern nicht die Objecte zusammenfallen, oder ohne dass der Zwischengang zwischen jedem Objectepaar auf derselben Rotte auch Null ist. 3) Von den Objecten auf einer Rotte sind zwei entweder verschiedene oder zusammenfallende im Unendlichen, d. h. haben je einen unendlichen Zwischengang mit allen übrigen. 4) Ein unendliches Object auf jeder beliebigen Rotte hat einen unendlichen Zwischengang von jedem Objecte des Inhaltes. 5) Wenn die einzelnen Objecte auf einer Rotte eindeutig den einzelnen Objecten auf einer anderen entsprechen, und wenn die beiden Objecte im Unendlichen auf einer Rotte zu ihren entsprechenden die beiden Objecte im Unendlichen auf der anderen haben, dann ist der Zwischengang zwischen irgend zwei Objecten auf der einen Rotte gleich dem zwischen ihren entsprechenden auf der anderen. Die den Zwischengang ausdrückende Function wird dann bestimmt. Sind $x_1, \ldots, x_4$ und $y_1, \ldots, y_4$ die beiden Objecte im Unendlichen auf der einen Rotte, $x_1 + \lambda y_1, \ldots$ und $x_1 + \mu y_1, \ldots$ irgend zwei andere Objecte, so wird ihr Zwischengang durch $H \log \frac{\lambda}{\mu}$ ausgedrückt, wo H eine Constante ist. Eine andere Form für die Constante ist $H \log \frac{(\lambda - \lambda')(\mu - \lambda'')}{(\lambda - \lambda'')(\mu - \lambda')}$, wo

λ', λ'' die Wurzeln der Gleichung sind, welche die unendlichen Punkte auf der Rotte bestimmen. Das anharmonische Verhältnis in diesem letzten Ausdrucke ist nicht das von Abständen sondern von blossen Zahlen. Die Abschnitte III und IV erörtern den Zwischengang zwischen zwei Objecten bezw. in einer Ausweitung und in einem Inhalte. Die unendlichen Objecte in einer Ausweitung und in einem Inhalte befriedigen homogene Gleichungen zweiten Grades bezw. mit drei und vier Veränderlichen. Der Abschnitt IV behandelt auch die Möglichkeit „gleichstufiger Rotten", d. h. solcher Rotten, bei denen der Zwischengang zwischen jedem Objectepaar auf der einen gleich dem zwischen dem entsprechenden auf der anderen ist. Die Möglichkeit hiervon erheischt das Axiom 5. Der V. Abschnitt führt die „Theorie des Abganges" (departure) ein. Die Rotte ist hier das Erstlingselement, und die Rottengruppe, welche durch Aenderung des Verhältnisses $x_2 : x_1$ in $x_1 a_1 + x_2 a_2$ entsteht, wo a_1 und a_2 Rotten bedeuten, wird „Stern" (star) genannt. Dem „Winkel" in der gewöhnlichen Geometrie entsprechend wird eine Function, „Abgang" (departure) genannt, nun eingeführt, und fünf weitere Axiome vom Inhalte werden aufgestellt, um die Construction der Function zu ermöglichen. Wenn der Abgang zwischen zwei Rotten P, Q durch PQ bezeichnet wird, so können die jetzt eingeführten Axiome aus den ersten fünf dadurch abgeleitet werden, dass man Object, Rotte, Zwischengang mit Rotte, Stern, Abgang vertauscht, indem man es immer so versteht, dass sich alles auf eine Ausweitung beschränkt. Axiom 9 jedoch, das dem Axiome 4 entspricht, lautet so: „Eine unendliche Rotte hat einen unendlichen Abgang nicht nur mit jeder Rotte in ihrem Sterne, sondern mit jedem Sterne in der Ausweitung." Sind x_1, x_2, y_1, y_2 die Coordinaten irgend zweier Rotten in einem Stern und λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 die Coordinaten der beiden unendlichen Rotten in jenem Stern, dann ist der Abgang zwischen der x- und y-Rotte:

$$H \log \frac{(x_1 \lambda_2 - x_2 \lambda_1)(y_1 \mu_2 - y_2 \mu_1)}{(y_1 \lambda_2 - y_2 \lambda_1)(x_1 \mu_2 - x_2 \mu_1)}.$$

Für die unendlichen Rotten in einer Ausweitung gilt das folgende Theorem: Alle unendlichen Rotten einer Ausweitung können

durch die Werte von $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$ dargestellt werden, wo a_1, a_2, a_3 irgend welche beliebige Rotten sind und x_1, x_2, x_3 Zahlgrössen, die eine homogene Gleichung zweiten Grades befriedigen. Das elfte Axiom vom Inhalte, welches zum ersten Male die Begriffe Zwischengang und Abgang zusammenbringt, wird so aufgestellt: Wenn zwei Rotten in derselben Ausweitung einen Nullabgang haben, so liegt ihr gemeinschaftliches Object im Unendlichen und umgekehrt. Nimmt man die Constante H in den Ausdrücken für den Zwischengang und für den Abgang als übereinstimmend an, und zwar gleich $-\frac{1}{2}i$, so zeigt sich, dass die Maasse einer Ausweitung die von Herrn Heath (Lond. Phil. Trans. Part. II. 1884) entdeckte Entwickelung zulassen, kurzum, dass die Formeln der sphärischen Trigonometrie allgemein in einer Ausweitung anwendbar sind. Abschnitt VI stellt ein eindeutiges Entsprechen zwischen den einzelnen Punkten eines euklidischen Raumes und den einzelnen Objecten eines Inhaltes her. In den übrigen Abschnitten wird die Theorie entwickelt, indem statt der Objecte ihre entsprechenden Punkte im gewöhnlichen Raume benutzt werden. Die Gegenstände dieser Abschnitte sind „die homographische Transformation des Inhaltes", „die orthogonale Transformation" und „die Theorie des Vectors." Der neunte Abschnitt über die Vectorentheorie ist einer der wichtigsten in der Abhandlung und enthält einige Theoreme, die nach aller Vermutung neu sind. Doch ist der Bericht bereits zu einer solchen Länge gediehen, dass wir auf die Abhandlung selbst verweisen müssen. Gbs. (Lp.)

N. Lobatschewsky. Geometrische Untersuchungen der Theorie der Parallelen. Zweite unveränderte Auflage. Berlin 1887.

P. Duchemin. Des parallèles dans l'espace. Droites et plans parallèles. Avranches. 16 S. 8°.

P. Duchemin. Théorie des parallèles et certitude de la géométrie. Coutances. 16 S. 8°.

P. Duchemin. Théorie des parallèles sans postulatum et certitude de géométrie. Coutances. 78 S. 12°.

L. C. Dodgson. Curiosa mathematica. Part I.: A new theory of parallels. London. 86 S. 8°.

L. Liard. Des définitions géométriques et des définitions empiriques. Nouvelle édition. Paris. 180 S. 12°.

Capitel 2.
Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

W. Dyck. Beiträge zur Analysis situs. I. Math. Ann. XXXII. 457-513.

Diese Arbeit enthält eine weitere, systematische Ausführung der vom Verfasser bereits früher in den Grundzügen und Hauptresultaten mitgeteilten Theorie des Zusammenhanges von Curven und Flächen, über welche in diesem Jahrbuch (XVII. 1885. 523 und XVIII. 1886. 454) von anderer Seite berichtet wurde. Es kann mithin für das Verständnis des Zweckes und der Grundgedanken dieser Untersuchungen auf jene Referate, insbesondere das zweite, verwiesen werden. — Aus der in der Einleitung gegebenen Literatur-Uebersicht geht zunächst hervor, wie ungemein zahlreich und mannigfach die Resultate sind, welche der Verfasser hier unter einheitlichen Gesichtspunkten vereinigt. Die Hauptaufgabe, nämlich Bestimmung der Charakteristik eines Gebildes, wird der Reihe nach für ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten behandelt. In beiden Fällen wird zuerst rein geometrisch untersucht, durch welche allgemeinen gestaltlichen Unterschiede und in welcher Weise die Charakteristik der Curven

oder Flächen beeinflusst wird; dann wird gezeigt, wie auch für analytisch gegebene Gebilde die Charakteristik gefunden werden kann.

Insofern die Theorie sich auf Curven bezieht, wird ein begrenztes Curvenstück „Elementargebilde" (E^I) genannt, und der Inbegriff einer beliebigen Anzahl von Elementargebilden und von geschlossenen Curvenzügen, welche durch Verbindung der Endpunkte einzelner oder mehrerer Elementargebilde entstanden sind, „eindimensionale Mannigfaltigkeit" (M^I). Die Charakteristik von M^I ist dann gleich der Anzahl der vorhandenen offenen Curvenzüge. Ist analytisch eine Curve $\psi(x,y)$ und ein Curvensystem $\Phi(x,y,\lambda)$ gegeben, so wird die Charakteristik derjenigen Teile einer Curve Φ, welche im Innern von ψ liegen, bei stetiger Aenderung von λ sich immer dann ändern, wenn an irgend einer Stelle von ψ eine Berührung mit Φ eintritt. Die Zu- oder Abnahme der Charakteristik an solcher Stelle entscheidet über den (Kronecker'schen) Punktcharakter derselben. Und von der für irgend einen Wert von λ bekannten Charakteristik aus kann man durch die Verfolgung der Aenderungen, welche dieselbe an den „Sprungstellen" erleidet, während λ abnimmt, auch die gesuchte Charakteristik für die dem Werte $\lambda = 0$ entsprechende Curve φ finden. Eine Formel liefert sodann für alle Berührungsstellen die Punktcharaktere, durch deren Addition die gestellte Aufgabe gelöst wird. Ein specielles Beispiel erläutert das Verfahren.

Im Gebiet der Flächen ist das Elementargebilde (E^{II}) ein in der Ebene ausbreitbares begrenztes Flächenstück, und die Mannigfaltigkeit M^{II} entsteht durch Zusammensetzung von Elementargebilden längs gewisser Randstücke oder geschlossener Randcurven, eventuell schematisch durch blosse Zuordnung von Randstücken. Durch Zusammensetzung unendlich vieler und unendlich kleiner Elementargebilde entsteht die allgemeinste Form der M^{II}. Bildet dieselbe eine zusammenhängende Fläche, so ist zwischen Flächen mit umkehrbarer und nicht umkehrbarer Indicatrix zu unterscheiden. Aus den von Möbius aufgestellten „Grundformen" ergeben sich dann für beide Fälle „Normal-

formen", und demnächst einfache Definitionsgleichungen für die Charakteristik. Es werden darauf die Beziehungen der Charakteristik zur Riemann'schen Zusammenhangszahl und anderen Abzählungen festgestellt, wobei die geometrische Bedeutung der Charakteristiken-Theorie auf verschiedene Arten hervortritt. Sie liefert die Bedingungen für die umkehrbar eindeutige stetige Abbildung zweier Flächen auf einander und ermöglicht die vollständige Beschreibung einer Fläche im Sinne der Analysis situs bezüglich ihrer absoluten Eigenschaften. — Die analytische Bestimmung der Charakteristik für Flächen ohne Singularitäten erfolgt im wesentlichen nach der für die Curven massgebenden Methode; natürlich gestalten sich die Vorkommnisse, welche auf die zur Bestimmung des Punktcharakters der Sprungstellen nötigen Abzählungen Einfluss haben, hier complicirter. Es werden drei verschiedene Abzählungen ausgeführt, von denen die letzte einerseits specialisirt, andererseits verallgemeinert wird. Entweder nämlich variirt die Fläche $\Phi = 0$ bei constantem Innenraum von $\psi = 0$, oder der Innenraum von $\Psi = 0$ bei constanter Fläche $\varphi = 0$, oder eine Fläche $X = 0$ bei constanter, aus $\varphi = 0$ und $\psi < 0$ gebildeter Mannigfaltigkeit. Zur Erläuterung des Vorhergehenden werden analytische Beispiele für die Summation der Punktcharaktere gegeben, wobei die Uebereinstimmung der Resultate mit der Kronecker'schen Charakteristik und demnach mit der Gauss'schen Curvatura integra überall hervortritt. Zuletzt werden auch die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix, bei welchen Doppelcurven auftreten, betrachtet, und der Einfluss der verschiedenen Arten von singulären Punkten auf die Charakteristik festgestellt. Auch diese Theorie wird durch ein Beispiel erläutert, und zum Schluss die Ausdehnung dieser Untersuchungen auf drei- und mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten in Aussicht gestellt. Schg.

A. Schoenflies. Ueber reguläre Gebietsteilungen des Raumes. Gött. Nachr. 223-237.

A. Schoenflies. Beitrag zur Theorie der Krystallstructur. Gött. Nachr. 483-501.

In der ersten Arbeit wird unter Voraussetzung euklidischer Massbestimmung zunächst die Aufgabe behandelt, den Raum lückenlos in congruente Bereiche zu teilen, sodass jeder derselben auf gleiche Art von den Nachbarbereichen umgeben ist. Jede solche Teilung gehört zu einer bestimmten Gruppe von Bewegungen, durch welche jeder Bereich in einen anderen übergeführt werden kann. Wird ein Punkt allen Bewegungen einer Gruppe unterworfen, so entsteht ein regelmässiges Punktsystem. Aus einem Bereich, welcher nur einen dieser Punkte enthält (Fundamentalbereich), lässt sich dann durch die Bewegungen einer Gruppe eine Raumteilung der verlangten Art herstellen. Es werden dann Raumteilungen specieller Art im Anschluss an besondere Bewegungsgruppen untersucht, wie sie der Verfasser in früheren Arbeiten (Math. Ann. XXVIII und XXIX, vgl. F. d. M. XIX. 1887. 143) betrachtet hat. — Im zweiten Teile der Arbeit wird gezeigt, wie die meisten Bewegungsgruppen unter Hinzunahme des Symmetrie-Begriffs einer Erweiterung durch Spiegelung fähig sind. Die zugehörigen Raumteilungen liefern congruente bezw. symmetrische Polyeder, welche durch Bewegung und Spiegelung in einander übergehen. Aus den einer solchen Erweiterung nicht fähigen Bewegungsgruppen gehen Raumteilungen mittels abwechselnd congruenter und symmetrischer Bereiche hervor, welche nur durch Bewegungen in einander übergehen können, weil die Bedingung der gleichartigen Umgebung jedes Bereiches von den Nachbarbereichen hier nicht mehr erfüllt ist. Unter Verzicht auf diese Bedingung sind auch Raumteilungen in lauter congruente Gebiete möglich.

In der zweiten Arbeit wird der Zusammenhang zwischen regulären Raumteilungen und regulären Punktgruppen zur Vervollständigung der hauptsächlich durch Bravais, Wiener und Sohncke ausgebildeten Theorie benutzt, nach welcher die Structur eines Krystalles geometrisch durch eine regelmässige Verteilung von Punkten im Raume dargestellt wird. Solcher Punktsysteme

giebt es nach Sohncke 65. Ihnen entsprechen ebensoviele Bewegungsgruppen und Raumteilungen. Dieselben reichen aber nicht aus, um alle Krystallstructuren zu erklären, welche in den von Minnigerode aufgestellten 32 möglichen Krystallklassen vorkommen. Der Verfasser hat nun im Zusammenhange mit den durch Spiegelung erhaltenen Bewegungsgruppen noch 171 symmetrisch-reguläre Punktsysteme aufgestellt, welche im Verein mit den Sohncke'schen in der That ausreichen, um alle aus den 32 Krystallklassen hervorgehenden Krystallformen geometrisch darzustellen. Im Vergleich mit der neuerdings von Sohncke ausgeführten Erweiterung seiner Theorie erblickt der Verfasser die Vorzüge der seinigen 1) in der Gleichwertigkeit aller Systempunkte, 2) in der geometrischen Analogie zwischen Krystallklasse und Krystallstructur, 3) in der Uebereinstimmung zwischen der Flächenzahl der Krystallklassen und der Zahl der in einem gewissen Bereich enthaltenen Raumpunkte, 4) in der Unabhängigkeit des Symmetriecharakters der Punktsysteme von der Lage des Constructionspunktes. Diese Theorie ist hiernach für die verschiedenen physikalischen Vorstellungen von dem Aufbau der Krystalle gleich annehmbar. Schg.

W. Thomson. On the division of space with minimum partitional area. Acta Math. XI. 121-134.

Bekanntlich wird der in eine Seifenlösung eingetauchte Plateau'sche Drahtwürfel derart in Zellen geteilt, dass in jeder inneren Kante drei Flächen sich schneiden, dass jede dieser Flächen überall gleiche Krümmung (in dem von Thomson und Tait festgestellten Sinne) besitzt, und dass endlich stabiles Gleichgewicht zwischen allen Flächen vorhanden ist. Um nach demselben Gesetze den Raum mit congruenten Zellen auszufüllen, müssten dieselben die Gestalt von Rhombendodekaedern haben; doch würde in diesem Falle kein stabiles Gleichgewicht stattfinden. Der Verfasser findet nun zunächst durch geometrische und mechanische Ueberlegungen, dass die Zellen einer Raumteilung mit stabilem Gleichgewicht die Gestalt eines Vierzehn-

flachs haben müssen, wie es (abgesehen von der Krümmung einzelner Flächen) aus dem regelmässigen Oktaeder entsteht, wenn zwei Ecken schwach, die übrigen vier gleichmässig stark abgestumpft werden. Dieser Körper ist demnach begrenzt von zwei kleinen und vier grossen ebenen Vierecken und acht nicht ebenen Sechsecken. (Die beiden an das innere Viereck des Plateau'schen Würfels grenzenden Zellen sind Teile von ihm.) Der Verfasser stellt die beiden Differentialgleichungen auf, welche die Form dieser letzteren Flächen bestimmen, und löst dieselben durch Annäherung unter der empirischen Voraussetzung, dass die Flächen nur wenig von der ebenen Form abweichen. (Vgl. den Bericht in Bd. XIX. 1887. 520). Schg.

A. W. Petersen. Om Planers Bedaekning med Hjaelp af et System af regulaere n-Kanter. Zeuthen Tidss. (5) VI. 182-184.

Wenn man in einer Ebene ein reguläres Polygon construirt, auf jeder Seite desselben ein neues und auf diese Weise fortfährt, so wird die Ebene bekanntlich einmal vollständig mit diesen Polygonen bedeckt, wenn das Polygon ein reguläres Dreieck, Viereck oder Sechseck ist.

Der Verfasser fragt jetzt, ob es gelingen kann, wenn das reguläre Polygon die oben genannten Seitenanzahlen nicht besitzt, die Ebene auf ähnliche Weise mehrmals mit regulären n-Ecken zu bedecken, so dass jedoch die Anzahl der Schichten endlich sei.

Es wird bewiesen, dass dieses nicht der Fall sein kann.

V.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

A. Sannia ed E. d'Ovidio. Elementi di Geometria. 7a edizione riveduta e corretta. Napoli. Pellerano. XVI+644 S.

Die zahlreichen Auflagen dieser „Elementi", welche in immer kürzeren Zeiträumen gefolgt sind, können zunächst Zeugnis davon geben, dass die Verfasser sich nicht mit einem ersten Erfolge begnügt haben, sondern dass sie ohne Unterlass gearbeitet haben, um sich die Gunst zu erhalten, welche die mathematische Lesewelt ihnen geschenkt hatte. Und dieses erste Urteil, das mangelhaft sein könnte, weil es bloss auf einem buchhändlerischen Erfolge beruht, erweist sich als wahrheitsgemäss, wenn man die wichtigen und glücklichen Aenderungen überschaut, welche das vorliegende Buch allmählich und fortwährend erfahren hat. Ein Unterrichtswerk, dessen Eigenschaften mehr in Verbesserungen der gewöhnlichen Darstellungsmethoden der klassischen Theorien als in umwälzenden Aenderungen dieser Methoden bestehen, kann im Einzelnen nicht besprochen werden. Wir beschränken uns deshalb darauf, die leitenden Hauptgedanken hervorzuheben, denen unsere Autoren gefolgt sind. Hierzu ist besonders die Sorgfalt zu rechnen, mit der sie die Wahrheiten, welche unter die Postulate zu stellen sind (Erfahrungsthatsachen), von denjenigen getrennt haben, die man zu Theoremen erheben kann. Vielleicht ist diese durch die neueren Untersuchungen notwendig gewordene Trennung hier zum ersten Male in einem elementaren Lehrbuche auf ganz klare Weise durchgeführt. Manche Lehrer dürften dies vielleicht nicht gutheissen, weil dadurch die Schwierigkeit der Geometrie erhöht wird; aber sicherlich wird es die Billigung derer haben, welche den Unterricht der Geometrie, so wie sie einmal ist, für nötig halten, d. h. als einer Wissenschaft, die auf einigen Erfahrungsthatsachen beruht,

aber durch reine Verstandesschlüsse fortschreitet. Eine andere charakteristische Eigenschaft der uns beschäftigenden „Elementi“ ist die, dass sie manche Theorien enthalten, die zu den Ergänzungen der elementaren Geometrie gehören, so die Lehre von homothetischen Figuren in der Ebene und im Raume, die harmonischen Gruppen, die Polarität in Bezug auf einen Kreis oder eine Kugel und die Theorie der Polyeder. Wir heben schliesslich als wohlgelungen die Darstellung der Geometrie des Masses hervor (insbesondere die Theorie der Gleichheit, „equivalenza“), die einer der sonst am schlechtesten behandelten Abschnitte ist, und die reiche Sammlung der Uebungsaufgaben.

Es sei uns zuletzt gestattet, eine kleine Ausstellung betreffs des Satzes (No. 127) zu machen, welcher dem Thales beigelegt wird: „Zwei Geraden werden durch parallele Geraden in proportionale Stücke geteilt.“ Selbst Hr. Allman, der dem jonischen Philosophen günstigste moderne Historiker, beschränkt sich auf die Vermutung, jener habe die Proportionalität der homologen Seiten zweier gleichwinkligen Dreiecke gekannt (vergl. Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin. 1889. S. 14).

La. (Lp.)

J. Casey. A treatise on plane trigonometry, containing an account of hyperbolic functions, with nnmerous examples. Dublin. Hodges, Figgis and Co. XV + 275 p.

J. Casey. A treatise on elementary trigonometry. With numerous examples and questions for exercise. 2nd ed. Dublin. Hodges, Figgis and Co. XII + 144 p.

W. E. Johnson. Treatise on trigonometry. London. Macmillan and Co. XVII + 504 p. (1889).

Diese Lehrbücher zeigen in mehreren Beziehungen einen erheblichen Fortschritt im Vergleich zu den allgemein in England gebräuchlichen. Der Functionencharakter der trigonometrischen Verhältnisse wird zu oft hintenan gehalten, wenn nicht gänzlich vergessen. Das Lehrbuch des Herrn Casey (Nr. 1) ist durch französische Muster stark beeinflusst worden und trägt einen

ausgeprägteren analytischen Charakter als die englischen Lehrbücher der letzten Zeit. Die Capitel III und VI, welche bezw. von Logarithmen und trigonometrischen Tafeln handeln, sind ungemein vollständig. In den Capiteln VII und VIII werden die entlegeneren Teile des Gegenstandes erörtert mit Einschluss der imaginären Winkel und der hyperbolischen Functionen. Nach unserer Meinung hätte Herr Casey gut daran gethan, wenn er die elementaren Lehrsätze über Convergenz und Divergenz von Reihen im Capitel III ausgelassen hätte, weil dieselben fast in jedem ordentlichen Lehrbuche der Algebra stehen, und wenn er in den letzten Capiteln sich länger bei der Gültigkeit der Multiplication zweier Reihen mit einander und bei der Continuität der Reihen aufgehalten hätte, weil diese Punkte fast gänzlich in den gebräuchlichen Lehrbüchern der Algebra übergangen werden. Leider ist eine beträchtliche Anzahl von Druckfehlern vorhanden. Als Ganzes jedoch ist das Buch des Rufes seines Verfassers würdig und ein schätzenswerter Beitrag zur Literatur der Trigonometrie.

Nr. 2 besteht wesentlich aus den elementaren Teilen von Nr. 1. In beiden sind die Uebungsaufgaben zahlreich und gut.

Nr. 3 ist ebenfalls ein Lehrbuch der ebenen Trigonometrie in zwei Teilen, der geometrischen und der analytischen. Im ersten Teile sind geometrische Methoden und Anwendungen vorherrschend, und das IX. Capitel über die Geometrie des Dreiecks führt eine beträchtliche Menge der Ergebnisse neuerer Untersuchungen in jenem Gebiete vor. Im zweiten Teile ist die Behandlung unendlicher Reihen ungemein vollständig und wird voraussichtlich ein tüchtiges Studium vom Lernenden verlangen. Hier werden auch die Hyperbelfunctionen besprochen. Das letzte Capitel enthält eine geometrische Deutung des Imaginären. Das Buch ist mit Uebungsbeispielen gut versehen; der Druck und die Ausstattung sind ausgezeichnet. Gbs. (Lp.)

F. Fischer. Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauche an höheren Schulen bearbeitet. II. Plani-

metrie und Trigonometrie. (1887.) III. Stereometrie, Trigonometrie auf der Kugel, darstellende Geometrie, axonometrische Perspective und Parallelperspective. (1888). Leipzig. Fr. Wilh Grunow. 196 S. u. 227 S. gr. 8°.

Der erste Teil dieses Lehrbuchs ist S. 160 dieses Bandes angezeigt worden. Das Werk gehört zu den ausführlicheren Lehrbüchern, welche alle Beweise und Auflösungen vollständig geben. In der Planimetrie beschränkt sich daher der Verfasser auf den für die Gymnasien üblichen Stoff, mit Ausschluss der jetzt sonst vielfach aufgenommenen Elemente der neueren synthetischen Geometrie, wie z. B. der Theorie der harmonischen Gebilde und ihrer Bedeutung für den Kreis. Am Ende des Capitels über die Ausmessung des Kreises ist der Verfasser jedoch aus der von ihm gewählten Beschränkung herausgetreten, indem er die Berechnung der Zahl π aus den Reihen für $\operatorname{arctg} x$ und $\arcsin x$ hinzufügt (ohne diese Bezeichnung). Die Trigonometrie wird auf 42 Seiten abgehandelt und bietet nichts Bemerkenswertes; höchstens könnte man rügen, dass das Additionstheorem für $\sin(\alpha + \beta)$ u. s. w. nur für spitze Winkel bewiesen und ohne weitere Bemerkung auf beliebig grosse Winkel ausgedehnt ist, ein Mangel, der zwar auch anderen Lehrbüchern anhaftet, bei einem ausführlichen wie dem vorliegenden aber hätte vermieden werden müssen. Auch an anderen Stellen kommen Ungenauigkeiten in der Darstellung vor.

Der Lehrstoff der Stereometrie ist nach demselben Gesichtspunkte wie in der Planimetrie behandelt. Die Ausmessung des körperlichen Inhaltes der Pyramide und der Kugel geschieht unter Vermeidung des Cavalieri'schen Princips durch versteckte Integration mittels der Benutzung der Potenzsummen der natürlichen Zahlen. Dagegen ist eine Erweiterung des gymnasialen Lehrstoffs dadurch eingetreten, dass der Verfasser die Elemente der darstellenden Geometrie und der Lehre von den Kegelschnitten nach elementar-synthetischer Behandlung aufgenommen hat. Das letzte Capitel über die Perspective umfasst nur 13 Seiten. Die Ausstattung ist sehr gut. Lp.

L. Huebner. Ebene und räumliche Geometrie des Masses in organischer Verbindung mit der Lehre von den Kreis- und Hyperbelfunctionen neu dargestellt. Leipzig. Teubner.

In diesem Buche wird, abweichend vom gewöhnlichen Gebrauch, die Trigonometrie ohne Voraussetzung der Geometrie selbständig begründet, und es werden die geometrischen Sätze als Ergebnis der trigonometrischen Entwickelungen hingestellt. Später werden dann die trigonometrischen Functionen in neuer Weise eingeführt, indem die Coordinaten des Kreises als abhängig von den zugehörigen Kreissectorflächen angesehen werden. In analoger Weise werden durch Betrachtung der gleichseitigen Hyperbel die Hyperbelfunctionen gewonnen, und viele interessante Anwendungen — unter anderen auch auf Gesetze der Mechanik — beigefügt. Dann folgen räumliche Betrachtungen: Geometrie der Lage auf der Kugelfläche und Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die Stereometrie. Das Buch ist in erster Linie für Lehrer bestimmt, die in den obersten Klassen einer höheren Schule unterrichten, und bietet in der That auch denen, die das Ganze beherrschen, manche wertvollen Gesichtspunkte. Die äussere Ausstattung des Buches ist gut.

Mz.

H. Fenkner. Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Mit einem Vorworte von Dr. W. Krumme. Erster Teil: Ebene Geometrie. X u. 168 S. gr. 8°. Zweiter Teil. Raumgeometrie. IV u. 87 S. gr. 8°. Braunschweig. O. Salle.

Der in diesem Buche dargebotene Lehrstoff ist im wesentlichen derselbe wie auch bei andern Büchern, die dem gleichen Zwecke dienen. Hervorzuheben in dieser Hinsicht ist nur der dem zweiten Teile beigefügte Anhang, in welchem unter anderen auch Aufgaben aus dem Gebiete der Krystallographie behandelt werden. Die Darstellungsweise des Lehrgegenstandes ist aber beachtenswert, insofern durch dieselbe angestrebt wird, dass der

Schüler weniger die Beweise, als vielmehr das Beweisen lernt. Aus diesem Grunde werden diejenigen geometrischen Wahrheiten, die vorzüglich zum Auffinden von Beweisen geeignet sind, als sogenannte Beweismittel hervorgehoben. Dies ist auch im Vorworte näher ausgeführt. Die äussere Ausstattung des Buches ist sehr gut, da auch durch den Druck das Wichtige vom weniger Wichtigen deutlich geschieden ist. Mz.

C. Spitz. Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst einer Sammlung von 800 Uebungsaufgaben zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Neunte, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig. C. F. Winter. XII u. 290 S. gr. 8°.

C. Spitz. Anhang zu dem Lehrbuche der ebenen Geometrie. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der in dem Lehrbuche befindlichen Aufgaben enthaltend. 9te Aufl. Leipzig. C. F. Winter. IV u. 113 S. gr. 8°.

Es ist dies ein mit grosser Sorgfalt angefertigtes Buch, das hinsichtlich der Ausführlichkeit und Vollständigkeit wohl die weitgehendsten Wünsche befriedigt. So findet man darin die Lehre von Pol und Polare, ferner Doppelverhältnisse und Involution u. a. m. Das Buch besteht aus zwei Teilen: Der erste, grössere, enthält den Lehrstoff und die Aufgaben; der zweite die Auflösungen mit erläuternden Bemerkungen. Mz.

C. Spitz. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung von 630 Beispielen und Uebungsaufgaben zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig. C. F. Winter. XII u. 140 S. gr. 8°.

C. Spitz. Anhang zu dem Lehrbuche der ebenen Trigonometrie. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der in dem Lehrbuche befindlichen Aufgaben enthaltend. Leipzig. C. F. Winter. 73 S. gr. 8°.

Dieses Buch besteht auch, wie das vorher erwähnte, aus zwei Teilen, deren erster den Lehrstoff und die Aufgaben, und deren zweiter die Auflösungen enthält. Im ersten Teile ist die Goniometrie mit ganz besonderer und sehr dankenswerter Ausführlichkeit vorgetragen; man findet darin auch die Lehre von der Umformung goniometrischer Ausdrücke und von der Einführung des Hülfswinkels; ferner die trigonometrische Auflösung quadratischer und kubischer Gleichungen und die Lösung goniometrischer Gleichungen; auch eine transcendente Gleichung wird in sehr instructiver Weise behandelt. Dann folgt die Trigonometrie mit ihren Hauptsätzen, und am Schluss kommen noch Aufgaben, in denen die Trigonometrie auf die Stereometrie angewandt wird. Im zweiten Teil sind die Aufgaben aus dem ersten Teil behandelt. Unter sehr vielen anderen sind hierbei die Malfatti'sche Aufgabe, sowie diejenige, welche auf die Teilung des Kreises in siebzehn gleiche Teile Bezug hat, erwähnenswert. Endlich ist noch zu bemerken, dass sowohl dieses Buch als auch das vorher erwähnte eine vorzügliche Ausstattung, guten Druck und eine grosse Zahl von Figuren enthält. Mz.

F. Hočevar. I. Lehrbuch der Geometrie für Obergymnasien. IV u. 199 S. gr. 8°. II. Lehr- und Uebungsbuch der Geometrie für Untergymnasien. Zweite Auflage. IV u. 122 S. gr. 8°. III. Geometrische Uebungsaufgaben für das Obergymnasium. 1. Heft. Planimetrie und Stereometrie. IV u. 51 S. gr. 8°. Wien. F. Tempsky.

Diese Bücher, welche durch kaiserlichen Ministerialerlass für zulässig erklärt sind, enthalten den im Titel bezeichneten Lehrstoff in gedrängter Kürze, aber auch in genügender Klarheit und der Fassungskraft von Schülern entsprechend. Etwas ausführlicher ist das Lehrbuch für Obergymnasien, wie auch schon der Zweck verlangt. In diesem Buche findet man ausser dem gewöhnlichen Lehrstoff unter anderem eine eingehende Besprechung des Cavalieri'schen Princips, ferner Anwendungen der

Trigonometrie auf Höhen- und Distanzmessungen; am Schluss die analytische Geometrie der Ebene bis zu den Kegelschnitten einschliesslich. Druck und Ausstattung der Bücher sind gut.

Mz.

A. Wapienik. Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Mittelschulen. Wien. Karl Gräser. VIII u. 248 S. gr. 8°.

Dieses Buch enthält in gedrängter Kürze, aber mit hinreichender Klarheit und zweckentsprechender Vollständigkeit die Hauptlehren der Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie (ebene und sphärische) und der analytischen Geometrie der Ebene bis zu den Kegelschnitten einschliesslich. Auch ist einiger Uebungsstoff beigefügt, ohne dass jedoch damit die gleichzeitige Benutzung eines andern Uebungsbuches überflüssig wird.

Druck und Figuren, sowie die ganze Ausstattung des Buches sind gut; auch möge nicht unerwähnt bleiben, dass dasselbe durch kaiserlichen Ministerialerlass vom 10. Mai 1888 für zulässig erklärt ist.

Mz.

P. Lindner. Repetitorium der Planimetrie. Cöslin. C. G. Hendess. 29 S. 8°.

In gedrängter Kürze sind die Hauptsätze der Planimetrie übersichtlich zusammengestellt; auch sind die Beweise beigefügt. Zuerst werden Beziehungen der Lage und Grösse, dann metrische Beziehungen angegeben. Der Lehrgang erstreckt sich bis zur Ausmessung des Kreises einschliesslich. Eine grosse Zahl guter Figuren trägt zum besseren Verständnis des Vorgetragenen bei.

Mz.

A. Feld u. V. Serf. Leitfaden für den geometrischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Nebst einer Sammlung von Aufgaben. Vierte Auflage. Wiesbaden. C. G. Kunze's Nachf. (Dr. Jacoby.) IV u. 140 S. 8°.

Es ist dies ein sehr reichhaltiges und nützliches Uebungs-

buch; Beweise der Lehrsätze und Auflösungen der Aufgaben sind nicht mitgegeben; nur die Endresultate der Aufgaben finden sich daselbst. Es wird Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie behandelt. Mz.

H. Roeder. Lehrsätze und Aufgaben aus der Planimetrie. Als Ergänzung zu Kambly's Lehrbuch der Planimetrie. Breslau. F. Hirt. 78 S. gr. 8°.

Eine grosse Zahl von Aufgaben und Lehrsätzen, welche zuerst Winkel und Parallelen betreffen, dann Dreiecke, Vierecke, den Kreis, die Verwandlung, Vergleichung des Flächeninhaltes, Teilung und Ausmessung geradliniger Figuren; die Proportionalität und Aehnlichkeit, die Berechnung regulärer Polygone, Rectification und Quadratur des Kreises; algebraische Analysis geometrischer Probleme und geometrische Oerter. Mz.

O. Schloemilch. Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Masses. I. Heft. Planimetrie. 7te Auflage. Leipzig. Teubner.

Eine inhaltlich unveränderte neue Auflage des bekannten Buches. Scht.

Th. Spieker. Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungsaufgaben. 18te verbesserte Auflage. Potsdam. Aug. Stein. 298 S.

Der Beweis des dritten Congruenzsatzes ist vereinfacht, der Begriff der Symmetrie mehrfach verwertet, und in zwei Aufgaben des Abschnitts XVII sind die irrtümlichen Angaben über die Chordale und die Aehnlichkeitspunkte zweier Geraden berichtigt. Im übrigen sind die Aenderungen unwesentlich. Lg.

D. Kikuchi. Lehrbuch der ebenen Geometrie. T. I-II. Tokio. 340 S. 8°. (Japanisch.)

Das Lehrbuch ist in fünf Abschnitte eingeteilt, die zusammen den sechs ersten Büchern der Elemente entsprechen. Der Text ist mit chinesischen Lettern gedruckt, aber die im Texte befindlichen Figuren sind mit lateinischen Buchstaben versehen.

E.

W. Krimphoff. Vorschule der Geometrie. Essen. G. D. Bädeker. 19 S.

Die Schrift erscheint als Beilage zum Programm des Gymnasiums zu Coesfeld und ist zunächst für den Gebrauch in der Quarta und Untertertia desselben bestimmt, kann aber sehr wohl auch für andere Anstalten empfohlen werden, die nicht von vornherein ein volles Lehrbuch zu Grunde legen. Die gegebenen Erklärungen sind anschaulich und deutlich, der Ausdruck überall correct. Die Congruenzsätze werden durch eindeutige Lösung der betreffenden Constructionsaufgaben, der Satz von der Winkelsumme durch Drehung und Verschiebung einer Geraden längs des Umfangs gewonnen. Die Parallelentheorie, welche sich auf letzteren Satz stützt, erscheint daher erst am Schlusse des Ganzen in § 10.

Lg.

Weitere Lehrbücher.

Rottok. Lehrbuch der Planimetrie. 3te Aufl. Leipzig. 96 S. 8°.

Rottok. Lehrbuch der Stereometrie. 3te Aufl. Leipzig. V + 65 S. 8°.

A. Bachelet. Nozioni di geometria elementare. Torino. Paravia.

G. V. Siciliani. Complemento alla geometria piana di Euclide e geometria solida. Bologna.

C. F. R. Bellows. Elements of geometry. Philadelphia 374 S.

E. M. Langley and W. S. Phillips. The Harpur Euclid. Rivingtons.

Anzeige in Nature XXXVII. 271.

R. C. J. Nixon. Geometry in space. Clarendon Press Series. London. Henry Frowde.

Anzeige in Nature XXXVII. 603, F. d. M. XIX. 1887. 557.

B. H. Rau. First lessons in geometry. For the use of technical, middle, and high schools. Vepery.

Anzeige in Nature XXXVIII. 52.

S. E. Warren. A primary geometry, with simple and practical examples in plane and projection drawing, and suited to all beginners. New-York. Wiley and Sons. London, Trübner. 1887.

Anzeige in Nature XXXVII. 317.

G. A. Wentworth. Plane and solid geometry. Revised edition. Boston. 386 S. 12°.

Paul Bert. First elements of experimental geometry. London. Cassell and Co.

Anzeige in Nature XXXVIII. 295.

H. Bos et H. Rebière. Éléments de géométrie. 3e édition, revue et corrigée. Paris. VIII + 499 S. 8°.

E. Lebon. Géométrie élémentaire, comprenant la géométrie plane et la géométrie dans l'espace. Cours de 1 et de 2 années. Paris. XII + 416 S. 12°.

L. Lecointe. Nouveau cours de géométrie élémentaire. Gand. 216 S. 8°.

E. Rouché et Ch. de Comberousse. Éléments de géométrie, conformes aux derniers programmes officiels, suivis d'un complément à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales, et de notions sur le lever des plans, l'arpentage et le nivellement. 4e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

J. Petersen. Laerebog i den elementaere Plangeometri. 6 udgave. Kjöbnhavn. 80 S. 8°.

J. Petersen. Den plane trigonometri og de sphaeriske Grundformler. 4 udgave. Kjöbnhavn. 68 S. 8°.

F. J. Brockmann. Materialien zu Dreiecksconstructionen nebst Anwendung auf fast 400 Aufgaben. Leipzig B. G. Teubner. VI u. 88 S. gr. 8°.

In diesem Buche wird das Auflösen geometrischer Constructionsaufgaben gelehrt, soweit es überhaupt lehrbar ist, d. h. es werden systematisch alle die Dinge zusammengestellt, auf die es bei der Behandlung solcher Aufgaben vornehmlich ankommt. Zu Anfang werden geometrische Oerter angegeben; dann folgt eine Besprechung der Data zu einer Aufgabe; hierauf werden Lehrsätze, Reductionsaufgaben und die sogenannte algebraische Analysis erörtert. Dies wird dann auf etwa 400 Aufgaben, welche Dreiecksconstructionen betreffen, in klarer und übersichtlicher Weise angewandt. Alle diese Aufgaben gehören der Schulgeometrie an, so dass dieses Buch sich besonders nützlich für den Schulunterricht erweist. Am Schluss ist ein pädagogischer Excurs beigefügt, welcher eine Vergleichung der gegebenen Lösungsmethoden mit den älteren, die nach euklidischem Muster gebildet sind, enthält. Druck und Ausstattung des Buches sind gut. Mz.

F. J. Brockmann. Sammlung von Aufgaben aus allen Gebieten der Elementarmathematik nebst Lösungen oder Lösungsandeutungen. Insbesondere für Abiturienten als Vorbereitung zum Reifeexamen. Paderborn u. Münster. F. Schöningh. VI u. 85 S. 8°.

Der Inhalt dieses Buches ist durch den Titel genügend gekennzeichnet. Es sei nur noch darauf hingewiesen, dass dieses Buch von anderen Aufgabensammlungen sich dadurch unterscheidet, dass es eben nur für den im Titel angegebenen Zweck abgefasst ist; es ist also weniger voluminös, als viele andere Sammlungen und erleichtert durch Uebersichtlichkeit dem Abiturienten die Vorbereitung zum Examen. Der Druck ist gut. Mz.

E. Brunn. Ein Beitrag zur Behandlung planimetrischer Constructionsaufgaben im Anfangsunterricht. Pr. Gymn. Husum. 14 S. 4°.

Diese Arbeit ist von wesentlich pädagogischem Interesse; sie ist als ein Versuch zu betrachten, Methode in die Lösung geometrischer Constructionsaufgaben zu bringen, so dass solche Aufgaben nicht wie Rätselfragen nur durch eine glückliche Anschauung zu lösen sind, sondern in planmässiger Behandlung; dadurch werden sie auch für den Unterricht auf höheren Schulen geeigneter. Mz.

P. Schönemann. Ueber die gegenseitige mechanische Verwandlung gleicher Dreiecke und Parallelogramme mittelst unmittelbarer Constructionen. Pr. Archigymn. Soest. 27 S. u. 3 Taf.

Mechanische Verwandlung ist das Verfahren, inhaltsgleiche Figuren dadurch in einander überzuführen, dass man dieselben in congruente Stücke zerschneidet. Eine grosse Zahl derartiger Aufgaben wird in dieser Arbeit behandelt, so dass diese Art, Gleichheiten von Figuren nachzuweisen, sich deutlich erkennen und in mancherlei Fällen verwenden lässt. Mz.

E. Lemoine. Mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques. Mathesis VIII. 217-222, 241-244.

Die Einfachheit wird durch die Anzahl der elementaren Operationen gemessen (ein Lineal durch einen Punkt zu legen, die Spitze eines Zirkels in einen Punkt einzusetzen, eine Gerade zu ziehen, einen Kreis zu zeichnen). Bei dieser Auffassung führt die Vieta'sche Lösung zur Construction der acht Kreise, welche drei gegebene Kreise berühren, 335 Operationen mit sich, die Bobilier'sche und Gergonne'sche dagegen 500 Operationen, jene ist also einfacher (s. das folgende Referat). Mn. (Lp.)

E. Lemoine. De la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques. C. R. CVII. 169-171, Ass. Franç. Congrès d'Oran, Mathesis VIII. 217-222 u. 241-244.

Die in der Elementargeometrie auszuführenden Constructionen

setzen folgende Grundoperationen voraus: 1) das Lineal so zu legen, dass der Rand durch einen gegebenen Punkt geht (R_1), 2) eine Gerade längs dieses Randes zu ziehen (R_2), 3) die eine Zirkelspitze in einen gegebenen Punkt zu setzen (C_1), 4) die zweite Zirkelspitze in einen anderen Punkt zu setzen (C_2), 5) den Kreis auszuziehen (C_3). Werden alle diese Operationen als gleichwertig ($R = C = 1$) angesehen, so nennt Verfasser „Einfachheit" der Construction die Zahl der Operationen, welche diese Construction erfordert. Darauf hin werden die im Traité de Géométrie von Rouché und de Comberousse gelösten Fundamentalaufgaben auf ihre Einfachheit geprüft. So ist z. B. für die Aufgabe, „einen Winkel zu halbiren", die Einfachheit:

$$2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3 = 7,$$

„ein Dreieck aus den drei Seiten zu construiren":

$$4R_1 + 3R_2 + 8C_1 + C_2 + 3C_3 = 19.$$

Auffällig verschieden sind hiernach in ihrer Einfachheit die beiden Auflösungen des Apollonischen Tactionsproblems; die der alten Vieta'schen ist 335, die der neueren dagegen 500 (s. den vorigen Bericht). Lg.

F. Reidt. Planimetrische Aufgaben für den Gebrauch im Schul-, Privat- und Selbstunterricht. Zweiter Teil. Aufgaben, geordnet nach Auflösungs-Methoden und mit Anleitung zur Behandlung versehen. Zweite umgearbeitete Auflage. 127 S.

Um den Stoff auf dasjenige Mass zu beschränken, welches im Unterricht wirklich durchgearbeitet werden kann, werden in der vorliegenden Sammlung zur Auflösung der Aufgaben im wesentlichen nur vier Methoden herangezogen und zwar: Hülfsfiguren, geometrische Oerter im ersten Cursus, ähnliche Figuren und die algebraische Analysis im dritten Cursus. Der zweite und der vierte Cursus enthalten Erweiterungen der vorhergehenden und behandeln die schwierigeren Aufgaben; sie sind aus didaktischen Gründen von den beiden erstgenannten hier in der zweiten Auflage abgesondert worden, so dass das Buch zweckmässig in den Klassen Quarta bis Secunda gebraucht werden kann. In einem

Anhange werden einige vermischte Aufgaben gegeben und das Apollonische Berührungsproblem nach der Vieta'schen Methode behandelt; die Steiner'sche Lösung dieses Problems, sowie überhaupt Aufgaben über harmonische Beziehungen, Pol und Polare etc. finden sich nicht vor, so dass das Bedürfnis der Realgymnasien und Realschulen nach dieser Richtung hin nicht befriedigt ist. Lg.

G. Gerstenberg. Aufgaben aus der rechnenden Geometrie. Pr. Plön.

74 Aufgaben über rechtwinklige, 56 über gleichschenklige und 51 über allgemeine Dreiecke, „welche zur Voraussetzung ihrer constructiven Lösung die vorangegangene algebraische Berechnung nicht unmittelbar gegebener Bestandteile haben, oder deren Construction sich doch auf diesem Wege ungleich leichter macht und vereinfacht.“ Die Zusammenstellung kann als Ergänzung neben jedem Lehrbuch im Sinne des Verfassers gebraucht werden, auch wenn man, wie Referent, der Meinung ist, dass bei vielen dieser Aufgaben die rein geometrische Lösung die einfachere und naturgemässe ist, z. B. bei $a, h_a, b+c$; h_a, t_a, m_a.
Lg.

W. Lichtblau und B. Wiese. Sammlung geometrischer Rechenaufgaben zum Gebrauch an Seminarien und zum Selbstunterricht. Breslau. F. Hirt. 140 S.

Die Verfasser sind Seminarlehrer und haben ihr Buch zunächst für die Hand des Seminaristen bestimmt; es soll einerseits namentlich mit den leichteren Aufgaben in den Volksschulen und Präparandenanstalten Verwendung finden, andererseits im Seminar und nach demselben dem jungen Lehrer zur Wiederholung und Erweiterung des Gelernten Gelegenheit geben. Es werden aus der Planimetrie und Stereometrie Rechenaufgaben im geometrischen Gewande, meist Inhaltsberechnungen nur mit bestimmten Zahlen gegeben, die im übrigen geschickt zusammengestellt sind und sehr wohl auch von Collegen höherer Lehr-

anstalten gebraucht werden können. Die Aufgaben führen höchstens auf quadratische Gleichungen, und diese sind ebenso wie andere schwierigere durch einen Stern kenntlich gemacht. Wenn die Verfasser in der Vorrede sagen: „Durch die beigefügten Formeln soll natürlich nicht das mechanische Rechnen begünstigt werden, ... eine Formel hat für den Schüler überhaupt nur dann Wert, wenn er im Stande ist, sie sofort zu beweisen bezw. zu entwickeln", so ist das ganz unsere Meinung. Wie steht aber damit im Einklang, wenn S. 105 für Umfang von Ellipse und Oval die Formel gegeben wird: $U =$ (annähernd) $(a+b)\pi$, (genauer) $= 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$, (am genauesten) $= 1{,}99\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$ und S. 106 für den cylindrischen Abschnitt: Mantel $= r\pi(h+h')$, Volumen $= \frac{1}{2}r^2\pi(h+h')$? Bei allen Aufgaben über Ellipse, elliptische Cylinder u. dergl. kann es sich doch nur um mechanisches Rechnen handeln, und darum gehören dieselben nicht in diese Aufgabensammlung. S. 66 soll in Aufg. 83 der tragfähigste Balken mit rechteckigem Querschnitt hergestellt werden. Ob wohl ein Seminarist die zu Grunde liegende Formel herleiten kann? Die beigegebenen Auflösungen erhöhen den Gebrauchswert des Buches. In dem Bestreben, den Forderungen der deutschen Sprache gerecht zu werden, sind die Verfasser einerseits zu weit gegangen (sie werden z. B. die Ellipse mit ihrem Langrund nicht aus der Welt schaffen); andrerseits verfahren sie selbst noch schüchtern und unsicher, indem sie die Verdeutschung meist nur als wohlgemeinten Vorschlag in Klammern hinzufügen oder umgekehrt durch das sonst übliche Wort erklären; meist aber gebrauchen sie statt ihrer eigenen, neuen Bezeichnungen die alten, so z. B. in der Inhaltsangabe S. 2. In dieser Beziehung dient dem Referenten die Stereometrie von Kommerell-Hauck als Muster (s. unten S. 560). Lg.

W. Röginp. Vejledning til Lösning af geometriske Opgaver, hvoraf over 100 löste. Kjöbnhavn. 100 S. 8°.

A. Schiappa Monteiro. Note sur le triangle isoscèle. Lisboa J. (1887.)

Dieser Aufsatz enthält nur Beweise einiger bekannten Lehrsätze über das gleichschenklige Dreieck. Tx. (Lp.)

F. Panizza. Piccolo contributo alla teoria geometrica dell'equivalenza. Besso Per. mat. III. 8-13.

Zunächst erläutert der Verfasser den Pappus'schen Beweis für den Satz: „Wenn *ABDE* und *ACGF* zwei beliebige über den Seiten *AB*, *AC* eines Dreiecks construirte Parallelogramme sind und *H* der Treffpunkt der Geraden *DE*, *FG*, so ist die Summe der Inhalte dieser beiden Parallelogramme gleich dem Inhalte eines über zwei Strecken construirten Parallelogramms, die mit *BC* und *AH* äquipollent sind.“ Darauf werden hieraus einige elementare Sätze über Flächengleichheit abgeleitet, die man sonst anders beweist. La. (Lp.)

M. Simon. Vereinfachtes Verfahren, flächengleiche Figuren in eine möglichst kleine Anzahl paarweise congruenter Teile zu zerlegen. Hoffmann Z. XIX. 401-408.

Verfasser knüpft an den bekannten Beweis des Pythagoras an, wo die Kathetenquadrate in Stücke zerlegt werden, aus denen sich das Hypotenusenquadrat zusammensetzen lässt, und wendet das gleiche Verfahren an: I. bei Parallelogrammen mit gleichen Grundlinien und Höhen, II. bei den sogenannten Ergänzungsparallelogrammen, III. bei Dreiecken mit gleichen Grundlinien und Höhen, IV. bei der Aufgabe, ein Parallelogramm in einen Rhombus zu verwandeln. S. 498 weist Verfasser auf die denselben Gegenstand behandelnden Arbeiten von P. Schönemann in Soest, hin. (Vgl. oben S. 537.) Lg.

Reusch. Eine Minimumsaufgabe. Böklen Mitt. II. 139-140.

Die Aufgabe, durch einen Punkt innerhalb eines Winkels

die kürzeste Transversale in den Winkel zu legen, wird durch elementare Betrachtung mittelst Probirens annäherungsweise gelöst. F.

F. Panizza. Costruzione di triangoli isobaricentrici con uno dato. Besso Per. mat. III. 37-39.

Lehrsatz. Wenn man über den Seiten eines Dreiecks nach aussen ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke construirt, so bilden ihre mit den Ecken des gegebenen Dreiecks nicht zusammenfallenden Ecken ein neues Dreieck mit demselben Schwerpunkte wie das gegebene. — Dieser Satz gestattet, zu dem gegebenen Dreiecke isobarycentrische zu construiren, giebt sie aber offenbar nicht alle. La. (Lp.)

J. S. Mackay. Properties of the figure consisting of a triangle, and the squares described on its sides. Edinb. M. S. Proc. VI. 2-12.

Dieser Aufsatz enthält den Wortlaut und die Beweise einer grossen Menge von Eigenschaften der Figur, welche sich aus einem Dreiecke und den über seinen Seiten beschriebenen Quadraten zusammensetzt. Manche derselben hält der Verfasser für neu; bei denen, die er anderswo schon angetroffen hat, giebt er die nötigen Hinweise. Gbs. (Lp.)

M. d'Ocagne. Note sur les points complémentaires. Mathesis VIII. 62-63.

A. Strnad. Ueber das harmonische Viereck. Casop. XVII. 132. (Böhmisch.)

Die wichtigsten Eigenschaften eines Vierecks, bei welchem die Producte der Gegenseiten gleich sind, also

$$ab \,.\, cd = ad \,.\, bc,$$

werden nach Tucker, M'Cay, Casey, Neuberg, Jermakov u. a. zusammengestellt und mit gewissen Kreisen in Zusammenhang gebracht. Std.

C. Pabst. Einige Beziehungen zwischen den drei Höhen und zwischen den drei seitenhalbirenden Transversalen eines Dreiecks. Hoppe Arch. (2) VII. 10-26.

Es werden die Seiten und Winkel durch die Höhen resp. Mittellinien ausgedrückt und danach die Bedingungen aufgestellt, unter welchen ein Dreieck aus diesen Stücken construirt werden kann. Lg.

R. E. Allardice. On the inscription of a triangle of a given shape in a given triangle. Edinb. M. S. Proc. VI. 42-47.

Dieser Aufsatz enthält einige Sätze, die in Folge der Aufgabe gefunden sind: Einen Punkt P innerhalb eines Dreiecks so zu bestimmen, dass die Bilder Q, R, S von P in den Seiten die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind. Das Problem ist mit dem folgenden gleichbedeutend: Einem gegebenen Dreieck ein gleichseitiges Dreieck so einzubeschreiben, dass die Lote zu den Seiten des gegebenen Dreiecks durch die Ecken des gleichseitigen Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Sowohl von dieser Aufgabe werden Lösungen gegeben als auch von der folgenden allgemeineren: Einen Punkt P so zu bestimmen, dass, wenn PD', PE', PF' zu den Seiten des Dreicks ABC senkrecht sind, $D'E'F'$ irgend einem gegebenen Dreiecke DEF ähnlich wird.

Gbs. (Lp.)

R. E. Allardice. A construction for the Brocardal points. Edinb. M. S. Proc. VI. 88.

Zusatz zum vorangehenden Aufsatze. Gbs. (Lp.)

E. Sang. On John Leslie's computation of the ratio of the diameter of a circle to its circumference. Edinb. Proc. XV. 348-358.

In den späteren Auflagen der „Elements of Geometry“ (um 1816) construirt Leslie zur Berechnung von π das Polygon, in-

dem er eine bekannte Länge für den Umfang desselben annimmt, und berechnet die Halbmesser des ein- und des umgeschriebenen Kreises. Indem er die Seitenanzahl wieder und wieder verdoppelt, aber denselben Umfang beibehält, bringt er die Halbmesser näher und näher zusammen, bis die Differenz vernachlässigt werden kann. Der Verfasser bemerkt, dass durch diese Umkehrung der Aufgabe sowohl die geometrische Forschung als auch die rechnerische Arbeit erheblich vereinfacht werden, und er giebt einige Einzelheiten und Vereinfachungen der Arbeit, indem er vom Quadrate bis zu dem 1024-Eck übergeht.

Cly. (Lp.)

G. O. Widemann. Die von der Wissenschaft seit 2000 Jahren vergeblich gesuchte Lösung der Quadratur des Kreises. Berlin. 4 S. gr. 8° mit 1 Taf.

D. Fellini. Proprietà delle circonferenze concentriche rispetto all'equivalenza geometrica. Besso Per. mat. III. 75-79.

M. A. Pellet. Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné, à l'aide de la règle et du compas. S. M. F. Bull. XVI. 113-119.

Das Verfahren ist folgendes: Es sei $AM = a$ ein Kreisbogen kleiner als $\frac{\pi}{2}$, $AR = ma$, $PN = m \, . \, PM$ und J der Schnitt des Radius OR mit dem Lot in N auf PM, dann ist das Verhältnis $\frac{NJ}{PA}$ abhängig von a und m, sehr wenig veränderlich, wenn a von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, dagegen sehr veränderlich, wenn m von 0 bis $\frac{1}{2}$ wächst. Wenn man also den Wert des Verhältnisses für einen Wert von m kennt, so kann man für einen beliebigen Bogen a den Punkt R finden. Der begangene Fehler kann leicht unter $\frac{1}{1000}$ des Radius gebracht werden. (Vgl. F. d. M. XIX. 1887. 543.)

Lg.

C. A. Laisant. Extrait d'une lettre. Journ. de Math. spéc. (3) II. 185-187.

E. Lemoine. Extrait d'une lettre. Ibid. 254-255.

A. Mannheim. Extrait d'une lettre. Ibid. 283-284.

Die beiden ersten Briefe beziehen sich auf eine von Herrn Mannheim gestellte Aufgabe: „Gegeben seien eine willkürliche Gerade, ein Kreis und ein Punkt M auf dieser Curve. Von dem letzteren Punkte aus eine solche Sehne MA zu ziehen, dass die Tangente des Kreises in A und die Sehne gegen die gegebene Gerade gleiche Neigung besitzen. Es giebt drei solche Sehnen MA. Sind A, B, C ihre Endpunkte, so bilden die Tangenten in denselben ein gleichseitiges Dreieck." Herr Lemoine zeigt den Zusammenhang dieser Aufgabe mit dem Steiner'schen Satze, dass durch jeden Punkt einer Ellipse vier Krümmungskreise gehen. Herr Mannheim erklärt, dass die Aufgabe durch den Aufsatz des Herrn Longchamps über das Trifolium veranlasst sei (J. de M. spéc. 1887. 203). Lp.

R. Lachlan, J. Beyens, Matz. Solution of question 9146. Ed. Times XLIX. 36-37.

Zwei Kreise mit den Radien ϱ, ϱ' schneiden sich in A, B und werden von einer beliebigen Geraden in den Punkten (P, Q), (R, S) getroffen; dann ist:

$$(AP.BP.AQ.BQ)/\varrho^2 = (AR.BR.AS.BS)/\varrho'^2,$$
$$(AP.BP.AS.BS)/SP^2 = (AQ.BQ.AR.BR)/QR^2.$$

Ein allgemeinerer Satz von Laguerre steht in C. R. LX. 71-73. Lp.

Jos. Fürst. Ueber den Zusammenhang des Carnot'schen Lehrsatzes mit dem Theorem des Ptolemaeus. Casop. XVII. 27. (Böhmisch.)

Leitet den letztgenannten Satz aus dem ersten ab. Std.

H. Kunz. Ueber Vielecke, welche einem Kreise eingeschrieben und einem anderen zugleich umgeschrieben sind. Pr. Real-Gymn. Zwickau. 29 S.

Mit der Aufgabe, die Bedingungsgleichung zwischen den Radien und dem Mittelpunktsabstand zweier Kreise zu finden für den Fall, dass sich dem einen Kreis ein beliebiges Vieleck einschreiben lässt, welches dem anderen gleichzeitig umgeschrieben ist (beim Dreieck die bekannte Euler'sche Formel $d^2 = R^2 - 2Rr$), haben sich Euler, Fuss, Steiner, Jacobi und Richelot beschäftigt. Rosanes und Pasch, Poncelet, Cayley, M. Simon und Moutard haben dieselbe weiter gefasst und für zwei Kegelschnitte durchgeführt. — Die Arbeit beginnt mit diesen geschichtlichen Notizen und giebt dann auf Grund der Jacobi'schen Abhandlung in J. f. Math. III eine zusammenhängende und ausführliche Lösung des Problems für die beiden speciellen Fälle, dass es sich um zwei Kreise handelt, welche sich nicht schneiden. Man wird dabei (Abschnitt I und II) auf das Additionstheorem für elliptische Integrale erster Gattung mit dem Modul $\varkappa^2 = \frac{4Rd}{(R+d)-r^2}$ geführt, wo R den Radius des grossen, r den des kleinen Kreises und d den Centralabstand bedeutet. Ist R und $\varkappa$ gegeben, so erfüllen für diesen Modul alle Kreise r die Bedingung, welche mit R dieselbe Potenzlinie haben; letztere schneidet auf dem Durchmesser AB der Centrale das grössere Stück $JA = \frac{2R}{\varkappa^2}$ ab, wodurch sich irgend ein Kreis dieser Schar leicht construiren lässt. Das genannte Additionstheorem führt hier auch zu dem Poncelet'schen Satz: „Wenn irgend ein Vieleck einem Kreise eingeschrieben und einem anderen völlig innerhalb des ersteren liegenden umgeschrieben ist, so giebt es unendlich viele solcher Vielecke.“ Hat dasselbe eine gerade Anzahl von Seiten, so schneiden sich die Verbindungslinien je zweier gegenüberliegenden Ecken in einem Punkt. Abschnitt III leitet zunächst nach Richelot (J. für Math. V) aus der für das n-Eck geltenden Bedingungsgleichung die für das $2n$-Eck geltende und darauf speciell die Formeln für das Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck und

Achteck her. Für $\frac{R+d}{r} = p$ und $\frac{R-d}{r} = q$ heissen dieselben der Reihe nach:

$$(p-1)(q-1) = 1, \quad (p^2-1)(q^2-1) = 1,$$
$$[1-(p^2-1)(q^2-1)]^2 = 4p^2q^2(p-1)(q-1),$$
$$[1-(p^2-1)(q^2-1)]^2 = 4p^2q^2(p^2-1)(q^2-1),$$
$$[1-(p^2-1)(q^2-1)]^4 = 16p^4q^4(p^2-1)(q^2-1).$$

Neues ist danach in der Arbeit nicht enthalten. Lg.

O. Schlömilch. Bemerkung über doppelt centrische Vielecke. Schlömilch Z. XXXIII. 191.

Mit Bezugnahme auf eine specielle Maximum-Aufgabe beim Dreieck und Viereck, welche einem Kreise eingeschrieben und einem anderen Kreise gleichzeitig umgeschrieben sind, wird die entsprechende Untersuchung des allgemeinen Theorems für beliebige „centrische Vielecke“ angeregt.

Lg.

O. Zimmermann. Metrische Relationen am Sehnenviereck. Hoppe Arch. (2) VII. 64-98.

Im Sehnenviereck *ABCD* schneiden sich *AB* und *CD* in *P*, *BC* und *AD* in *Q*, *AC* und *BD* in *N*. Es werden durch die Seiten *a*, *b*, *c*, *d* ausgedrückt (und umgekehrt): 1) die Lote, welche man von *A*, *B*, *C*, *D*, *P*, *Q*, *N* und dem Umkreiscentrum *M* auf die vier Seiten und von den Mitten der Seiten auf die Gegenseiten fällen kann; 2) die Linien, welche die Winkel bei *N*, *P* und *Q* halbiren; 3) die Linien, welche *N*, *P*, *Q* mit den Mitten von *a*, *b*, *c*, *d* verbinden; 4) die Radien der Um-, In- und Ankreise für die Dreiecke *ABC*, *ABD*, *ABQ*, *ABN* etc. Zum Schluss werden einige Gruppen von je vier Stücken des Sehnenvierecks angegeben, vermittelst deren *a*, *b*, *c*, *d* und der Inhalt *J* nicht ausgedrückt werden können, weil zwischen den vier Stücken jeder Gruppe eine Relation besteht, z. B. die Lote von *A*, *B*, *C*, *D* auf die Diagonalen, die Radien der den vier Dreiecken *ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB* umgeschriebenen Kreise u. a. m. Lg.

A. STRNAD. Ueber das Sehnentangentenviereck. Casop. XVII. 10. 56. (Böhmisch.)

Enthält eine zusammenfassende Darstellung der wichtigsten Eigenschaften dieses Vierecks auf Grundlage von Arbeiten, wie sie Steiner, Lieber und von Lühmann, Schlömilch, Consentius, Schumacher u. a. geliefert haben, wobei vielfach auch formell wie sachlich Neues geboten zu sein scheint. Std.

W. GOERING. Geometrische Untersuchungen. Pr. d. Neustädter Realgymnasiums in Dresden. 18 S.

Referent ist mit dem Verfasser über die vorliegende Programmschrift in einen Streit geraten, welcher in der Hoffmann'schen Zeitschrift 1889 zum Austrag gebracht wurde. Mit dem Hinweis hierauf diene zur Orientirung des Lesers, dass im Teil I zunächst die Specialfälle der Potenzlinie und der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise besprochen werden und im Anschluss hieran eine Modification der Poncelet-Steiner'schen Lösung des Apollonischen Tactionsproblems gegeben wird. Der Gedankengang des II. Teils ist folgender: „Es ergiebt sich zunächst die allgemeine Ueberzeugung von der Notwendigkeit der Existenz eines Kreises, der, die drei angeschriebenen Kreise ausschliessend, den eingeschriebenen Kreis einschliessend berührt. Von diesem Kreise lässt sich erweisen, dass 1) seine Mitte, 2) sein Radius mit demjenigen des Feuerbach'schen Kreises identisch ist."

Lg.

M. JOFFROY. Nouveau théorème relatif aux circonférences tangentes. Nouv. Ann. (3) VII. 461-464.

Die acht Berührungskreise dreier Kreise lassen sich in vier Gruppen zu je zweien so combiniren, dass immer der eine diejenigen der gegebenen Kreise einschliesst, welche der andere ausschliesst. Die Centralen der vier Paare Berührungskreise gehen durch den Potenzpunkt der gegebenen, sie bilden einen Vierstrahl. Der hier bewiesene Satz lautet nun: Sind vier Kreise gegeben, so bilden die vier Vierstrahlen, welche man in der an-

gegebenen Weise für je drei dieser Kreise erhält, bei der Kreuzung noch acht andere Vierstrahlen. Lg.

Sporer. Zum Problem des Apollonius. Böklen Mitt. II. 196-198.

Mit Benutzung eines Hülfssatzes über zwei Kreise (Kugeln), welche sich durch circulare Inversion in gleiche Kreise (Kugeln) verwandeln lassen, wird der Satz abgeleitet: Es giebt acht Kreise, welche irgend drei gegebene Kreise M_1, M_2, M_3 berühren; dieselben ordnen sich zu vier Paaren, und je vier, zwei solchen Paaren angehörige, Kreise haben einen weiteren Kreis N zum gemeinsamen Berührungskreis. Dies giebt sechs Kreise N und diese Kreise werden alle mit den gegebenen durch einen und denselben Kreis K rechtwinklig (oder im Durchmesser) geschnitten. — Der Satz wird erweitert und auch für die Kugeln aufgestellt. Lg.

P. Aubert. Sur un système de cercles tangents à une circonférence et orthogonaux à une autre circonférence. Edinb. M. S. Proc. VI. 33-38.

Der folgende Satz wird bewiesen: Wenn zwei Kreise S und Σ gegeben sind mit den Mittelpunkten o und ω, den Radien r und ϱ, S innerhalb Σ liegt, ω innerhalb S, dann berühren alle Kreise T, welche S von aussen berühren und Σ rechtwinklig schneiden, einen dritten festen Kreis. Zwei Sätze betreffs der Kreisschar T werden gegeben. Gbs. (Lp.)

Jeffery. I. On the circles, which are described about the four circles, escribed and inscribed in a given plane triangle, taken by triads. II. On the circles, which may be described about the eight small circles of a sphere, taken by triads, which are inscribed in the triangles formed by three planes intersecting in the centre. Quart. Journ. XXIII. 180-197.

Es werden in I. die Gleichungen der Kreise, welche die Berührungskreise eines ebenen Dreiecks zu je dreien berühren, in Punktcoordinaten aufgestellt und die Mittelpunkte und Radien derselben bestimmt. Die Resultate stimmen mit denjenigen überein, welche Referent in seiner Programmarbeit „die Berührungskreise eines ebenen Dreiecks 1884" auf elementarem Wege hergeleitet hat, sind aber nicht so vollständig wie die letzteren; — II. behandelt dieselbe Aufgabe für das sphärische Dreieck. Lg.

E. Césaro. Sur les cercles inscrits à un triangle. Nouv. Ann. (3) VII. 99-103.

Mit Hülfe von Trägheitscoordinaten (vergl. das Referat F. d. M. XIX. 1887. 550) wird der Satz bewiesen: Die Kiepert'sche Hyperbel ist die complementare Figur für den Ort der Mittelpunkte derjenigen Kegelschnitte, welche einem Dreiecke so eingeschrieben sind, dass ihre Axen den Axen der Steiner'schen Ellipse parallel sind. Insbesondere liegen die Complementaren der Inkreiscentra auf jener Hyperbel. Lg.

H. Bleicher. Ein Satz aus der Elementargeometrie. Hoffmann Z. XIX. 415-418.

Der Satz heisst: Beschreibt man über den Höhen eines Dreiecks als Durchmesser Kreise K_h und über denjenigen Segmenten der Höhen, welche zwischen den Ecken und dem Höhenschnitt liegen, als Durchmesser Kreise K_s, so liegen die sechs weiteren Schnittpunkte, welche die drei Kreise K_h mit den drei Kreisen K_s gemeinschaftlich haben, auf einer neuen Kreisperipherie K. Lg.

E. Vigarié. Géométrie du triangle. Étude bibliographique et terminologique. Journ. de Math. spéc. (3) II. 9-13, 57-61, 102-104, 127-131, 182-195, 199-202, 242-244, 276-278.

Die Arbeiten über die Geometrie des Dreiecks haben in den letzten Jahren einen solchen Umfang angenommen und so viele

neue Benennungen geschaffen, dass eine zusammenfassende Uebersicht über die Literatur und die gebräuchlichen Kunstausdrücke ein dankenswertes Unternehmen ist. Die Reihe von Artikeln, in denen Herr Vigarié sich dieser Mühe unterzieht, hat schon im vorigen Jahrgange des Journ. de Math. spéciales begonnen und ist im gegenwärtigen noch nicht abgeschlossen. Viele von den citirten Arbeiten sind in den F. d. M. deshalb nicht erwähnt worden, weil sie in wenig zugänglichen Zeitschriften veröffentlicht wurden. In Zukunft wird sowohl das oben erwähnte Journal wie auch das J. de Math. élémentaires regelmässig benutzt und somit eine grosse Lücke der Berichterstattung ausgefüllt werden. Es ist wohl kaum nötig hinzuzufügen, dass die sehr reichhaltige Arbeit des Hrn. Vigarié manches Wichtige aus der deutschen Literatur nicht genügend berücksichtigt.

Lp.

E. Lemoine et E. Vigarié. Note sur les éléments Brocardiens. Journ. de Math. élémentaires.

Es handelt sich um eine genaue Nomenclatur und Unterscheidung der beiden Brocard'schen Punkte (points de Brocard) und derjenigen Punkte, qui se déduisent d'un point k quelconque du plan comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine (Ass. franç. 1885, F. d. M. XVII. 1885. 547), der points Brocardiens, endlich um die sogenannten droites Brocardiennes.

Lg.

E. Lemoine. Notes sur diverses questions de la géométrie du triangle. Ass. Franç. Congrès d'Oran. 12 S.

Eine Ergänzung und Vervollständigung der Aufgaben, welche der Verfasser schon seit mehreren Jahren der Ass. Franç. vorgelegt hat. Etwas ausführlicher ist Aufgabe V behandelt: Den Berührungskreis der drei Kreise zu zeichnen, welche durch die Ecken eines Dreiecks so gelegt sind, dass sie sich zu je zweien berühren. No. XII giebt eine einfache Construction des Lemoine'-

schen und desjenigen Punktes, dessen Normal-Coordinaten $\frac{1}{a^3}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{c^3}$ sind.

Lg.

H. Lieber. Ueber den Brocard'schen Kreis. Stettin. Pr. (No. 137.) 11 S.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der Programmarbeiten von 1886 und 1887 und bringt im Abschnitt VII zunächst eine Vervollständigung der Sätze über den Tucker'schen Kreis. VIII behandelt die beiden Dreiecke, welche entstehen, wenn der Brocard'sche Winkel an die Dreiecksseiten nach aussen angetragen wird, IX die gleichseitige Hyperbel der neun Punkte. In X werden 17 von Hrn. Emmerich herrührende Dreiecksaufgaben zusammengestellt, in welchen das Dreieck aus gewissen ausgezeichneten Punkten zu construiren ist, in XI endlich werden die Resultate mitgeteilt, welche Herr Artzt in seinen Programmschriften Recklinghausen 1884 und 1886 veröffentlicht hat (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 473). — Die verdienstliche Arbeit wird jedenfalls ihren Zweck erfüllen, „durch eine übersichtliche Zusammenstellung der hauptsächlichsten Sätze weiteren Kreisen Gelegenheit zu geben, die neueren Untersuchungen über das Dreieck näher kennen zu lernen.“ Lg.

W. Fuhrmann. Berichtigende Notiz zum Aufsatz I. Hoppe Arch. (2) VI. 218.

Es handelt sich um den Irrtum in Bezug auf die Autorschaft des Brocard'schen Winkels; cf. F. d. Math. XIX. 1887. 547.

Lg.

R. W. Genese. Geometrical demonstration of Feuerbach's theorem concerning the nine-point circle. London M. S. Proc. XIX. 216-218.

Mehrfach sind in dem letzten Decennium möglichst einfache elementar-geometrische Beweise des interessanten Satzes der Dreiecks-Geometrie geliefert. Auch dieser Beweis ist elementar

und rein geometrisch. Sind X und Z die Berührungspunkte des Inkreises auf BC bezw. AB, ferner P und R die Mitten der ausserhalb des Dreiecks ABC durch BC bezw. AB bestimmten Bögen des Kreises der neun Punkte, so schneiden sich PX und RZ unter einem Winkel, von dem bewiesen wird, dass er gleich $\frac{1}{2}\beta$ ist, und dass also sein Scheitel T auf dem Inkreise liegt. Ferner zeigt sich, dass T Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise ist, wodurch dann der Beweis erbracht ist. Scht.

M. F. Farjon. Note sur une propriété du cercle des neuf points. Nouv. Ann. (3) VII. 288-292.

Die Ecken eines stumpfwinkligen Dreiecks ABC können als die Schnittpunkte der Gegenseiten und Diagonalen von unendlich vielen Kreisvierecken betrachtet werden in dem Kreise mit dem Radius $\varrho = \sqrt{h'h''}$ um den Höhenpunkt H, wo h' und h'' die Abschnitte einer beliebigen Höhe sind. Sind M und N die Mitten zweier Gegenseiten eines solchen Vierecks, so ist der geometrische Ort für die Mitte P von MN (den Eckenschwerpunkt des Kreisvierecks) der Feuerbach'sche Kreis. Beim spitzwinkligen Dreieck werden die Viereke imaginär; es giebt aber doch stets einen entsprechenden reellen Punkt P, dessen Ort der Feuerbach'sche Kreis ist. Lg.

J. Wilson. The nine-point circle. Edinb. M. S. Proc. VI. 38-40.

J. Hermes. Neuer Punkt und Gerade in der Dreiecksebene. Hoppe Arch. (2) VI. 437-442.

1. Sind O, O_a, O_b, O_c die Berührungskreiscentra, L, L_a, L_b, L_c die Schnittpunkte der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten je eines Berührungskreises, so schneiden sich OL, O_aL_a, O_bL_b, O_cL_c in einem Punkt auf der Euler'schen Geraden.

2. Der Berührungspunkt T des Feuerbach'schen und des Inkreises, der Mittelpunkt L des Brocard'schen Kreises und der

Tarry'sche Punkt für das aus den Berührungspunkten von O gebildete Dreieck liegen auf einer Geraden. Lg.

R. Tucker. On Isoscelians. London M. S. Proc. XIX. 168-170.

Sind X und Y zwei Punkte auf den Seiten AB und AC eines Dreiecks ABC, so heisst hier XY eine „Isoscelian", wenn das Dreieck AXY gleichschenklig ist mit dem Schenkel XY, und zwar positiv oder negativ, je nachdem X oder Y Spitze ist. Die Betrachtung dieser Linien führt auf einen Punkt, welcher in gewisser Beziehung das Analogon ist zum Lemoine'schen Punkt. Je drei dieser Linien bilden ein Dreieck, dessen Ecken auf dem Umkreise resp. auf den Seiten von ABC liegen. Lg.

S. Roberts, J. Neuberg, W. J. C. Sharpe. Solution of questions 9093 and 9170. Ed. Times XLVIII. 37-39, 178-182.

Die Seiten eines Dreiecks werden durch eine beliebige Kreislinie geschnitten; die ausgeschnittenen Sehnen werden als die Durchmesser dreier neuen Kreise benutzt; dann ist der Potenzpunkt dieser drei Kreise der „conjugirt isogonale" bezüglich des Dreiecks zum Mittelpunkte des ersten Kreises. Der entsprechende Satz gilt für das Tetraeder und eine beliebige Kugel. Ein speciellerer Satz wird für die Orthogonalkugel der vier Kugeln aufgestellt, welche die Schnittkreise der Umkugel eines Tetraeders mit den vier Seitenflächen zu Hauptkreisen haben. Hr. Sharpe zeigt die Gültigkeit der Sätze für die „Simplicissima" des n-dehnigen Raums. Lp.

J. Neuberg, S Roberts. Solution of question 9114. Ed. Times XLVIII. 39-40.

Durch einen beliebigen Punkt O ziehe man die Geraden OA', OB', OC' gleich den Seiten BC, CA, AB eines gegebenen Dreiecks unter den Winkeln $XOA' = A$, $XOB' = B$, $XOC' = C$ gegen eine durch O gehende Axe OX. Dann liegen A', B', C' auf einem Kreise, der dem Umkreise von ABC congruent ist; die Seiten des Dreiecks A', B', C' sind doppelt so gross wie die

Abstände der Seitenmitten des Dreiecks ABC von den Fusspunkten der entsprechenden Höhen. Die Gerade, welche O mit dem Schwerpunkte von $A'B'C'$ verbindet, bildet mit OX einen Winkel, der zum Brocard'schen Winkel von ABC complementar ist. Zu einem gegebenen Dreieck $A'B'C'$ giebt es drei entsprechende Dreiecke ABC, und die drei correspondirenden Punkte O bilden die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.

Lp.

J. Neuberg, J. Beyens. Solution of question 8755. Ed. Times XLVIII. 78-80.

Man verlängere die Höhen eines Dreiecks ABC über die Ecken hinaus um $AA' = BC$, $BB' = CA$, $CC' = AB$, so haben die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ denselben Schwerpunkt. Sind α und α' die Brocard'schen Winkel beider Dreiecke, so ist

$$A'B'C' = ABC(2+\operatorname{cotg}\alpha),$$
$$(A'B')^2+(B'C')^2+(C'A')^2 = 4\,ABC(3+2\operatorname{cotg}\alpha),$$
$$\operatorname{cotg}\alpha' = \frac{2\operatorname{cotg}\alpha+3}{2\operatorname{cotg}\alpha+4}.$$

Die Punkte A, B, C sind die Mittelpunkte der nach innen über den Seiten von $A'B'C'$ errichteten Quadrate. Die Mitten der Seiten von $A'B'C'$ sind die Mittelpunkte der nach aussen über den Seiten von ABC errichteten Quadrate. Lp.

T. C. Simmons, J. Beyens. Solution of question 8821. Ed. Times XLVIII. 61.

Es seien ABC ein im positiven Sinne bezeichnetes Dreieck, ω und ω' bez. sein positiver und sein negativer Brocard'scher Punkt, K sein Lemoine'scher Punkt. AK, $A\omega$, $A\omega'$ treffen BC bezw. in X, x, x'; Y, y, y' und Z, z, z' liegen entsprechend auf CA, AB. Dann sind $z'Y$, Zy beide parallel zu BC; ähnlich für die entsprechenden Linien. Lp.

J. Neuberg, R. F. Davis. Solution of question 9303. Ed. Times XLIX. 38-39.

Ueber den Seiten eines Dreiecks ABC werden drei ähnliche Dreiecke construirt: BCD, CAE, ABE. Die Summe

$$DE^2 + BF^2 + FD^2$$

ist ein Maximum, wenn D, E, F die Ecken des ersten Brocard'schen Dreiecks sind. Lp.

ZAHRADNIK. Ueber einige Winkel- und Längenrelationen am Dreiecke. Hoppe Archiv (2) VI. 415-423.

Der Herr Verfasser betrachtet einen Kreis und in demselben eine Sehne A_1A_2. Man hat dann zwei Kreise, von denen jeder A_1A_2 in der Mitte und den gegebenen Kreis berührt. Nach Aufstellung einiger hier stattfindenden Relationen wird angenommen, dass die Sehne A_1A_2 eine Function ihrer Richtung sei; und es werden dann die Curven untersucht, welche die Mittelpunkte der beiden vorerwähnten Kreise bei dieser Bedingung beschreiben. Hierauf wird in den zu Anfang erwähnten Kreis ein Dreieck $A_1A_2A_3$ gezeichnet; man hat dann drei Sehnen A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 und drei Paare solcher Berührungskreise, wie zuerst angegeben. Hierdurch entsteht eine etwas complicirtere Figur, die näher betrachtet wird. Es werden hierbei auch einige schon von früher bekannte Sätze am Dreieck hergeleitet. Mz.

A. WERNICKE. Goniometrie und Grundzüge der Trigonometrie innerhalb der Ebene. Für obere Klassen höherer Lehranstalten. Braunschweig. C. A. Schwetschke & Sohn.

Das Buch behandelt A) auf 118 Seiten die Goniometrie und B) auf den letzten 41 Seiten die ebene Trigonometrie innerhalb der für Gymnasien gezogenen Grenzen und will „nicht durch Erweiterung der Schulpensen, sondern durch die Art der Behandlung die thatsächlich noch vorhandenen Lücken zwischen Schulmathematik und Universitätsmathematik" ausfüllen. Verfasser legt auf den systematischen Aufbau des Vorgetragenen das Hauptgewicht. Es werden im ersten Abschnitt zunächst die verschiedenen Masssysteme für Winkel, Teile des Vollwinkels,

Sectoren-, Bogen- und Sehnen-Mass besprochen und an letzteres das Ptolemaeische Additionstheorem für Sehnen angeschlossen. Das Verhältnis der halben Sehne zum Radius und dasjenige ihres Abstandes vom Mittelpunkt zum Radius geben andere Winkelmasse und leiten zum Sinus und Cosinus über. S. 27 werden diese Functionen am rechtwinkligen Dreieck definirt, und dann wird bis S. 56 nicht grade sehr abweichend von der hergebrachten Form die Goniometrie erledigt. Eine ausführliche Behandlung erfahren alsdann die graphische Darstellung der Functionen (59-70), die Theorie des Hülfswinkels (74-81), die Moivre'sche Formel (82-97), die goniometrischen und cyklometrischen Functionen sowie der Logarithmus in ihren Beziehungen zur Exponentialfunction (97-114). Zu bemerken ist S. 88 die Behandlung der Gleichung $z^{17} = +1$, welche auf die Construction des regulären 17-Ecks führt, S. 93 die Dreiteilung des Winkels und das delische Problem von der Verdoppelung des Würfels mit Hülfe einer festen Parabel. Convergenzbetrachtungen werden bei den Reihen nicht angestellt. Der zweite Teil unterscheidet sich weder dem Inhalt noch der Form der Darstellung nach wesentlich von anderen Lehrbüchern der Trigonometrie. Wie auf dem Titel besonders hervorgehoben wird, ist bei der Ausstattung des Buches auf die Anforderungen der modernen Schulhygiene besondere Rücksicht genommen. Lg.

K. Nies. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für den Schulgebrauch. Darmstadt. A. Bergsträsser. VI u. 78 S. gr. 8°.

Dieses Buch enthält die Goniometrie und Trigonometrie der Ebene in klarer Darstellung. Am Schlusse ist eine ganze Reihe durchgerechneter Beispiele zugefügt, so dass das Buch dem Lehrer beim praktischen Gebrauch recht gute Dienste thun kann. Eine gute Ausstattung gereicht dem Buche gleichfalls zur Empfehlung.

Mz.

T. M. Blakslee. Academic trigonometry. Boston. 33 S. 12°.

G. Russo. Espressioni diverse dell' area di un triangolo. Monografia. Napoli. Tip. A. Trani. 27 S.

Nach den gewöhnlichen Methoden der elementaren Trigonometrie beweist der Verfasser eine grosse Zahl von Ausdrücken für den Inhalt des ebenen Dreiecks; viele derselben sind bekannt, andere sind vielleicht neu. Von den gefundenen Formeln dürften einige bei der Lösung mancher Aufgaben nützlich sein, von anderen hat der Berichterstatter den Nutzen nicht einsehen können, so z. B. von der, in welche alle Seiten und alle Winkelhalbirenden eingehen. La. (Lp.)

E. Gelin. Calcul des lignes trigonométriques des arcs du premier quadrant, de trois en trois degrés. Mathesis VIII. Suppl. III. 7 S. Mn.

Seipp. Ueber trigonometrische Functionen von Winkelsummen und über Relationen zwischen Polygonwinkeln. Hoppe Arch. (2) VII. 27-33.

Es werden $\sin n w$ und $\cos n w$ ohne Zuhülfenahme der Moivre'schen Formel entwickelt und dann Beziehungen aufgesucht, welche sich als Erweiterungen der bekannten Formeln

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

und

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

für das Dreieck darstellen. Lg.

R. Götting. Ueber die Aufgabe: Einen Punkt L zu bestimmen, dessen Entfernungen von 3 gegebenen Punkten A, B, C sich wie 3 gegebene gerade Linien a, b, c verhalten. Pr. Gymn. Torgau. 30 S.

Bei der leicht auszuführenden geometrischen Construction der Aufgabe findet der Verfasser nichts wesentlich Neues, dagegen erscheint ihm die algebraische Behandlung neu. Er findet

u. a. $LA = at$, $LB = bt$, $LC = ct$ für

$$t = \frac{\sqrt{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sqrt{a^2\sin 2\alpha + b^2\sin 2\beta + c^2\sin 2\gamma \pm 2\varDelta}}$$

(2 Auflösungen) und

$$\sin x = \frac{b^2 - c^2}{a\sqrt{2}\sqrt{a + b^2 + c^2 \pm \varDelta\sqrt{3}}},$$

wo $\varDelta$ der Inhalt des Dreiecks aus den drei Seiten a, b, c und x der Winkel ist, welchen LA mit der Winkelhalbirenden von A bildet. Die Arbeit ist überhaupt nur für solche gemacht, welche eine eingehende Behandlung derartiger Aufgaben erst noch lernen wollen, und daher wird namentlich die Notwendigkeit einer fortwährenden Berücksichtigung der möglichen Lagen und der damit im Zusammenhang stehenden Wahl der Vorzeichen überall hervorgehoben. Lg.

R. Caspar. Beweis eines Dreieckssatzes. Hoppe Arch. (2) VII. 109-110.

Die bekannte Relation $r^2 - 2r\varrho = d^2$ zwischen den Radien des umbeschriebenen und des einbeschriebenen Kreises und dem Abstand ihrer Mittelpunkte wird durch zweimalige Anwendung des erweiterten Pythagoreischen Lehrsatzes bewiesen.

R. M.

E. Gelin. Questions diverses de trigonométrie. Mathesis VIII. Suppl. IV. 15 S. Mn.

C. L. Gerling. Die Pothenot'sche Aufgabe in praktischer Beziehung dargestellt. 2te Ausg. Marburg VI + 54 S. gr. 8°.

M. Cantor. Ueber eine Proportion aus der elementaren Geometrie. Schlömilch Z. XXXIII. 119.

Folgender Satz wird bewiesen: Schneidet eine Ebene die Axen eines rechtwinkligen Raum-Coordinatensystems in den

Punkten X, Y, Z, und sind ξ, η, ζ die Winkel des Dreiecks XYZ resp. an den Ecken X, Y, Z, so besteht die Proportion:

$$x : y : z = \sqrt{\operatorname{cotg}\xi} : \sqrt{\operatorname{cotg}\eta} : \sqrt{\operatorname{cotg}\zeta},$$

wo $x = OX$, $y = OY$, $z = OZ$ und O der Anfangspunkt des Coordinatensystems ist. Mz.

Stolz. Ueber die anschauliche Vergleichung der ebenen Vielecke und der Prismen. Zeitschr. f. d. östr. Gymn. XXXIX. Jahrg. 1888.

Der Herr Verfasser beweist Sätze über Gleichheit von Vielecken und Prismen, indem er die Definitionen voranstellt: Zwei ebene Vielecke sind einander gleich, wenn sie entweder congruent sind, oder aus gleich vielen Stücken bestehen, die paarweise congruent sind. Und: Ein Vieleck heisst grösser als ein anderes, wenn das erstere neben den Teilen des letzteren noch andere enthält. Mz.

G. Hauck. Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von F. Kommerell's Lehrbuch neu bearbeitet und erweitert von G. Hauck. 6te Auflage. Tübingen. H. Laupp.

Von den sachlichen Aenderungen, über welche in der Einleitung Rechenschaft gegeben wird, sei die Bearbeitung der Rechenaufgaben im Anhang des III. Buches hervorgehoben, wo statt der siebenstelligen die hier allein zweckmässigen fünfstelligen Logarithmen benutzt und überall die neuen Masse und Gewichte zu Grunde gelegt wurden. — Referent hat das von der Kritik als vorzüglich anerkannte, anregende Buch mit Vergnügen und Vorteil benutzt und kann dasselbe gleichfalls nur empfehlen. Durchsichtigkeit des Lehrgebäudes, Klarheit in den Definitionen, Eleganz im Beweise, zweckmässige Anordnung der zahlreichen, in anderen Büchern vernachlässigten stereometrischen Constructionsaufgaben, genaue nach bestimmtem Systeme gezeichnete Figuren erscheinen als seine Hauptvorzüge. Eigentümlich ist die Definition von Cylinder und Kegel bloss als Um-

drehungskörper, wodurch die schiefen Cylinder und Kegel von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Im übrigen wird man nichts vermissen, was sonst in stereometrischen Lehrbüchern abgehandelt wird, wohl aber vieles Neue finden, so namentlich in den Anhängen des II. und III. Buches unter den Lehrsätzen und Aufgaben über Kugel, Vielkant und Polyeder, wobei die regulären und halbregulären Körper besonderes Interesse erregen. In der Terminologie ist die glückliche Wahl kurzer und treffender Ausdrücke (Quader, Keil, Trommel etc.) zu bemerken.

Lg.

E. Cesaro. Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazii. Lisboa Mem. (1888).

In dem ersten Teile dieser Abhandlung beweist der Verfasser die beiden folgenden Sätze:

1. Es giebt nur achtzehn Arten von Polyedern, bei denen die Seiten von derselben Ordnung in jeder Ecke mit gleicher Anzahl zusammenstossen.

2. Es giebt nur achtzehn Arten von Polyedern, bei denen die Ecken von derselben Ordnung sich an jeder Fläche in gleicher Anzahl befinden. Hierbei ist anzumerken, dass der Verfasser unter „Ordnung" einer Seite oder einer Ecke die um 2 verminderte Anzahl der Kanten versteht.

Im zweiten Teile der Abhandlung zeigt der Verfasser, dass alle Polyeder, mit denen er sich im ersten Teile beschäftigt hat, durch sehr einfache Operationen aus einander ableitbar sind. Die Untersuchung dieser letzteren führt ihn auf den Vorschlag einer neuen Benennung, um sie darzustellen.

Im dritten Teile weist der Verf. nach, dass die Polyeder in Netze von Geraden ausarten können, die er ermittelt.

Im vierten Teile erforscht der Verfasser die Polyederformen in dem Raume von n Dimensionen. Tx. (Lp.)

E. Cesaro. Tableau des dérivations cristallographiques dans le premier système. Darboux Bull. (2) XII. 270-272.

Es werden die Namen der aus einander ableitbaren Krystallformen derart in einer symmetrischen Figur zusammengestellt, dass durch verbindende Linien die Ableitung und durch Buchstaben die Art der Ableitung angedeutet wird. Eine Figur veranschaulicht auf diese Weise die gemeinsame Ableitung von Körpern aus Würfel und Oktaeder, eine zweite die aus dem doppelt gesetzten Tetraeder. Die Wirkung von zwei combinirten Ableitungs-Operationen lässt sich alsdann durch Formeln angeben, welche sich auf drei verschiedene Typen reduciren.

Schg.

F. Panizza. Nota sui poliedri regolari e semi-regolari convessi. Besso Per. mat. III. 80-82, 109-118.

Auf der Grundlage der von Euler entdeckten Beziehung zwischen der Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten eines Polyeders und des Satzes: „Bei jedem Polyeder ist die Anzahl der Kanten halb so gross wie die Anzahl der ebenen Winkel", gelingt dem Verfasser auf sehr einfache Weise die Herleitung der regelmässigen und der halbregelmässigen Polyeder.

La. (Lp.)

J. Wolstenholme, S. Aiyar. Solution of question 9430. Ed. Times XLIX. 88-89.

Bei einem Tetraeder mögen die Winkel der begrenzenden Dreiecksflächen mit α, β, γ bezeichnet werden, und zwar alle Gegenwinkel von OA und BC mit α, von OB und CA mit β, von OC und AB mit γ; die Winkel bei O werden mit dem Index 1, die bei A, B, C mit den Indices 2, 3, 4 versehen. Ist nun

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = \pi,$$

so folgt

$$\gamma_1+\alpha_1-\beta_1 = \gamma_4+\alpha_4-\beta_4,\quad \alpha_1+\beta_1-\gamma_1 = \alpha_3+\beta_3-\gamma_3,$$
$$\gamma_2+\alpha_2-\beta_2 = \gamma_3+\alpha_3-\beta_3,\quad \alpha_2+\beta_2-\gamma_2 = \alpha_4+\beta_4-\gamma_4.$$

Lp.

S. Tebay, J. Wolstenholme. Solution of question 9090. Ed. Times XLVIII. 25-26.

Man bezeichne mit a, b, c drei in einer Ecke eines Tetraeders zusammenstossende Kanten, mit x, y, z die Gegenkanten, mit A, B, C, X, Y, Z die diesen Kanten gegenüberliegenden Flächenwinkel, mit A_1, A_2, A_3, A_4 die Flächeninhalte der Seiten, endlich sei

$$M = (1-\cos^2 X - \cos^2 Y - \cos^2 Z - 2\cos X \cos Y \cos Z)^{\frac{1}{2}},$$

so ist das Volumen

$$V = \tfrac{1}{3}(2M A_1 A_2 A_3 A_4)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3} A_4^2 : (x \operatorname{cotg} A + y \operatorname{cotg} B + z \operatorname{cotg} C).$$

Lp.

LUCKE. Geometrisch anschaulicher Beweis, dass die Cotes'sche Formel für Körper gilt, welche durch Umdrehung einer Curve von der Gleichung $y = \sqrt{a^2 + bx + nx^2 + \frac{1}{c}x^3}$ um die X-Axe entstehen, insbesondere für das Neiloid. Hoffmann Z. XIX. 10-15.

Es werden zwei congruente Rotationsneiloide (durch Rotation der Neil'schen Parabel $y^2 = \frac{1}{c}x^3$ entstandene Körper) mit parallelen aber entgegengesetzt gerichteten Axen zwischen zwei parallele Ebenen gestellt, und dann wird gezeigt, dass ihre Summe gleich einem Rotationshyperboloid ist; entsprechend für den allgemeinen Fall. Das Resultat ist eine Folge der eigentümlichen Addition zweier entsprechenden Querschnitte, indem die 3ten Potenzen der Abscissen $x^3 + (h-x)^3$ verschwinden. — Die Herren A. Schmidt und Gusserow machen S. 87 und 88 in Bezug hierauf Prioritätsansprüche geltend. Lg.

D. BESSO. Teoremi sul tronco di prisma. Besso Per. mat. III. 175-179.

I. Der Inhalt eines schief abgestumpften geraden Prismas, dessen Basis ein regelmässiges Vieleck oder ein Vieleck von gerader Seitenanzahl mit gleichen und parallelen Gegenseiten ist, wird durch das Product aus der Basis und aus dem arithmetischen Mittel der Seitenkanten gegeben. II. Wenn eine der

Grundflächen eines Prismenstumpfes ein regelmässiges Vieleck ist, so ist die durch den Mittelpunkt dieses Polygons parallel zu den Seitenkanten gelegte und in den beiden Grundflächen endigende Strecke gleich dem arithmetischen Mittel der Seitenkanten. La. (Lp.)

S. ROBERTS. On the analogues of the nine-point circle in space of three dimensions, and connected theorems. London M. S. Proc. XIX. 152-161.

Von den verschiedenen möglichen Verallgemeinerungen, welche der Kreis der neun Punkte im Raume besitzt, behandelt der Verfasser hier eingehend zwei. Die erste nimmt ihren Ausgang in einem Satze über zwei isogonale Punkte des Dreiecks. So heissen zwei Punkte, wenn beide, mit jeder Ecke des Dreiecks verbunden, Linien liefern, deren Winkel von der betreffenden Winkelhalbirenden des Dreiecks halbirt werden. Solche isogonalen Punkte sind, worauf es hier ankommt, auch der Höhen-Schnittpunkt und der Mittelpunkt des Umkreises. Man denke sich nun zwei isogonale Punkte als Mittelpunkte zweier Kreise dergestalt, dass jeder die drei Kreise rechtwinklig schneidet, welche die von dem anderen Kreise auf den Dreiecksseiten gebildeten Sehnen zu Durchmessern haben. Dann erhält man durch die von den beiden Punkten auf die Seiten gefällten Lote sechs Fusspunkte, welche auf einem Kreise liegen, dessen Centrum die Mitte zwischen den beiden Punkten ist, und der mit den beiden Kreisen dieselbe gemeinsame Sehne hat. Ist einer der beiden Kreise der Umkreis, so ist der andere der polare Kreis und der abgeleitete Kreis der der neun Punkte. Dieser Satz lässt sich nun genau auf ein Tetraeder übertragen, wenn man Tetraeder statt Dreieck, Kugel statt Kreis, Fläche statt Seite u. s. w. sagt. Auf diese Bedeutung der isogonalen Punkte im Tetraeder hatte schon Herr Neuberg (Belg. Mém. 8°. XXXVII. 1884, F. d. M. XVII. 1885. 565) aufmerksam gemacht, und namentlich auch darauf, dass im Tetraeder der zum Umkugel-Centrum isogonale Punkt Inkugel-Centrum für das Tetraeder ist, dessen Ecken die Orthogonal-Projectionen des erstgenannten

Centrums auf die Flächen des ursprünglichen Tetraeders sind. So gelangt man zu einer „Kugel der 16 Punkte" im Tetraeder, welche dem Kreise der neun Punkte im Dreieck ganz analog ist. Der Verfasser verfolgt diese Analogie in algebraischer Weise. (Vgl. das Referat oben S. 554.)

Auf eine zweite Analogie zum Kreise der neun Punkte hatte Herr Intrigila (Nap. Rend. XXII, F. d. M. XVI. 1884. 502) aufmerksam gemacht. Diese Analogie fusst in dem Satze von Joachimsthal (Grunert's Arch. XXII), wonach die vier Höhen eines Tetraeders vier Erzeugende einer Regelschar sind, während die vier Senkrechten in den Schwerpunkten der Flächen vier Erzeugende der zugehörigen Regelschar bilden. Herr Intrigila hatte gezeigt, dass der Mittelpunkt J des diese beiden Regelscharen enthaltenden Hyperboloids, der Schwerpunkt G des Tetraeders und das Centrum der durch die Flächen-Schwerpunkte gelegten Kugel O_1 in gerader Linie liegen, so dass G die Strecke JO_1 halbirt. Im übrigen sind J und G die Aehnlichkeitspunkte der eben erwähnten Kugel um O_1 und der Umkugel des Tetraeders. Auch auf diese Beziehungen geht der Verfasser näher ein. Schliesslich erwähnt er eine, aber nur für das orthogonale Tetraeder passende dritte räumliche Analogie zum Kreise der neun Punkte. Scht.

G. Pietsch. Katechismus der Raumberechnung. 3te Aufl.
Leipzig. VIII + 124 S. 8°.

F. Schumacher. Geometrie der Kreise einer Kugel.
Metz. Lothringer Zeit. 1889. Diss. Strassburg. 25 S. 8°.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

W. Fiedler. Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3. erweit. Aufl. III. Tl. Die construirende und analytische Geometrie der Lage. Leipzig. Teubner. XXX u. 660 S. gr. 8°.

Durch die Herausgabe der fünften Auflage der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte" ist der Verfasser gehindert worden, den dritten Teil seiner darstellenden Geometrie den beiden anderen (F. d. M. XV. 1883. 496, XVII. 1885. 575) unmittelbar folgen zu lassen. Für diejenigen, welche das Werk nur als Compendium der darstellenden Geometrie benutzen wollen, ist dieser Band auch nicht unumgänglich nötig; denn sein Inhalt bezweckt zwar die theoretische Vertiefung der Methoden der darstellenden Geometrie, aber auch losgetrennt von den beiden ersten Teilen bildet der dritte ein selbständiges Ganzes, in welchem eine geschlossene und an sich verständliche Gedankenreihe zur Darstellung kommt. Er soll eben nach der Absicht des Verfassers die organische Verbindung der projectivischen und der analytischen Geometrie unter sich und mit der darstellenden Geometrie herstellen und enthält die eigenartigsten Arbeiten des Verfassers auf diesem Gebiete.

Der abgehandelte Stoff ist so reichhaltig, dass es unmöglich ist, eine Uebersicht in wenigen Zeilen zu geben. In drei Abteilungen von ungefähr gleichem Umfange ist der Inhalt gegliedert: A. Die Grundlagen der Geometrie, die imaginären Elemente, die Coordinaten und Parameter. B. Die Parameter und die Projectivität. Erzeugnisse der projectivischen Gebilde erster Stufe. C. Die projectivischen Gebilde, speciell die Elementargebilde zweiter und dritter Stufe. Die Ableitung der verschiedenen Coordinatensysteme, welche in A geleistet wird und schon in der ersten Auflage in bescheidenem Umfange enthalten war,

hat sich jetzt zu einer „Geometrie der Lage“ entfaltet; aber nicht, wie in dem Reye'schen Werke gleichen Titels, wird die streng synthetische Methode festgehalten; sondern der Verfasser sucht gerade die Vereinigung der construirenden und der analytischen Geometrie auszunutzen, um so den besten Weg zu den angestrebten Resultaten zu entdecken. Vorzugsweise werden daher die Methoden der neueren analytischen Geometrie angewandt, welche seit Plücker mehr Geschmeidigkeit in die Rechnungen gebracht, die synthetische und die analytische Geometrie einander genähert haben.

Die Bereicherungen, welche die neue Auflage erfahren hat, sind sehr zahlreich. Achtzehn neue Figuren im Texte und eine Tafel sind hinzugekommen. Von dem neu aufgenommenen Stoffe sollen nur die Poncelet'schen Schliessungssätze und die Steiner'schen Polygone erwähnt werden, von denen die letzteren nach einer von Herrn Disteli entwickelten Methode synthetisch behandelt sind.

Es wäre müssig, mit dem Verfasser darüber zu rechten, ob die Verbindung der darstellenden, synthetischen und analytischen Geometrie eine wirklich organische ist, oder ob sie bloss pädagogisch nützlich und gerade deshalb von gutem Erfolge begleitet ist, weil in seiner hervorragenden Lehrerpersönlichkeit sich alle Seiten des Gegenstandes vereinigt finden. Jedenfalls ist die Wissenschaft der Geometrie ja eine, und die Möglichkeit der Vereinigung scheinbar disparater Teile zu einem einheitlichen Ganzen durch das vorliegende Werk erwiesen, das auch in der nun vollendeten dritten Auflage willkommen geheissen sei.

Lp.

G. A. v. Peschka. Freie Perspective. 2. Aufl. Bd. I. Mit 13 lithogr. Tafeln. Leipzig. Baumgärtner. XXIII u. 336 S. gr. 8°.

Das Werk stellt die zweite Auflage des bekannten Lehrbuches „Freie Perspective“ von Peschka und Koutny (Hannover 1868) vor. Während aber jenes von den Methoden der neueren Geometrie nur einen sehr discreten Gebrauch machte, bildet nunmehr

deren volle Ausnützung für die constructiven Zwecke der freien Perspective die ausgesprochene Tendenz der zweiten Auflage. Hierdurch war eine vollständige Umarbeitung sowohl im einzelnen als in der Gesamtanlage bedingt. Die bedeutenden Erweiterungen machten die Teilung in zwei Bände nötig, von denen der erste die Theorie und deren Anwendung auf ebenflächige Gebilde, der zweite die krummen Flächen und die praktische Verwertung der Perspective behandelt.

Der zunächst vorliegende I. Band giebt im 1. Abschnitt die reine Theorie der freien Perspective als selbständiger Projectionsart in allgemeinster Darstellung, unter Verzicht auf alle Concessionen an die künstlerisch-praktische Anwendung, wie solche die 1. Auflage noch aufwies. Die Berücksichtigung der praktischen Seite der Perspective ist ganz dem II. Band vorbehalten. In der gegen die 1. Aufl. bedeutend vermehrten Sammlung von gut ausgewählten und trefflich ausgeführten Constructionsaufgaben wurden die Aufgaben projectivischer Natur von den metrischen geschieden. — Der 2. Abschnitt enthält die Geometrie der Lage nach v. Staudt'schem Princip, die Theorie der Kegelschnitte, die ebene und räumliche Collineation. Daran schliesst sich eine Reihe von constructiven Aufgaben in perspectivischer Darstellung mit Anwendung der projectivischen Geometrie. Darunter mögen namentlich die Spiegelbilderconstructionen hervorgehoben werden. — Es folgt im 3. Abschnitt die allgemeine Theorie der Transformation des Projectionscentrums mit entsprechenden Anwendungen bei beschränkter Zeichenfläche; endlich im 4. Abschnitt die Darstellung ebenflächiger Gebilde (Dreikante und Polyeder) in ähnlicher Behandlung wie in der ersten Auflage.

Der dem Verfasser eigentümliche Vorzug einer überaus klaren heuristischen Darstellungsweise zeichnet auch das vorliegende Werk aus. Die Ausstattung im Text und in den Figurentafeln verdient volle Anerkennung. Hk.

G. Conz. Lehrbuch der Perspective. Mit 118 Textfiguren. Stuttgart. Wittwer. VIII u. 144 S. 8°.

Das Buch giebt von der Perspective so viel, als nach der Ansicht des Verfassers für den Maler, der geometrischer Vorkenntnisse entbehrt, ausreicht, um in die Augen springende perspectivische Fehler zu vermeiden. Hk.

A. Weiler. Die Axonometrie als Orthogonalprojection. Mit 3 Tafeln. Schlömilch Z. XXXIII. 257-269.

Der Aufsatz behandelt nach ähnlichen Gesichtspunkten, wie es von Herrn Pelz geschehen, die Ausführung räumlicher Constructionen in orthogonal-axonometrischer Projection als selbständiger Projectionsart. Das Projectionssystem wird als gegeben vorausgesetzt durch das Bild der drei Coordinatenaxen. Punkte und Gerade werden dargestellt durch ihr axonometrisches Bild und ihren axonometrischen Grundriss, Ebenen durch ihre Spuren mit den drei Coordinatenebenen. Die Spuren der Bildebene, welche ohne Einfluss auf das axonometrische Bild beliebig parallel verschoben werden kann, sind senkrecht zu den Axenbildern. Die „Distanz“ des Coordinatenursprungs von der jeweiligen Bildebene ergiebt sich durch einfache Umlegung. Verfasser behandelt nun auf dieser Grundlage die metrischen Fundamentalaufgaben. Dabei wird besonders von der zweckmässigen Verschiebung der Bildebene Nutzen gezogen. Bei der Ebene kommen deren „Hauptlinien“ (parallel zu ihrer Schnittlinie mit der Bildebene) und die (zu jenen senkrechten) „Falllinien“ zur Verwendung. Die Mittel zur Darstellung von Geraden und Ebenen in senkrechter Lage werden auf elementargeometrischem Wege erhalten. Den Schluss des Aufsatzes bildet die Erörterung von Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit im axonometrischen Bild und in den drei axonometrischen Rissen. Hk.

J. Vonderlinn. Lehrbuch des Projectionszeichnens. I. Teil: Die rechtwinklige Projection auf eine und mehrere Projectionsebenen. Nach System Kleyer. Mit 226 Fig. im Text. Stuttgart. J. Maier. VIII u. 182 S. gr. 8°.

Die Vorlage stellt den I. Teil des I. Buches eines Lehrbuches der Darstellenden Geometrie vor, über dessen weiteren Plan nichts bemerkt ist. Sie behandelt die Darstellung von Punkt, Gerade, Kreis und Ebene nebst den situellen und metrischen Fundamentalconstructionen in orthogonaler Projection auf eine und mehrere Projectionsebenen, mit Anwendung auf eine grosse Zahl ausgeführter oder mit Andeutung der Lösung versehener Constructionsaufgaben. Das Werk bildet einen Teil von Kleyer's Mathematisch - technisch - naturwissenschaftlicher Encyklopädie. Ueber das in dieser Sammlung befolgte System ist bereits in F. d. M. XVIII. 1886. 487 berichtet. Hk.

J. Menger. Elementi di Geometria descrittiva. Mit 228 Textfiguren. Wien. A. Hölder. VII u. 326 S. 8°.

Uebersetzung der in F. d. M. XIV. 1882. 480 besprochenen deutschen Ausgabe. Hk.

M. Kleiber. Das projective Zeichnen. Nebst den für das Zeichnen wichtigsten Aufgaben aus der ebenen Geometrie. 50 Vorlege-Blätter mit begleitendem Text. Stuttgart. Loewe. VIII u. 94 S. Hoch 4°.

Das Werk, aus dem praktischen Unterricht des Verfassers hervorgegangen, ist als Vorlagensammlung für kunstgewerbliche und ähnliche Schulen sowie für den Selbstunterricht bestimmt. Es behandelt die wichtigsten Constructionen in Grund- und Aufriss sowie in axonometrischer Darstellung mit Rücksicht auf die praktischen Bedürfnisse des Kunsthandwerkers und erstreckt sich auf ebenflächige Gebilde, Kegelschnitte, Spiralen, Cylinder, Kegel, Kugel, Rotationsflächen, windschiefe Flächen, Spiralflächen. Hervorzuheben sind die mannigfaltigen architektonischen und kunstgewerblichen Formen, in welchen jene geometrischen Gebilde ihre praktische Verwendung finden. Dieselben zeichnen sich durch ästhetischen Gehalt, instructive Zweckmässigkeit und Klarheit der Anordnung aus. Sie bilden ein sehr beachtenswertes

Uebungsmaterial für die praktische Projectionslehre. — Der Text, welcher mit der Vorführung der wichtigsten planimetrischen Begriffe und Constructionen beginnt, ist vorwiegend beschreibend gehalten. Hk.

C. W. O. Schmidt. Das isometrische Zeichnen im Anschluss an die für die Bauausführung bestimmte Werkzeichnung. Mit 130 Fig. auf 12 Tafeln. Berlin. H. Spamer. 8 S. gr. 4°.

Das Werk ist bestimmt für Bauhandwerker. Es wird zuerst eine recht verständige Erklärung der Cavalierperspective (mit beliebiger Richtung der Tiefenlinien und Reductionsverhältnis 1 : 1 : 1) gegeben, und dann die entsprechende Darstellung von ebenflächigen und cylindrisch begrenzten Körpern an einer Reihe von instructiven, einfachen und zusammengesetzteren, Beispielen aus der Bautechnik entwickelt. Hk.

J. Steiner. Studienblätter. Eine systematische Folge vorgedruckter Annahmen zur graphischen Durchführung grösserer Constructions-Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. 2. Aufl. 2 Hefte mit je 20 Blättern. a) Durchdringungen, b) Schattenlehre. Wien. Hölder. 4°.

Die Blätter bezwecken, ein Hülfsmittel für die Uebungen zum ersten Unterricht in der darstellenden Geometrie zu bilden, indem sie für die gestellten Aufgaben geeignete Annahmen der gegebenen Stücke in Mattdruck vorgezeichnet enthalten. Die Aufgaben beziehen sich im ersten Heft auf Durchdringungen von Prismen und Pyramiden, im zweiten auf die Schlagschatten einfacher ebenflächiger Gebilde. Hk.

G. Hauck. Uebungsstoff für den praktischen Unterricht in der Projectionslehre (Parallelperspective, Centralperspective und Schattenlehre). 1 u. 2. Berlin. Julius Springer.

Die Uebungen in der Projectionslehre erstreckten sich bisher zumeist auf abstracte Raumconstructionen und (abgesehen von krummflächigen Gebilden) auf die Behandlung räumlicher Polyeder, so dass den Schülern der Uebergang von der Theorie zu ihrer Verwertung in der Praxis Schwierigkeiten bereitete. Zur Ausfüllung dieser Lücken trägt der Verfasser durch seinen Uebungsstoff bei. Die gebotenen, zumeist der Gotik und Renaissance entstammenden Motive (Türme, Säulen, Denkmäler, Pavillon, Fachwerk- und Wächterhäuschen, Gesimse u. s. w., 11 in jedem Heft) sind dadurch gewonnen, dass architektonische Motive unter Wahrung ihres ästhetischen Gehaltes auf ihre stereometrischen Grundgedanken zurückgeführt wurden. Nach den Erfahrungen des Referenten entspricht die Sammlung ihrem Zwecke vollkommen; die Motive geben in central- und parallelperspectivischer Darstellung sehr ansprechende Bilder und eignen sich auch besonders zur Ausführung von Schattenconstructionen.

Bk.

F. Buka. Projectivische Massstäbe. Mit 2 Tafeln und 2 projectivischen Massstäben. Berlin. Winkelmann u. S. 12 S. gr 4°.

Die „projectivischen Massstäbe" bestehen aus zwei etwa 3 dm langen Carton-Massstäben, auf welchen entsprechende Punkte zweier projectivischen Punktreihen markirt sind, und zwar in zweckmässigster, beiderseits gleicher Anordnung, als Endpunkte entsprechend gleicher Strecken. Der Text giebt zunächst eine geschickte Construction derselben und bespricht sodann ihre Verwendung als Hülfsmittel zum Studium der synthetischen Geometrie. Diese besteht einerseits in der Veranschaulichung der wichtigsten Sätze über projectivische Punktreihen (bei in einander liegenden Reihen werden die zwei Massstäbe einfach an einander gelegt), andererseits in der Benutzung zu praktischen Zeichenübungen, die sich auf die verschiedenen Formen der Erzeugnisse projectivischer Punktreihen beziehen. Mit Recht wird die grosse Wichtigkeit solcher Uebungen, für welche die zwei Tafeln vortrefflich ausgeführte Beispiele enthalten, hervorgehoben.

Hk.

W. H. Echols. Construction of perspective projections. Annals of Math. IV. 93-95.

Bezugnehmend auf den Aufsatz von Thornton (s. F. d. M. XVI. 1884. 526) giebt Verfasser eine constructive Lösung der Aufgabe: Die Coordinaten des Bildpunktes aus den Coordinaten des Objectpunktes zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass das Auge ausserhalb des Zeichenblattes fällt. Hk.

C. Volland. Die Schattenconstruction. Eine Sammlung von Aufgaben nebst einer Anleitung zur Schattenconstruction. 4 Tafeln. Leipzig. Gebhardt. gr. 2° u. 26 S. kl. 8°.

C. Volland. Aufgabensammlung für die architektonische Schattenlehre. 6 Tafeln. Leipzig. Gebhardt. gr. 2°.

Beide Werke enthalten eine systematisch geordnete Sammlung von Aufgaben für die praktische Schattenlehre, in der Art, dass auf den Tafeln die Objecte, deren Schatten vom Schüler ermittelt werden sollen, in Grund- und Aufriss vorgezeichnet sind.

Im erstgenannten Werke beschränken sich die Beispiele auf die Grundformen: Linien, ebene Flächen, Polyeder, Cylinder, Kegel, Rotationskörper. Die beigegebene Anleitung lehrt cursorisch die anzuwendenden Constructionen. Der auf eine krumme Fläche fallende Schlagschatten wird ausschliesslich mittels verticaler Schattendurchschnitte construirt.

Das zweitgenannte Werk enthält zusammengesetzte architektonische Beispiele: Gesimse, Säulen-Köpfe und -Füsse, Consolen, Treppen, Dächer u. s. w. in zweckmässiger Auswahl.

Hk.

J. Tesař. Note über die Tangenten und Singularitäten des Isophoten-Systems auf Rotationsflächen. Mit 1 Tafel. Prag. Ber. 355-364.

Die constructive Bestimmung des Tangentensystems der

Isophotencurven einer Rotationsfläche wird erledigt mit Hülfe von Ringflächen, welche die Rotationsfläche längs der einzelnen Parallelkreise osculiren, deren Isophoten folglich die gleichnamigen Isophoten der Rotationsfläche in Punkten der Berührungs-Parallelkreise berühren. Auf Grund der gewonnenen Construction wird sodann der Zusammenhang zwischen den Singularitäten der Isophoten und denen der Meridiancurve erörtert.

Hk.

R. Nicodemi. Determinazione del punto brillante di una sfera nel caso del punto di vista e del punto luminoso al finito e proprietà di una cubica che in tale determinazione si presenta. Atti dell' Accademia Pontaniana. XVII. 109-119.

Eine Kugel mit dem Mittelpunkt *O* werde aus dem Punkte *C* gesehen und von dem Punkte *L* aus beleuchtet; ihr Punkt grösster Beleuchtung *X* liegt auf dem grössten Kreis, dessen Ebene *CLO* ist, und ist durch die Eigenschaft gekennzeichnet, dass der Winkel *CXL* durch *OX* gehälftet wird. Nun ist der Ort eines Punktes der Ebene *CLO*, dessen Verbindungslinien mit den Punkten *C* und *L* einen Winkel bilden, welcher durch die Verbindungslinie desselben Punktes mit *O* gehälftet wird, eine circulare kubische Curve, welche in *O* einen Doppelpunkt hat und durch *C* und *L* geht. Dieser Ort schneidet den oben genannten grössten Kreis in vier Punkten, von denen einer der gesuchte Punkt *X* ist. Durch diese vier Punkte geht auch eine gleichseitige Hyperbel; da dieselbe sehr leicht construirbar ist, so empfiehlt es sich, bei der Bestimmung von *X* statt der obigen Curve dritten Grades von ihr Gebrauch zu machen. Sind insbesondere beide Punkte *C* und *L* unendlich fern, so löst sich diese Hyperbel in zwei Gerade auf. Ist nur *L* unendlich fern, so kann man *X* noch anders bestimmen; dies geschieht in No. 3 der vorliegenden Arbeit.

Die oben erklärte kubische Curve hat gewisse besondere metrische Eigenschaften; einige derselben werden von dem Ver-

fasser in dem zweiten Teile seiner Abhandlung durch eine einfache Anwendung der Elemente der analytischen Geometrie bewiesen. La.

R. Nicodemi. Distribuzione dei cerchi nello spazio i quali da un dato punto sopra un dato piano si projettano in cerchi. Atti dell' Accademia Pontania. XVIII. 91-111.

Wie der Titel ankündigt, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit die Bestimmung der Art, in welcher diejenigen Kreise (welche wir Kreise K nennen wollen) im Raume verteilt sind, welche aus einem Punkte C auf eine Ebene π in Kreise projicirt werden; dies erreicht der Verfasser durch sehr einfache Betrachtungen, welche eine nützliche Uebung zum Studium der Centralprojection abgeben dürften. Herr N. beginnt mit der Bestimmung der Stellung aller Ebenen, in denen sich Kreise befinden, welche aus C in einen gegebenen Kreis von π projicirt werden (sie ist die Stellung der Ebene, welche in C die durch den gegebenen Kreis und C gehende Kugel berührt), und folgert daraus die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit ein gegebener Kreis ein Kreis K sei. Diese Schlüsse benutzt er, um die Verteilung der Kreise K zu bestimmen, welche auf einer Kugel (No. 2) oder Ebene (No. 3) liegen, oder durch einen Punkt gehen (No. 4), oder eine Gerade berühren (No. 5), oder endlich einen gegebenen Mittelpunkt haben (No. 6). Die hauptsächlichsten Sätze, welche er auf diese Weise ermittelt, sind etwa die folgenden:

Auf jeder Kugel giebt es zwei ∞^1 Systeme von Kreisen K; das eine wird durch die Durchschnitte der Kugel mit Parallelebenen zu π gebildet, das andere durch ihre Durchschnitte mit Ebenen eines gewissen Büschels; derselbe hat als Axe die Schnittgerade der Berührungsebenen der Kugel in den Durchschnittspunkten mit denjenigen beiden Geraden, welche C mit den Endpunkten des zu π orthogonalen Durchmessers verbinden.

Alle Kreise K einer Ebene bilden einen Büschel.

Der Ort der ∞^2 Kreise K, welche durch einen Punkt A gehen, ist die Kugel, welche durch A und C geht und ihren Mittelpunkt auf dem von C auf π gefällten Lote hat.

Der Ort der ∞^2 Kreise K, welche eine Gerade g berühren, wird durch die zwei Kugeln gebildet, welche durch C gehen, g berühren und ihre Mittelpunkte auf dem von C auf π gefällten Lote haben.

Der Ort der ∞^2 Kreise K, welche einen gegebenen Mittelpunkt haben, ist eine Fläche dritter Ordnung, welche durch den imaginären Kugelkreis geht und eine zweite Kreisschar enthält.

La.

R. Fujisawa. Note on Projection. Tokio Math. Ges. III. 145.

Beweis des Satzes, dass, wenn eine Fläche zweiten Grades gegeben ist, und man die auf dieser Fläche liegenden Kegelschnitte perspectivisch, von einem Punkt der Fläche aus, auf eine mit der Tangentialebene dieses Punktes parallele Ebene projicirt, alle Projectionen Kegelschnitte derselben Art sind. Der Verfasser bemerkt selber, dass dieser Satz schon bekannt ist.

E.

Th. Monin. Ueber die Contouren von Projectionen der Flächen zweiter Ordnung. Casop. XVII. 229. (Böhmisch.)

Behandelt drei diesbezügliche Fälle ganz allgemein.

Std.

R. Malloizel. Note complémentaire sur l'épure donnée, en 1887, aux examens d'admission à l'École Polytechnique. Journ. de Math. spéc. (3) II, 7-9.

Einige Sätze in Bezug auf ebene Schnitte einer Ringfläche, die durch Rotation eines Kegelschnittes erzeugt wird. Lp.

J. Bottomley. On the composition of projections in geometry of two dimensions. Manchester Proc. (4) I. 89.

Eine Berichtigung zu dem Aufsatze über diesen Gegenstand in (3) X. 15 der Manchester Proc. (F. d. M. XVIII. 1886. 512).

J. Menger. Geometrische Formenlehre in Verbindung mit dem Freihandzeichnen. Für die erste Klasse der Realschulen. Mit 44 Textfiguren. 2. Aufl. Wien. A. Hölder. IV u. 58 S. 8°.

Gleichlautend mit der in F. d. M. XIV. 1882. 480 besprochenen 1. Auflage. Hk.

Weitere Literatur.

G. Delabar. Das geometrische Zeichnen. 1. Heft: Anleitung zum Linearzeichnen. 4. Aufl. Mit 20 Tafeln. Freiburg i. Br. Herder. VI u. 61 S. kl. 4°.

A. Gut. Das Linearzeichnen. 3. Teil: Die Perspective und perspective Schattenconstruction. Mit 8 Tafeln. Wien. Limbarth. 36 S.

V. F. Keller. Das geometrische und projectivische Zeichnen. Aarau.

N. Breithoff. Cours de géométrie descriptive appliquée. Tome I. Perspectives rapides. 2e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Ch. Dapples. Perspective par la méthode des projetantes. (Géométrie descriptive). Lausanne. 8°.

J. Kiaes. Traité élémentaire de géométrie descriptive. 8e éd. Partie I. Paris. IV + 302 S. 8° mit Atlas von 39 Taf.

E. Lebon. Traité de géométrie descriptive. 2e édition revue et modifiée. Vol. I. Paris. 262 S. 8°.

C. F. A. Leroy. Traité de géométrie descriptive, suivi de la méthode des plans cotés et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques. 13e édition, revue et annotée par Martelet. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

W. E. Crowther Elementary textbook of projectional solid geometry; or the descriptive drawing of solid objects and their component parts according to the method of orthographic projection. London. 114 S. 8°.

L. W. Faunce. Descriptive geometry. Boston. 54 + 32 S. 8°.

H. A. James. Hand-book of perspective. London. Chapman and Hall.

Anzeige in Nature XXXVII. 509.

J. B. Millar. Elements of descriptive geometry. 2nd ed. London (1887). 216 S. 8°.

S. Woolf. Elementary course of descriptive geometry. New-York.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

F. Aschieri. Geometria projettiva. Lezioni. Seconda edizione con aggiunte e correzioni. Milano. Hoepli. X + 410 S.

Ein ausführlicher Bericht über die erste Auflage dieses Buches steht in F. d. M. XVI. 1884. 510; dort hat der Berichterstatter die guten Eigenschaften, aber auch einige Mängel des Aschieri'schen Werkes hervorgehoben. Wir können nun nicht umhin, den gegenwärtigen Bericht mit dem Zugeständnis zu beginnen, dass diese Mängel in der uns vorliegenden Auflage beseitigt worden sind. Die Anordnung des Stoffes ist in der zweiten Auflage nämlich viel besser als in der ersten, und die Auswahl der behandelten Gegenstände ist didaktisch und wissenschaftlich besser geregelt, sodass nach unserer Meinung das Buch des Herrn Aschieri jetzt dem Universitäts-Unterricht zu Grunde gelegt werden kann, was ehedem fragwürdig erschien. Unter die

guten Aenderungen rechnen wir vor allem den Beweis des Fundamentalsatzes der projectiven Geometrie nach der dritten Auflage von Reye's Geometrie der Lage. Ferner die Darstellung der Theorie der Paare imaginärer Elemente nach Herrn Segre (eine Bestätigung der vor zwei Jahren am Ende unseres Berichtes über diese Theorie ausgesprochenen Meinung); doch hätten wir gewünscht, dass Hr. Aschieri mehr Anwendungen von ihr gemacht hätte; denn das hätte das Verständnis dieser Theorie erleichtert und ihre Vorzüge klarer bewiesen. Endlich die Fortlassung der analytischen Theorie der linearen Kegelschnittsysteme, die Einführung einer tieferen Erforschung der Projectivität der Grundgebilde erster, zweiter und dritter Stufe und die Beweise für die Grundeigenschaften der kubischen Raumcurven. Dahingegen ist es nicht sicher, ob der Verfasser gut daran gethan hat, die Theorie der quadratischen Transformationen (in der Ebene und im Raume) vor derjenigen der projectiven Coordinaten zu bevorzugen; denn die Anwendungen der ersteren sind viel weniger ausgedehnt als die der letzteren.

Wir wollen jetzt einige kritische Bemerkungen über Einzelheiten machen. Vor allem sind wir der Meinung, dass das Dualitätsgesetz eine Folge davon ist, dass die ersten Principien der projectivischen Geometrie paarweise correlativ sich sondern, sodass dieses Gesetz „bewiesen" werden kann, ohne dass man auf besondere Constructionen correlativer Figuren zurückgreifen müsste. Zweitens, da der Verfasser die strengste Methode sich aneignete, um die Theorie der Paare imaginärer Elemente zu lehren, hätte er da nicht hinsichtlich der unendlich fernen Elemente diejenige annehmen müssen, welche Herr Pasch in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie" dargelegt hat, die einzig bekannte, die gegen jeden Einwand gesichert ist? Drittens hat sich Herr Aschieri zur Construction aller räumlichen Homographien der Methode bedient, welche Herr Bertini in seiner wichtigen Arbeit gelehrt hat: „Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque" (Lomb. Ist. Rend. (2) XX, F. d. M. XIX. 1887. 665). Nun glauben wir aber, dass sehr viele Leser nur mit grosser Mühe dem Verfasser in diesem Abschnitte

seines Buches werden folgen können, und wir fragen uns, ob es nicht besser gewesen wäre, die Constructionsmethoden zu lehren, welche im § 3 der „Beiträge“ von v. Staudt stehen, Methoden, welche man ohne jenen grossen Aufwand von Bezeichnungen darlegen kann, welcher, obschon vielleicht unerlässlich zur Lösung der Aufgabe, die Hr. Bertini sich gestellt hatte, es sicherlich zur Erreichung des bescheideneren Zieles des Hrn. Aschieri nicht ist. Endlich erwecken die letzten Zeilen der Nr. 4 auf S. 309 die Meinung, dass jede Curve doppelter Krümmung durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten eines Punktes dargestellt werden kann, was falsch ist, wie allgemein bekannt. La. (Lp.)

F. Amodeo. Lezioni sulle omografie binarie, dettate nel corso di geometria projettiva e raccolte da G. Quaratino. Napoli, autographirt.

Die vorliegende Publication deckt sich, wie Herr Amodeo selbst bemerkt, bis auf geringfügige Aenderungen mit Teilen eines unter der Presse befindlichen Werkes des Herrn Sannia. Da Referent das letztere Werk nicht hat benutzen können, genauere Hinweisungen aber dem vorliegenden Buch fehlen, muss derselbe sich mit einer blossen Inhaltsangabe begnügen.

Wesentlich ist für die Schrift die Art, mit vorliegenden projectivischen Beziehungen gleichsam zu rechnen. Bringt man nämlich zwei gegebene Projectivitäten desselben Trägers auf die Form

$$P \equiv abc \ldots \overline{\wedge}\, a_1 b_1 c_1 \ldots, \quad Q \equiv a_1 b_1 c_1 \ldots \overline{\wedge}\, a_2 b_2 c_2 \ldots,$$

so wird die projectivische Beziehung

$$a_1 b_1 c_1 \ldots \overline{\wedge}\; a_2 b_2 c_2 \ldots$$

durchgehends mit PQ bezeichnet. Alsdann ist ohne weiteres klar, welche projectivischen Beziehungen mit

$$P_1 P_2 P_3 \ldots P_n \text{ und } P_1^n$$

gekennzeichnet werden. Wenn man die identische Beziehung mit 1 bezeichnet, so wird jede Involution durch die symbolische Gleichung

$$J^2 \equiv 1,$$

eine Projectivität mit cyklisch-projectivischen Gruppen durch eine Gleichung

$$P^n \equiv 1$$

gegeben. Die einzelnen Gruppen enthalten n Elemente, wenn nicht $P^{n'} \equiv 1$ bereits für einen Teiler n' von n ist. Im ersten Teil (§ 1) der Schrift werden die von Herrn Lüroth mit grosser Vollständigkeit behandelten Sätze über cyklische Involutionen zum Teil reproducirt.

Die §§ 2-5 handeln von den Büscheln projectivischer Reihen, der Gesamtheit derjenigen Projectivitäten, welche dieselben beiden reellen oder imaginären Doppelelemente besitzen. Die aus der Imaginarietät dieser Elemente entspringenden Schwierigkeiten werden in folgender Weise umgangen. Wird ein Träger der projectivischen Umformung PP_1 unterworfen, so geht aus jedem Paar einer vorliegenden Projectivität P_1 das einer dritten, P_2, hervor; P_2 heisst zu P_1 projectivisch. Im allgemeinen ist

$$P_2 \equiv P^{-1} P_1 P$$

von P_1 verschieden, in besonderen Fällen hingegen mit P_1 identisch, und zwar dann, wenn $P_1 P = P P_1$ ist. Die Projectivitäten P und P_1 heissen alsdann commutativ, und man hat in der Gesamtheit der unter sich paarweise commutativen Projectivitäten einen Büschel von Projectivitäten mit denselben Doppelelementen vor sich. Sind

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \overline{\wedge}\, a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots$$

und

$$b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots \overline{\wedge}\, b_2 b_3 b_4 b_5 \ldots$$

verschiedene Schreibweisen für irgend eine Projectivität P, so ist

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots \overline{\wedge}\, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \ldots,$$

und die letzteren Projectivitäten sind alle unter sich und mit P commutativ. In der Mannigfaltigkeit kommt eine Involution vor. Trennen nämlich a_2, a_2' die Elemente a_1, a_3 harmonisch, ferner a_3, a_3' die Elemente a_2, a_4, u. s. w., so ist diese zu P adjungirte Involution

$$a_1 a_1', a_2 a_2', a_3 a_3', \ldots;$$

$a_1' a_2' a_3' \ldots$ ist dabei auch eine Reihe successiver Elemente von P. Commutativ werden zwei solche Projectivitäten sein, denen dieselbe Involution adjungirt ist. Sind ll' und mm' zwei Paare

homologer Elemente von P, so transformirt die Involution lm', $l'm$ jede Projectivität der Mannigfaltigkeit in ihre inverse, die adjungirte Involution also in sich selbst; zu einer dieser zu J harmonischen Involutionen gehören die Paare

$$a_k b_l, \quad a_{k-1} b_{l+1}, \quad a_{k-2} b_{l+2}, \ldots.$$

Von jeder der genannten Involutionen bilden die Doppelelemente ein reelles oder auch imaginäres Paar der Involution J. Hieraus ergiebt sich eine nicht uninteressante Methode, das gemeinsame Paar zweier Involutionen auch dann zu finden, wenn es imaginär sein sollte. Bei einer Projectivität sind die charakteristischen Gruppen erster und zweiter Art wesentlich. Die ersteren bestehen aus je vier successiven Elementen a_1, a_2, a_3, a_4 und sind nach dem Obigen alle unter sich projectivisch. Die charakteristischen Gruppen der zweiten Art sind, wenn die Projectivität P

$$efabc \ldots \overline{\wedge} \; efa'b'c' \ldots$$

lautet,

$$efaa', \; efbb', \; efcc', \ldots.$$

Dieselben können, auch wenn e und f imaginär sind, als unter sich projectivisch betrachtet werden, da eine bestimmte Projectivität a und a' in b und b', zugleich aber die adjungirte Involution mit den Doppelelementen e und f in sich selbst überführt. Das Wesen dieser Sätze tritt, wenn man Rotationen um einen Punkt anwendet, an bekannten Thatsachen klar zu Tage.

In den §§ 6-7 wird nun zunächst gezeigt, dass zwei Projectivitäten dann und nur dann projectivisch sind, wenn die charakteristischen Gruppen erster Art derselben zu einander projectivisch sind. Bei zwei gleichartigen Involutionen existiren stets zwei Involutionen, welche die eine in die andere transformiren. Umgekehrt wird jede von zwei gegebenen Projectivitäten P, Q eine bestimmte Involution, die zu QP^{-1} adjungirte Involution, in eine bestimmte andere, die zu $Q^{-1}P$ adjungirte Involution, transformiren. Ist QP^{-1} eine Involution, so existiren unendlich viele Involutionen, deren jede durch P und Q in eine bestimmte andere transformirt wird; solche Projectivitäten P und Q werden harmonisch zu einander genannt. Eine Projecti-

vität ist vollständig bestimmt, wenn sie zwei, bezw. ein Paar enthält und zu einer, bezw. zwei Projectivitäten harmonisch sein soll. Die Schrift schliesst mit zwei Anwendungen auf die Kegelschnitte ab.

Wie man sieht, berühren diese Untersuchungen sich sehr nahe mit Resultaten, die zum Teil von v. Staudt, zum Teil von den Herren Lüroth, Wiener, Böger u. a. entwickelt sind. Befremdlich ist unter solchen Umständen das Fehlen jedes Literatur-Nachweises. Eine zweite, 1889 erschienene Auflage der Schrift gleicht übrigens diesen Fehler aus. E. K.

F. Amodeo. Fasci di omografie binarie e rappresentazione geometrica degli elementi immaginarii. Batt. G. XXVI. 363-368.

Jede einzelne Projectivität P, der (vergl. das vorige Referat) eine bestimmte Punktinvolution $a_1 a'_1, a_2 a'_2, a_3 a'_3, \dots$ (J) adjungirt ist, kann zur Darstellung eines bestimmten der reellen oder imaginären Doppelpunkte der letzteren verwendet werden. Entspricht nämlich jeder Punkt der Reihe $a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ seinem vorangehenden vermöge P, so kommt dieser Folge ein und derselbe Richtungssinn zu, wo man auch a_1 gewählt hat. Ja dieser Sinn bleibt ungeändert, wenn man eine andere Projectivität des mit der Involution J verbundenen Büschels auffasst, wenn nur der in ihr a_1 zugeordnete Punkt mit a_2 auf derselben Strecke $a_1 a'_1$ liegt. Dagegen geht der Sinn in den entgegengesetzten über, wenn in der neuen Projectivität der zu a_1 homologe Punkt in der anderen Strecke liegt. Da $(a_1 a_3 a_2 a'_2) = -1$ ist, so gehört der entgegengesetzte Sinn z. B. zu der inversen Projectivität P^{-1} von P. Da im Fall einer hyperbolischen Involution alle Folgen $a_1 a_2 a_3 \dots$ von positivem Sinne einen bestimmten der Doppelpunkte, die anderen aber den zweiten Doppelpunkt zum Grenzpunkt haben, so rechtfertigt es sich auch im anderen Falle, $a_1 a_2 a_3 \dots$ als Darstellung eines bestimmten Doppelpunktes von P oder J aufzufassen. Insbesondere können hierzu die cyklischen Projectivitäten des Büschels verwendet werden.

Von den Arbeiten der Herren Klein und Lüroth, deren Namen Herr Amodeo anführt, sind ihm gerade die entgangen, in denen der hier angedeutete Gedanke näher ausgeführt wird.

E. K.

J. Finsterbusch. Beitrag zur synthetischen Geometrie ebener Kreissysteme und damit im Zusammenhange stehender höherer Curven. I. Abschnitt. Die Kreisverwandtschaft in perspectivischer Lage. Progr. Realsch. Werdau. 48 S.

Die vorliegende Schrift, der erste Teil eines auf fünf Schriften berechneten Cyklus, behandelt auf grösstenteils nicht rechnendem Wege die Kreisverwandtschaft in perspectivischer Lage, die Aehnlichkeit und die Inversion. Wesentlich Neues ist in derselben nicht enthalten. E. K.

B. Klein. Zum Fundamentalsatz der Geometrie der Lage. II. Marburg Ber.

Das Referat über diese, die vorhergehende und eine noch folgende Arbeit des Verfassers erscheint später. Schg.

C. Le Paige. Démonstration d'un théorème de von Staudt. Liège Mém. (2) XV. 8 S.

Aus drei gegebenen Elementen einer Punktreihe kann man durch wiederholte Constructionen harmonischer Gruppen alle Punkte der Punktreihe ableiten. Mn. (Lp.)

C. Le Paige et F. Deruyts. Sur les théorèmes fondamentaux de la géométrie projective. Belg. Bull. (3) XV. 335-347.

Der Beweis beruht auf den Eigenschaften der perspectiven Dreiecke und auf der folgenden Definition: Auf einer Geraden gelegene Punktepaare sind in Involution, wenn man durch drei beliebige Paare die Gegenseitenpaare eines Vierseits hindurchlegen kann. Mn. (Lp.)

C. Le Paige et F. Deruyts. Sur les théorèmes fondamentaux de la géométrie projective. Mathesis VIII. Suppl. II. 15 S.

Vergl. Belg. Bull. (3) XV. 335-347. Mn.

T. Brodén. Anmerkningar am Dobbelelementer ved projectiviska raka Punktsystem och plana Strålknippan. Zeuthen Tidss. (5) VI. 613.

Wenn zwei Punktsysteme auf zwei geraden Linien einander projectivisch entsprechen, so fallen immer zwei Elemente mit den entsprechenden zusammen, falls die Linien aufeinander gelegt werden. Es wird nun untersucht, wie diese zusammenfallenden Punkte sich bewegen, wenn die eine Linie längs der anderen verschoben wird.

Aehnliche Untersuchungen werden auch für zwei Strahlenbüschel unternommen. V.

Kirchner. Ueber die perspective Lage ebener Dreiecke. Diss. Halle.

Herr Rosanes hatte in den Math. Ann. II. 549 in analytischer Weise und Herr Schröter ebendaselbst S. 553 in geometrischer Weise die Frage untersucht, wie zwei ebene Dreiecke gleichzeitig auf mehr als eine Art perspectiv liegen können. Diese Arbeiten haben den Verfasser der vorliegenden Dissertation dazu geführt, die perspective Lage ebener Dreiecke überhaupt zu untersuchen. Zunächst stellt sich heraus, dass die allgemeine Beantwortung der Frage nach den perspectiven Verhältnissen ebener Polygone wesentlich von der Lösung von Aufgaben abhängt, die sich mit der Perspectivität ebener Dreiecke beschäftigen. Der Verfasser behandelt daher fast ausschliesslich Dreiecke in perspectiver Lage. Da es ∞^6 Paare von Dreiecken giebt, so giebt es zu einem bestimmten Dreieck ∞^5 perspectiv liegende Dreiecke. Wenn also i Dreiecke gegeben sind, so giebt es ∞^{6-i} Dreiecke, von denen jedes gleichzeitig mit den i gegebenen Dreiecken perspectiv liegt. Sind für $i=2$ die beiden

Perspectivitäts-Centra O_1 und O_2 feste Punkte, so resultirt natürlich ein einziges gesuchtes Dreieck. Für $i = 3$ ergiebt sich, dass, wenn das eine Centrum O_1 ein fester Punkt ist, sich die beiden andern Centra O_2 und O_3 auf zwei Curven dritter Ordnung bewegen, welche beide durch O_1 und durch die Ecken der beiden zugehörigen Dreiecke gehen. Ist $i = 4$ und O_1 fest, so ergeben sich sechs Dreiecke, welche gleichzeitig mit den vier gegebenen Dreiecken perspectiv liegen. Ist $i = 4$ und beschreibt O_1 eine gerade Linie, so bewegen sich die Ecken der gleichzeitig mit den vier gegebenen Dreiecken perspectiv liegenden Dreiecke auf drei Curven zwölfter Ordnung, welche sechsmal durch die Ebenen des bevorzugten Dreiecks und zweimal durch die entsprechenden Ecken der drei andern Ecken gehen, während sich die übrigen Perspectivitäts-Centra in diesem Falle auf drei Curven 18ter Ordnung bewegen. Ist $i = 5$, so ergiebt sich, dass die Perspectivitäts-Centra aller Dreiecke, die gleichzeitig mit den fünf gegebenen Dreiecken perspectiv liegen, Curven 108ter Ordnung beschreiben, und dass die Ecken jener Dreiecke ebenfalls Curven 108ter Ordnung beschreiben. Ist $i = 6$, so resultirt, dass es 324 Dreiecke giebt, welche mit sechs beliebig gegebenen Dreiecken gleichzeitig perspectiv liegen, woraus unmittelbar folgt, dass zu drei gegebenen Sechsecken 324 ihnen perspectiv liegende Sechsecke existiren. Scht.

A. Schönflies. Ueber die regelmässigen Configurationen n_3. Math. Ann. XXXI. 43-69.

In dieser Abhandlung giebt der Herr Verfasser die versprochene Begründung und weitere Ausführung der Sätze über regelmässige Configurationen, welche er in den Gött. Nachr. 1887. 410-417 mitgeteilt hat, sowie noch einige weitere Resultate. Wegen der Aufgabe, um die es sich handelt, und der eingeführten Begriffe lese man das Referat F. d. M. XIX. 1887. 589f. nach; hinzugefügt sei noch, dass der Verfasser zwei Configurations-Punkte oder -Gerade „verbunden“ oder „getrennt“ nennt, je nachdem sie mit einer Configurations-Geraden, resp. mit einem

Configurations-Punkte incident sind oder nicht; ferner heisst eine Gerade zu einem Punkte conjugirt, wenn dieser mit den drei Configurationspunkten der Geraden verbunden ist. Die Einteilung der zu behandelnden Configurationen geschieht nach der Anzahl derjenigen Dreiecke, in denen derselbe Configurationspunkt vorkommt; ist α diese Zahl, so heisst die Configuration eine Configuration mit α Dreiecken. Die Untersuchung beginnt mit der Frage, ob zu einem Punkte mehr als eine Gerade conjugirt sein kann; es ergiebt sich, dass, wenn es zwei Gerade sind, dies nur getrennte Gerade sein können, und es giebt nur eine einzige derartige Configuration, die bekannte imaginäre Configuration 8_3 mit 9 Dreiecken, die im ganzen 24 Dreiecke enthält, und deren Gruppe aus 48 Substitutionen besteht. Ist in einer Configuration einem Punkte nur eine Gerade conjugirt, so besteht sie aus einem Polygon $1, 2, 3, 4, \ldots, n$, welches sich so ein- und umgeschrieben ist, dass für jeden Wert von i die Punkte $i, i+2, i+3$ auf einer Geraden liegen; diese bereits von Herrn Martinetti (Ann. di Mat. (2) XV. 5) erwähnte Configuration enthält im ganzen zwei Dreiecke und besteht reell für jeden Wert $n > 8$, ihre Gruppe ist die cyklische. Giebt es zu einem Punkte einer Configuration gar keine conjugirte Gerade, so kann jeder Punkt höchstens in sechs Dreiecken enthalten sein. Configurationen mit sechs Dreiecken giebt es zweierlei: die Desargues'sche Configuration 10_3, deren Gruppe aus 120 Substitutionen besteht und der Gruppe aller Vertauschungen von fünf Dingen holoedrisch isomorph ist, und die Configuration 9_3, welche aus drei Dreiecken besteht, von denen je zwei dreifach perspectiv sind (cf. Kantor, Wien. Ber. LXXXIV), und deren Gruppe aus 108 Substitutionen besteht. Regelmässige Configurationen mit fünf Dreiecken giebt es überhaupt nicht. Die Aufstellung der Configurationen mit vier und drei Dreiecken führt auf bisher noch nicht bekannte. Die Configurationen mit vier Dreicken bestehen aus einem Cyklus von Dreiecken, deren jedes dem vorhergehenden eingeschrieben und dem folgenden umgeschrieben ist, und können nur existiren, wenn $n = 3m$ ist; sie enthalten im ganzen $4m$ Dreiecke. Die Configurationen mit drei Dreiecken bestehen allgemeiner aus einem

Cyklus von q Polygonen von je p Ecken ($pq = n$), deren jedes dem folgenden (und das letzte dem ersten) eingeschrieben ist, so zwar, dass je zwei aufeinander folgende Ecken eines Polygons auf zwei aufeinander folgenden Seiten des vorhergehenden liegen; sie können auch aus einem sich selbst ein- und umgeschriebenen Polygone bestehen. Nach einer ausführlichen Untersuchung der Gruppen aller dieser Configurationen, deren Resultate sich nicht kurz wiedergeben lassen, weist der Herr Verfasser die Existenz solcher regelmässigen Configurationen überhaupt nach, die ebenso, wie alle die angeführten, die Eigenschaft besitzen, sich aus Cyklen von Polygonen zusammenzusetzen, welche einander regelmässig ein- und umgeschrieben sind, die aber im allgemeinen keine Configurations-Dreiecke besitzen werden; hiervon werden zwei Arten unterschieden. Im Anschluss hieran wird dann endlich die Frage nach den Configurationen mit zwei Dreiecken entschieden; als solche ergiebt sich eine Configuration, die aus drei einander cyklisch ein- und umgeschriebenen Polygonen besteht. Ein Beispiel hierfür ist eine Configuration 21_3, die nach einer Bemerkung des Hrn. Schröter (Gött. Anz. 1888. 247) schon von Cayley (Crelle J. XXXI. 217) beschrieben worden ist; sie lässt sich sowohl als Configuration erster, wie als Configuration zweiter Art auffassen, was übrigens bei einer ganzen Klasse von Configurationen der Fall ist. T.

H. Schröter. Ueber lineare Constructionen zur Herstellung der Configurationen n_3. Gött. Nachr. 237-253.

Um die von den Herren Kantor, Martinetti und Schönflies theoretisch nachgewiesenen Configurationen wirklich herzustellen, zeigt Herr Schröter, wie man in linearer Weise zur Construction der regelmässigen Configuration n_3, bei welcher die n Configurationspunkte so angeordnet liegen, dass immer der i^{te}, $(i+1)^{te}$ und $(i+3)^{te}$ auf einer Configurationsgeraden sich befinden, oder, was dasselbe sagt, zur Construction eines sich selbst ein- und umbeschriebenen n-Ecks unter Annahme einer gewissen Anzahl be-

stimmender und willkürlich zu wählender Punkte gelangen kann. Nachdem man die ersten drei Configurationspunkte ganz beliebig und die folgenden bis zum $(n-4)^{ten}$ nach der Reihe bezw. auf den Geraden $|1, 2|, |2, 3|, |3, 4|, \ldots, |n-7, n-6|$ willkürlich gewählt hat, kommt es nur noch darauf an, einen der vier letzten Punkte so zu wählen, dass seine Verbindungslinien mit gewissen drei der schon bestimmten Configurationspunkte drei gewisse der schon erhaltenen Configurationsgeraden bezw. in drei Punkten schneiden, die auf einer Geraden liegen. Dies gelingt aber sehr einfach vermittelst der bekannten Eigenschaft der Curven dritter Ordnung, welche der nach dem Herrn Verfasser benannten Erzeugungsweise derselben zu Grunde liegt. Da die gegebene Construction erst für $n > 9$ gilt, machen die drei existirenden Configurationen 9_3 (Kantor) eine besondere Behandlung nötig, die vorausgeschickt wird. T.

J. de Vries. Ueber gewisse ebene Configurationen. Acta Math XII. 63-81.

Während bisher eine eingehende Behandlung hauptsächlich diejenigen ebenen Configurationen n_r erfahren haben, die aus einer gleichen Anzahl n von Punkten und Geraden bestehen, welche derart verteilt sind, dass durch jeden dieser n Punkte drei der n Geraden gehen, und auf jeder der n Geraden drei der n Punkte liegen, werden in der vorliegenden Abhandlung von den allgemeineren ebenen Configurationen (p_γ, g_π), welche aus p Punkten und g Geraden derart zusammengesetzt sind, dass jeder Punkt mit γ Geraden und jede Gerade mit π Punkten incident ist, einige Configurationen von der Art (p_4, g_3) und daran sich anschliessende andere genauer untersucht. Die kleinsten Zahlen, für welche eine Configuration (p_4, g_3) möglich ist, sind $p = 9$, $g = 12$; diese Configuration $(9_4, 12_3)$, die von zwei einander ein- und umbeschriebenen Vierecken und ihren in einem Punkte zusammenlaufenden vier Diagonalen gebildet wird, ist aber imaginär. Daher wendet sich die Untersuchung sogleich den Configurationen $(12_4, 16_3)$ zu, deren Punkte in drei Quadrupel

zerfallen, in welchen jeder Punkt von den übrigen getrennt ist (zwei Configurationspunkte oder -Gerade heissen „verbunden“ oder „getrennt“, je nachdem sie mit ein und derselben Configurationsgeraden resp. demselben Configurationspunkte incident sind oder nicht); derartige Configurationen giebt es nur zwei, die mit A und B bezeichnet werden. Von ihren Unterschieden seien einige hervorgehoben: Die Configuration A wird gebildet von drei Punktquadrupeln einer zweizügigen C_3, und ihre Geraden haben eine gemeinschaftliche Begleiterin, während die Configuration B aus sechs correspondirenden Paaren (desselben Systems) einer C_3 besteht, und ihre Configurationsgeraden eine gemeinschaftliche zweite Begleiterin besitzen; je zwei getrennte Punkte von A sind Gegenecken in zwei von Configurationsgeraden gebildeten Vierseiten, in der Configuration B dagegen zeigen je zwei getrennte Punkte ungleiches Verhalten, indem sie entweder ebenfalls als Gegenecken zwei solchen Vierseiten angehören oder aber die Hauptecken eines Steiner'schen Achtseits (d. h. dessen Seiten abwechselnd durch diese Ecken laufen) sind. Die Restfigur jeder Configurationsgeraden (d. i. nach Kantor die Figur, welche die von dieser Geraden getrennten Geraden enthält) in A und B liefert eine Configuration $(9_2, 6_3)$; entfernt man nun in A oder B sechs Gerade, welche einer solchen $(9_2, 6_3)$ angehören, so sind die übrigbleibenden drei Configurationspunkte im ersten Falle allineirt, im zweiten Falle nicht. — Sodann studirt der Verfasser im besonderen die Configuration A, deren interessante Eigenschaften sich aber nicht kurz wiedergeben lassen. Erwähnt sei nur, dass diese Configuration auf eine Reihe anderer führt: eine regelmässige 12_3, eine Configuration $(15_4, 20_3)$, die auf zehn Arten aus zwei Tripeln vollständiger Vierseite zusammengesetzt ist. Die 16 in A enthaltenen $(9_2, 6_3)$ bestimmen ebensoviel neue Configurationen A; ausserdem ergiebt die Untersuchung von A in Bezug auf ihre sämtlichen Restfiguren eine neue Configuration derselben Art, die „associirte“, deren Punkte sich mit den Punkten von A auf den 18 gemeinsamen Diagonalen harmonisch trennen; die Punkte zweier solchen associirten Configurationen bilden mit ihren Diagonalen eine Configuration $(24_3, 18_4)$, die

weiter auf Configurationen 18_3 und zwei verschiedene 21_3 führt, u. s. w. T.

J. de Vries. Ueber die einem Vierseite harmonisch eingeschriebene Configuration 18_3. Wien. Ber. XCVII. 1307-1319.

Die Ecken eines Vierseits und die Punkte, welche jede Ecke von denjenigen Eckenpaaren harmonisch trennt, die mit dieser auf einer und derselben Seite liegen, bilden mit den 18 Geraden, die von den Ecken nach je zweien dieser Punkte gehen, eine Configuration 18_3, die sehr eingehend studirt wird. Im Anschluss hieran werden aus der Desargues'schen Configuration 10_3 andere Configurationen hergeleitet; die Existenz dieser beruht allein darauf, dass jede Gerade jener 10_3 zwei Vierseiten angehört. Daher führt das angewandte Verfahren auch bei gewissen anderen Configurationen, ebenso wie bei dieser, zu neuen Configurationen. T.

J. de Vries. Over vlakke Configuraties. Amst. Versl. en Meded. (3) V. 105-120.

J. de Vries. Over de harmonische Configuratie $(24_3, 18_4)$. Amst. Versl. en Meded. (3) V. 210-219.

J. de Vries. Involutions quadruples sur courbes biquadratiques. Arch. Néerl. XXIII. 93-114.

Fortsetzung der Studien des Verfassers über ebene Configurationen (siehe F. d. M. XIX. 1887. 592). Nach Anstellung einiger allgemeinen Betrachtungen über ihre Behandlung durch Reye, Kantor, Schönflies und Ameseder kommt er zu der Configuration $(12_4, 16_3)$, welche durch die 12 Gleichförmigkeitspunkte von vier Kreisen gebildet wird. Verschiedene merkwürdige Eigenschaften dieser Configuration lehrt er in Verbindung mit der Theorie der vollständigen Vierecke und Vierseite kennen. Sodann wendet er sich zu den Configurationen $(15_4, 20_3)$ und $(12_4, 16_3)$, welche zu der ersten in bestimmter Beziehung stehen,

und behandelt dabei die Curven der dritten und vierten Ordnung, welche mit diesen Configurationen zusammenhängen.

In der zweiten Abhandlung wird die Untersuchung fortgesetzt über die Configuration $(24_3, 18_4)$, welche harmonisch genannt wird, weil jede ihrer Geraden vier harmonische Punkte besitzt. Die sich daraus ergebenden Eigenschaften werden untersucht und die Configurationen ermittelt, welche mit dieser zusammenhängen. Die dritte Abhandlung ist eine französische Uebersetzung der zuerst genannten. G.

S. Roberts. On the figures formed by the intercepts of a system of straight lines in a plane, and on analogous relations in space of three dimensions. Lond. M. S. Proc. XIX. 405-422.

n Gerade begrenzen, wie Steiner gezeigt hat und Herr Roberts bestätigt, im allgemeinen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ endliche und $2n$ nicht geschlossene Flächenstücke. Um über die Natur der Flächenteile etwas Näheres zu erfahren, teilt Herr Roberts die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte der n Geraden in a_1 „apices“ und a_2, a_3, a_4 „neutral, reentrant and interior points“, die der Reihe nach an 1, 2, 3 oder 4 geschlossenen Ebenenstücken vorkommen. Zunächst gilt natürlich die Relation

$$a_1+a_2+a_3+a_4 = \tfrac{1}{2}n(n-1).$$

Da von den unendlich grossen Strecken zwei auf einen apex, einer auf einen neutral point kommen, von einem reentrant oder interior point aber nur endliche Strecken ausgehen, so ist $2a_1+a_2 = 2n$. Da von den $n(n-2)$ endlichen Strecken 2 auf jeden apex, 3 auf einen neutral point, und je 4 auf einen reentrant oder interior point kommen, so ist

$2a_1+3a_2+4a_3+4a_4 = 2n(n-2)$ oder $a_2+2a_3+2a_4 = n(n-3)$. Die Zahl der apices schwankt zwischen 3 und $n-1$ für gerades und zwischen 3 und n für ungerades n.

Nicht überzeugt haben den Referenten die Entwickelungen, nach denen, von $a_1 = 3$ abgesehen, mindestens a_1 oder a_1-1 reentrant points vorhanden sein müssen. Der grösste Wert von

a_3 ist, je nachdem a_1 gerade oder ungerade ist, $n+\frac{3}{2}a_1-8$ oder $n+\frac{1}{2}(3a_1-15)$. Aus den angegebenen Grenzen folgen die für a_4.

Für die Werte 3 bis 8 werden die Ergebnisse der Formeln tabellarisch geordnet; in besonderen Rubriken wird die Gesamtzahl der an allen endlichen Polygonen auftretenden Seiten, $M=\frac{1}{2}(3n^2-7n)+a_4$, und die Summe aller Winkel derselben, $\frac{1}{2}N\pi=\frac{1}{2}\pi(n(n-1)+2a_4-4)$, aufgeführt.

Ist A_p die Anzahl der p-Ecke, so gelten die beiden Relationen

$$A_3+A_4+\cdots+A_n=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2),$$
$$3A_3+4A_4+\cdots+nA_n=\tfrac{1}{2}(3n^2-7n)+a_4.$$

Die ihnen entsprechenden Zahlensysteme werden für $n=5, 6$ tabellarisch geordnet. Eine grosse Reihe von Combinationen schliesst sich schon deswegen aus, weil höchstens ein n-Eck, ein n-Eck nicht neben einem $(n-1)$-Eck vorkommen darf und sich mindestens $n-2$ Dreiecke vorfinden müssen. — Herr Roberts lässt nun die Geraden gruppenweise durch einzelne Punkte gehen und überträgt alsdann einige seiner Entwickelungen auf den Raum. E. K.

Kilbinger. Ueber eine Art involutorischer Verwandtschaft des zweiten Grades. Schlömilch Z. XXXIII. 14-21.

Zwei in einer Ebene gelegene Polarsysteme bestimmen in derselben bekanntlich eine involutorische Verwandtschaft zweiten Grades, wenn jedem Punkte der Ebene der Schnittpunkt seiner beiden Polaren zugewiesen wird. Einige hierbei auftretende projective Beziehungen werden synthetisch untersucht, wobei die Ordnungscurven des Polarsystems als reell vorausgesetzt werden. Js.

D. Montesano. Su alcuni gruppi chiusi di trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio. Ven. Ist. Atti (6) VI. 1425-1444.

In der Ebene giebt es bekanntlich unendlich viele Siebener quadratisch-involutorischer Transformationen, die mit der iden-

dann ist auf je zwei entsprechenden Strahlen r und r' von H_μ

$$r(O\pi J_\nu \Phi) \,\overline{\wedge}\, r'(O\pi J_\nu \Phi).$$

Die Gesamtheit der so bestimmten Projectivitäten charakterisirt die Transformation. Durch birationale Umformung des Raumes kann man jede derartige Transformation auf eine solche mit einer der vier fundamentalen Bertini'schen involutorischen Beziehungen H_μ zurückführen.

Die zweite, wie die dritte Hauptklasse der betrachteten Transformationen hängt mit einer Jonquières'schen Transformation k^{ter} Ordnung einer Ebene zusammen, bei welcher die beiden $(k-1)$-fachen Fundamentalpunkte an einer Stelle D vereinigt liegen, die von D ausgehenden Strahlen r, r' aber einander paarweise wechselseitig entsprechen. Sind nun zu den Punkten E und F auf r und r' die entsprechenden E' und F', O und O' aber feste mit D in einer Geraden liegende Punkte, so werden die Schnittpunkte von EO und $F'O'$ einerseits und $E'O'$ und FO andererseits in einer Beziehung dritter Art von der Ordnung $n = 2k-1$ einander zugewiesen. Die Bündel O, O' gehören einander zu. Legt man dagegen durch m Fundamentalpunkte der zweiten Ebene eine Raumcurve Δ_m mit der $(m-1)$-fachen Secante d und lässt das durch Δ_m und d charakterisirte lineare Strahlensystem $\Delta_m d$ für den Bündel O' eintreten, so erhält man eine involutorische Transformation der zweiten Art.

Man übersieht sogleich, dass je zwei Ebenen $\pi = (dr)$ und $\pi' = (dr')$ in beiden Fällen mittels quadratischer Transformationen wechselseitig auf einander bezogen sind. Von den Fundamentalpunkten der Ebene π ist einer mit O identisch, ein zweiter ist im dritten Fall mit O' identisch, im zweiten auf Δ_m ausserhalb d gelegen. Der dritte Fundamentalpunkt beschreibt in beiden Fällen eine d $(n-1)$-fach treffende Raumcurve O_n. Das lineare Strahlensystem (O_n, d), welches in beiden Fällen in sich selbst übergeht, kann man mit Hülfe einer geeigneten Transformation in einen Strahlenbündel umformen und so die vorliegende Raumtransformation selbst in eine der vier Hauptformen der ersten Art verwandeln.

In allen drei Fällen werden die vorhandenen Fundamental-

curven genauer untersucht. Diese an sich interessanten Resultate hier anzuführen, würde zu weit führen. E. K.

D. MONTESANO. Su una classe di trasformazioni involutorie dello spazio. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 688-690.

Es werden diejenigen Verwandtschaften behandelt, bei denen einer Ebene eine Regelfläche n^{ter} Ordnung mit einer $(n-1)$-fachen Geraden entspricht. E. K.

J. NEUBERG. Sur les transformations quadratiques involutives. Mathesis VIII. 177-183.

Untersuchung der folgenden Transformation: Zwei involutorische Büschel haben ihre Mittelpunkte in zwei festen Punkten A und B; wenn zwei Strahlen AM und BM sich in M schneiden, so schneiden sich die conjugirten Strahlen AM', BM' in einem Punkte M'; M und M' entsprechen sich gegenseitig.

Mn. (Lp.)

R. E. ALLARDICE. A method of transformation in geometry. Edinb. M. S. Proc. VI. 14-21.

Es seien XY eine feste Gerade, P die zu transformirende Curve, AB eine Tangente an P, welche XY in B schneidet und mit XY einen Winkel θ einschliesst, BC eine Gerade, welche mit XY einen Winkel φ bildet. Hängen dann θ und φ durch die Gleichung $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = k \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$ zusammen, wo k eine Constante ist, so hüllt BC die transformirte Curve ein, welche in dem Aufsatze als „zweite Inverse von P“ eingeführt wird. So ist die zweite Inverse eines Kreises ein anderer Kreis, derart dass die Transformationsaxe zugleich die Linie gleicher Tangenten für beide Kreise ist. Das charakteristische Merkmal dieser Transformationsart besteht darin, dass die Länge der Tangente von einem Punkte in der Axe ungeändert bleibt. Beispiele von der Anwendung der Methode werden gegeben.

Gbs. (Lp.)

K. Doehlemann. Zur synthetischen Erzeugung der Cremona'schen Transformation vierter Ordnung. Schlömilch Z. XXXIII. 243-245.

Eine Jonquières'sche Verwandtschaft vierter Ordnung entsteht zwischen zwei Ebenen, wenn die Verbindungslinien homologer Punkte sowohl eine Raumcurve dritter Ordnung als eine Sehne derselben treffen. Dieselbe ist insofern speciell, als in der Schnittlinie der Ebenen drei Fundamentalpunkte einer jeden Ebene liegen. E. K.

D. Coelingh. Transformation de figures analogue à la transformation par rayons vecteurs réciproques. Nouv. Ann. (3) VII. 133-147.

Es werden hier Principien einer Transformation durch reciproke Halbgerade (semi-droites; Gerade, in denen nur ein Richtungssinn angenommen ist) gegeben, die von der durch Laguerre gegebenen Transformation abweichen, aber doch zu denselben und noch allgemeineren Resultaten führen. Das Nähere ist in dem Aufsatz selbst nachzusehen. Mz.

A. del Re. Sui sistemi polari reali bitangenti a sistemi polari reali dati. Nap. Rend. (2) II. 423-429.

Ist ein ebenes Polarsystem Π mit zwei anderen Π_1 und Π_2 bitangential, die es nicht unter einander sind, so entspringt die collineare Beziehung, zu der Π_1 und Π_2 sich zusammensetzen ($\Omega = \Pi_1\Pi_2$), zugleich aus den perspectivisch-collinearen Beziehungen $\Omega_1 = \Pi_1\Pi$ und $\Omega_2 = \Pi_2\Pi$, zu denen die Zusammenfassung von Π_1 und Π_2 mit Π Veranlassung giebt ($\Omega_1\Omega_2 = \Omega$). Hat Ω_1 die Axe s_1 und das Centrum S_1, und haben s_2 und S_2 dieselbe Bedeutung für Ω_2, so sind $G = s_1 s_2$ und $g = S_1 S_2$ sich selbst entsprechende Stücke in Ω. Daher giebt es drei, zwei oder eine Reihe zu Π_1 und Π_2 bitangentialer Π, je nachdem das gemeinsame Poldreieck von Π_1 und Π_2, welches das Fundamentaldreieck von Ω ist, reell ist, oder ausartet, oder nur eine

reelle Ecke zeigt. Die Paare $S_1 S_2$ auf einer Doppelgeraden von Ω gehören zu einer Involution, welche die auf g liegende Projectivität von Ω in ihre inverse Projectivität transformirt. Von jedem Doppelpunkte der Involution gehen zwei gemeinsame Tangenten an die reellen oder imaginären Ordnungscurven von Π_1 und Π_2. Analoges gilt von der Involution der Paare $(s_1 s_2)$.

Modificationen treten ein, wenn Π_1, Π_2 selbst bitangential zu einander sind. E. K.

A. del Re. Sur une question élémentaire de géométrie. Palermo Rend. II. 37-39.

In Erweiterung gewisser Sätze der Herren d'Ocagne und Fouret beweist Herr del Re Folgendes: Entsprechen zwei in einem Null- oder Polarsystem Π reciproke Flächen (S und S') einander collinear so, dass zu einem Punkt von S der Berührungspunkt der entsprechenden Tangentialebene gehört, so muss S eine Fläche zweiter Ordnung sein, und ihr Polarsystem Π' entsteht aus der Zusammensetzung der collinearen Beziehung Ω mit Π:

$$\Omega\Pi = \Pi', \quad \Omega = \Pi'\Pi;$$

das Polarsystem von S' erscheint in der Form

$$\Pi'' = \Pi\Pi'\Pi = \Pi\Omega\Pi\Pi = \Pi\Omega.$$

Es ist mit Π' identisch, wenn die Beziehung Ω involutorisch ist. In der Beziehung Π ist alsdann S zu sich selbst reciprok, Ω ist eine geschart-involutorische Beziehung, wenn Π ein Nullsystem ist; dagegen kann Ω auch eine central-involutorische Beziehung sein, wenn Π ein eigentliches Polarsystem ist.

E. K.

A. del Re. Un teorema di geometria projettiva sintetica ed alcuni suoi corollari. Palermo Rend. II. 128-130.

Herr del Re beweist Folgendes:

Das Fundamentaldreieck jeder collinearen Beziehung Ω, in der entsprechende Ecken zweier perspectivischen Dreiecke einander zugewiesen werden, ist ein Poldreieck des Polarsystems Π,

in welchem den Ecken des einen Dreiecks die den entsprechenden Ecken gegenüberliegenden Seiten des anderen entsprechen.

Der Satz beruht darauf, dass aus der Verknüpfung von Ω mit Π ein neues Polarsystem Π' entspringt, also

$$\Omega\Pi = \Pi', \quad \Omega = \Pi'\Pi$$

ist. Als einen besonderen Fall erhält der Verf. Herrn Reye's schönen Satz, dass die einem Fünfeck umgeschriebenen Raumcurven dritter Ordnung eine Ebene in Poldreiecken des Polarsystems schneiden, welches das Fünfeck auf der Ebene bedingt.

E. K.

V. Retali. Sulle forme binarie cubiche. Nota di geometria immaginaria. Palermo Rend. II. 25-27.

Zwei beliebige conjugirt-imaginäre Punkte einer reellen Geraden können immer als Durchschnitte dieser Geraden mit einem Null-Kreise angesehen werden. Diese besondere Bestimmung der imaginären Punkte erlaubt dem Verfasser, sehr einfache Auflösungen folgender Aufgaben zu geben:

1) Sind auf einer reellen Geraden ein reeller und zwei conjugirt-imaginäre Punkte gegeben, die zwei reellen Punkte zu finden, aus welchen die Hesse'sche Form derjenigen kubischen Form besteht, welche durch die gegebenen Punkte gebildet wird.

2) Sind umgekehrt drei reelle Punkte A, H_1, H_2 einer reellen Geraden gegeben, zwei solche conjugirt-imaginäre Punkte A_1, A_2 derselben Geraden zu finden, dass H_1H_2 die Hesse'sche Form derjenigen kubischen Form ist, welche durch AA_1A_2 gebildet wird.

3) Sind auf einer reellen Geraden ein reeller und zwei conjugirt-imaginäre Punkte gegeben, die drei Punkte zu finden, aus welchen die kubische Covariante derjenigen kubischen Form besteht, welche durch die gegebenen Punkte gebildet wird.

Indem der Verf. dann die v. Staudt'sche Theorie des Imaginären voraussetzt, löst er die beiden anderen Aufgaben auf:

4) Sind eine imaginäre Gerade erster Art und in ihrer

reellen Ebene ein Null-Kreis gegeben, die reellen Träger der zwei ihnen gemeinsamen Punkte zu bestimmen.

5) Sind eine imaginäre Gerade erster Art und in ihrer reellen Ebene die mit einem Sinne versehene elliptische Involution gegeben, welche ein (imaginärer) Punkt der Geraden bestimmt, den reellen Träger dieses Punktes zu finden. La.

G. Jung. Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque. Annali di Mat. (2) XV. 277-312.

Im vorigen Bande dieses Jahrbuchs S. 603 haben wir über einige Untersuchungen betreffs der linearen Systeme ebener Curven berichtet, aus denen einige Resultate von Herrn Jung dem Istituto Lombardo mitgeteilt worden waren; wir haben auch auf eine umfangreiche Abhandlung hingewiesen, in der diese Untersuchungen vollkommen auseinandergesetzt werden sollten; diese Arbeit soll uns jetzt beschäftigen. Wir überlassen es dem Leser, die Vergleichung zwischen der citirten Schrift und der gegenwärtigen zu machen, und beschränken uns darauf, den Inhalt dieser letzteren in gedrängter Kürze anzugeben.

Man habe in einer Ebene f (fundamentale) Punkte $a_1, a_2, \dots, a_f$, die alle unter einander verschieden und deren Lagen ganz willkürlich und unter einander unabhängig seien. Man setze voraus, dass es unendlich viele algebraische Curven gebe, deren Ordnung M und deren Geschlecht p sei, und von denen der i^{te} Fundamentalpunkt ein r_i^{ter} Punkt sei (wir werden immer voraussetzen, dass $r_1 \geqq r_2 \geqq \dots \geqq r_f$ sei). Unterliegen diese Curven nur den Bedingungen, welche, unmittelbar oder mittelbar, dadurch entstehen, dass dieselben durch die Fundamentalpunkte gehen, so werden sie ein allgemeines lineares System S bilden; besteht es aus $\infty^{c'}$ Curven, so heisst c' die „Dimension“ des Systems. Diese Zahl c' wird durch die Gleichung bestimmt

$$\tfrac{1}{2}M(M+3) = \sum_{i=1}^{i=f} \tfrac{1}{2}r_i(r_i+1) + c'.$$

Ein bekannter Bertini'scher Satz (Lomb. Ist. Rend. (2) XV; vgl. F. d. M. XIV. 1882. 432) sagt aus, dass alle Curven des Systems

S ausser den Fundamentalpunkten keinen singulären Punkt haben; daher kann man schreiben:

$$\tfrac{1}{2}(M-1)(M-2) = \sum_{i=1}^{i=f} \tfrac{1}{2} r_i(r_i-1) + p.$$

Versteht man endlich unter dem „Grad" des Systems die Zahl k der beweglichen Durchschnittspunkte zweier Curven von S, so wird

$$M^2 = \sum_{i=1}^{i=f} r_i^2 + k.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergiebt sich die Beziehung

$$c' = k + 1 - p,$$

durch welche die drei „Charakteristiken" eines Plancurvensystems verbunden sind, wenn es allgemein und durch die in beliebiger Lage gewählten Fundamentalpunkte bestimmt ist.

Im System S befinden sich $c'-1$ lineare Systeme gleichen Grades, gleicher Ordnung, gleichen Geschlechtes, aber von kleinerer Dimension; sie werden erzeugt, wenn man alle Curven des Systems $1, 2, \ldots, c'-1$ linearen Bedingungen unterwirft, vorausgesetzt dass diese neuen Bedingungen nicht in dem Hindurchgehen durch neue Punkte bestehen; ist c'' die Dimension eines solchen Systems, so hat man augenscheinlich

$$c'' < k + 1 - p.$$

Wir erinnern daran, dass es im allgemeinen möglich ist, in der Ebene des Systems eine gewisse Zahl f_c von (fundamentalen) Curven zu zeichnen, deren jede alle Curven des Systems nur in den Fundamentalpunkten schneidet.

Alle linearen Systeme, welche man aus einem gegebenen durch Cremona'sche Transformationen erhält, bilden eine „Familie"; das System kleinster Ordnung der Familie heisst „typisches" System derselben oder auch „Minimalsystem"; es hat die charakteristische Eigenschaft, dass seine Ordnung nicht kleiner als die Summen der drei höchsten Grade der Vielfachheit der Fundamentalpunkte ist; ferner hat es keine Fundamentalcurve, mit Ausnahme des Falles, in welchem nur zwei Fundamentalpunkte vorhanden sind, bei denen die Summe der Vielfachheiten gleich der Ordnung des Systems ist. Bei allen linearen allge-

meinen und bestimmten Systemen einer und derselben Familie, deren Curven sich nur in beweglichen Punkten schneiden, wie auch bei allen in ihnen enthaltenen Systemen, ist der Unterschied $\varepsilon = f - f_c$ zwischen der Zahl der willkürlichen Fundamentalpunkte und derjenigen der Fundamentalcurven constant; hat das typische System der Familie keine Fundamentalcurve und f_0 willkürliche Fundamentalpunkte, so hat man $\varepsilon = f_0$; in allen anderen Fällen ist $\varepsilon = 1$. Daraus sieht man, dass die Ordnung μ des typischen Systems und der „Ueberschuss" (eccesso) ε charakteristische Zahlen einer Familie sind.

Bei den Untersuchungen der allgemeinen linearen Systeme kann man sich offenbar auf die Betrachtung derjenigen kleinster Ordnung beschränken, und die Aufstellung von Methoden zur Bestimmung der Minimalsysteme gegebener Ordnung und gegebenen Geschlechts ist eben der hauptsächlichste Zweck der vorliegenden Arbeit des Hrn. Jung. Um ihn zu erreichen, ist es zweckmässig, die Systeme ohne einfache Fundamentalpunkte (oder vom „Normaltypus") von den anderen (vom „abgeleiteten" Typus genannt, weil sie aus den ersteren durch Hinzufügung von einfachen Fundamentalpunkten sich „ableiten" lassen) zu scheiden. Ferner kann man die Untersuchung der typischen Systeme auf die vom Normaltypus beschränken. Ein System ist vom Normaltypus, wenn es keinen Fundamentalpunkt, oder nur einen, oder zwei, oder wenigstens drei hat, deren Vielfachheiten eine nicht grössere Summe als die Ordnung des Systems haben; im ersten Falle heisst das System „monom", im zweiten „binom", in den anderen „trinom". In den §§ 5-8 bestimmt der Verfasser die monomen, binomen und trinomen Systeme vom Normaltypus; in der Originalabhandlung findet der Leser die gewonnenen Ergebnisse tabellarisch gesammelt und auch einige der wichtigsten als besondere Sätze ausgedrückt.

Sind im Gegensatz zur vorigen Voraussetzung nicht alle Fundamentalpunkte ganz willkürlich gegeben, sondern in besonderen oder unter einander abhängigen Lagen, so ist das System „speciell"; wenn einige der Fundamentalpunkte durch die anderen eindeutig bestimmt sind, so heisst das System vom „ersten

Typus", sonst vom „zweiten Typus". Unter den Charakteristiken eines speciellen Systems besteht die Beziehung $c' > k+1-p$. Nachdem der Verfasser im § 9 einige interessante Eigenschaften der speciellen Systeme bewiesen und eine wichtige Folgerung über den Ueberschuss eines linearen Systems gezogen hat, das durch Cremona'sche Transformationen auf ein System ohne Fundamentalcurven zurückführbar ist (in Betreff der Note zu p. 304 vgl. den Aufsatz desselben Verfassers: Sul numero delle curve degeneri contenute in un fascio di genere qualunque, Lomb. Ist. Rend. (2) XXI, vgl. unten S. 607), kehrt er zu den allgemeinen Systemen zurück und bestimmt diejenigen, deren Geschlecht 0, 1, 2 (§ 10), 3 und 4 (§ 11) ist. Endlich lässt er nicht unbemerkt, dass er die Fragen nicht beantwortet, ob alle Gruppen der für jedes System angedeuteten Fundamentalpunkte wirklich lineare aus algebraischen Curven bestehende Systeme bestimmen. La.

G. Jung. Ricerche sui systemi lineari di genere qualunque e sulla loro riduzione all'ordine minimo. Annali di Mat. (2) XVI. 291-327.

In der vorigen Abhandlung hatte der Verfasser ausschliesslich lineare Plancurvensysteme betrachtet, welche nicht unendlich nahe Fundamentalpunkte haben; daher hatte er sich nur mit Systemen beschäftigt, deren Fundamentalpunkte solche Vielfachheiten haben, dass die Summe der drei höchsten nicht grösser als die Ordnung des Systems ist. In der gegenwärtigen lässt er jene Beschränkung fallen und studirt die Systeme, welche diese Bedingung nicht befriedigen. Indem wir die Kenntnis unseres unmittelbar vorausgehenden Referats voraussetzen, bedienen wir uns derselben Benennungen und Bezeichnungen; ferner führen wir, dem Verfasser folgend, eine neue Zahl $D \leq k$ ein, welche die Zahl der beweglichen Durchschnittspunkte zweier Curven des Systems angiebt; D hat, wie p, c', ε, denselben Wert für alle Systeme derselben Familie und kann, wie diese, den Namen „Invariante der Familie" bekommen. Herr Jung beweist zuerst viele Eigenschaften der linearen Systeme, wo $r_1+r_2+r_3 > M$

ist; einige derselben sollen hier angedeutet werden. Wenn in einem Systeme der genannten Art zwei der drei höchsten Fundamentalpunkte in verschiedenen Richtungen dem dritten unendlich nahe sind, so hat man $2r_1 > M$. Ferner ist in jedem linearen System $r_1 + r_2 + r_3 < 2M$; in demjenigen aber, wo $r_1 + r_2 + r_3 > M$ ist, folgt auch $D \overline{\leqq} 2M - 1 + 2(p-1)$. Ist nicht nur $r_1 + r_2 + r_3 > M$, sondern auch $M > 2p + 2$, so ist $r_1 < r_2 + r_3 + \cdots + r_f$, mit Ausschluss der Systeme, welche aus rationalen Curven mit einem $(M-1)$-fachen Fundamentalpunkte und nicht mehr als $M-1$ einfachen bestehen. Und wenn noch der höchste Fundamentalpunkt eine höhere Singularität darbietet, so besitzt das System auch andere Fundamentalpunkte (wenigstens einen), und es folgt $r_1 + 2h_1 > M$, wenn h_1 die höchste Vielfachheit dieser Punkte darstellt; auch hier muss man die obengenannten speciellen Systeme ausschliessen.

Diese Sätze sind besonders wichtig, weil sie eine breite Anwendung bei der Reduction der linearen Systeme auf ihre kleinste Ordnung erhalten; es genüge an den folgenden Schlüssen, welche Herr Jung in § 4 daraus zieht. Abgesehen von dem besonderen Falle eines Systems M^{ter} Ordnung mit einem $(M-1)$-fachen Fundamentalpunkte und mit $M-1$ einfachen, dem vielfachen nach verschiedenen Richtungen unendlich nahen, darf man sagen, dass die Ordnung jedes Systems, wo $2p+2 < M < r_1 + r_2 + r_3$ ist, durch eine Cremona'sche Transformation vermindert werden kann; dies ist aber unmöglich für alle diejenigen Systeme, wo es einen Fundamentalpunkt giebt, welchem alle anderen unendlich nahe sind. Man bemerke auch, dass die Ordnung μ der linearen Minimalsysteme, deren Geschlecht p und bei denen $r_1 + r_2 + r_3 > M$ ist, die Grenze $2p + 2$ nicht übertreffen kann, wenn $p > 0$, während sie keine Grenze hat, wenn $p = 0$ ist; übrigens ist es bekannt, dass, wenn $r_1 + r_2 + r_3 \leqq \mu$, das System schon ein Minimalsystem ist. Daraus ergiebt sich eine notwendige Scheidung der Systeme, für welche $r_1 + r_2 + r_3 \leqq \mu$ ist (Systeme „erster Klasse"), von denjenigen, für welche $r_1 + r_2 + r_3 > \mu$ ist (Systeme „zweiter Klasse").

Die Minimalsysteme (erster Klasse), welche in der ersten

Abhandlung unter der Voraussetzung bestimmt wurden, das Fundamentalpunkte verschieden seien, bleiben es, auch wen Fundamentalpunkte unendlich nahe zu einander oder in b deren Lagen sind, oder höhere Singularitäten darbieten. jenigen von der zweiten Klasse, welche in der ersten Abi lung nicht betrachtet wurden, sind zuerst die §§ 5-6 der zw gewidmet, in welchen der Verfasser sich mit den Systemen schäftigt, wo $r_1 = \mu - 2$. Im § 8 studirt er die, welche d eine einzige quadratische Transformation irreductibel sind; Ordnung kann dessen ungeachtet durch eine Folge solcher Tr formationen vermindert werden. Er kommt daher zu dem wicht Schluss, dass es nicht erlaubt ist, aus der Irreductibilität e Systems durch eine quadratische Transformation auf ihre Irre tibilität überhaupt zu schliessen, weil bei jener Voraussetz unter gewissen Umständen seine Ordnung durch eine Cremo sche Transformation vermindert werden kann.

Im § 9 wendet sich Herr Jung noch einmal den Systen zweiter Klasse zu, und studirt dasjenige, wo $r_1 < \mu - 2$, des Geschlecht immer höher als sechs ist.

Wichtige Resultate sind in den folgenden Paragraphen e halten; sie gipfeln in den zwei folgenden Sätzen: I. Mit A schluss der rationalen Systeme (deren D keine Grenze hat) ka der Grad D eines linearen Systems vom Geschlecht p ni höher als $8p+1$ sein; diese Grenze wird für $p=1$ erreic ist aber $p>1$, so ist $D \leqq 8p+2$. II. Immer mit Ausschlu der rationalen Systeme kann die Dimension c' eines linear Systems vom Geschlecht p nicht höher als $7p+2$ sein; die Grenze wird für $p=1$ erreicht; ist aber $p>1$, so i $c' \leqq 5p+3$.

Als Anwendungen der vorigen Sätze und zur Ergänzun der Tabellen der ersten Abhandlung bestimmt der Verfasse alle Normaltypen vom Geschlecht 0, 1, 2, 3, 4 und ihre abge leiteten.

Hiernach bedarf es keiner besonderen Erwähnung der Wic tigkeit der Jung'schen Untersuchungen wegen ihrer Anwendbarkei auf die eindeutige Abbildung einer Fläche auf eine Ebene, au

die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten, auf die vielfachen ebenen Verwandtschaften u. s. w. La.

G. Jung. Sull' eccesso degli elementi fondamentali di un sistema lineare di genere qualunque. — Sul numero delle curve degeneri contenute in un fascio di genere qualunque. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 719-723, 723-724.

Diese zwei Aufsätze hängen mit der ersten der obigen Abhandlungen über die linearen Plancurvensysteme zusammen; ihr Zweck ist die Ausdehnung oder der strenge Beweis gewisser darin enthaltenen Lehrsätze. Wenn man die Nomenclatur des Verfassers anwendet (s. die zwei vorigen Referate), so kann man den „Fundamentalsatz" des ersten Aufsatzes so ausdrücken: Wenn man aus einem linearen System vom Geschlecht p und von der Dimension $c' > 1$ mit f Fundamentalpunkten und f_c Fundamentalcurven, durch eine quadratische Verwandtschaft ein anderes System mit f' Fundamentalpunkten und f'_c Fundamentalcurven ableitet, so bestehen folgende Beziehungen $f' = f + \omega$, $f'_c = f_c + \omega$, wo ω eine der Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ist. In Folge dessen ist $f' - f'_c = f - f_c$, d. h. eine quadratische Transformation verändert nicht den Ueberschuss eines Systems von der Dimension $c' > 1$; derselbe Satz gilt für jede eindeutige Verwandtschaft, weil dieselbe durch eine Reihe quadratischer ersetzbar ist. Im Falle $c' = 1$ wird dieses „Ueberschuss-Theorem" durch das folgende ersetzt: Ist β die Zahl der Grundpunkte und λ die der singulären Curven eines Büschels ebener Curven vom Geschlecht p; sind β' und λ' die entsprechenden Zahlen für den Büschel kleinster Ordnung, auf welchen jener durch eine eindeutige Transformation zurückführbar ist: so besteht die Gleichung $\beta - \lambda = \beta' - \lambda'$. Daraus zieht man das Corollar: Hat ein Büschel rationaler Curven M^{ter} Ordnung β Grundpunkte und γ singuläre Curven von einer Ordnung kleiner als M, so ist $\gamma = 2(\beta - 1)$.

La.

G. Jung. Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di genere qualunque. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 488-493.

Die Ordnung μ eines linearen Curvensystems kann mit Hülfe einer Cremona'schen Transformation erniedrigt werden, wenn drei von einander verschiedene r_1-, r_2-, r_3-fache Fundamentalpunkte existiren, für welche $\mu < r_1+r_2+r_3$ ist. Solche Curvensysteme niedrigster Ordnung, bei denen die Fundamentalpunkte von einander verschieden sind und deshalb, auch für die drei grössten r, $r_1+r_2+r_3 \leqq \mu$ ist, hat Herr J. bei früherer Gelegenheit (Ricerche etc., s. oben S. 601 und S. 604) behandelt. Vereinigen sich die Fundamentalpunkte des Systems gruppenweise, so kann $r_1+r_2+r_3 > \mu$ sein, und es gilt, wie Herr J. ohne Beweis angiebt, der Satz.

Die Ordnung μ eines niedrigsten linearen Systems, bei dem $\mu < r_1+r_2+r_3$ ist, übersteigt für $p > 0$ den Wert $2p-2$ nicht, unterliegt jedoch keiner Beschränkung für $p = 0$. Daraus folgen, wie Herr J. angiebt, für $\mu < r_1+r_2+r_3$, zunächst Normaltypen von der Form

$$(C_\mu) \equiv [a^{2p-\beta} b_1^2 b_2^2 \dots b_{p-\beta}^2 c_1 c_2 \dots c_\gamma]_{\mu=2p+2-\beta},$$

bei denen man sich in bestimmten Richtungen b_1, b_2, ..., $b_{p-\beta}$, c_1, ..., c_γ mit a vereinigt denken muss; hierbei ist

$$\gamma \gtreqless \beta = 0, 1, 2, \dots, p-1$$

zu nehmen, jedoch der Fall $\beta = p-1$, $\gamma = 0$, in dem $\mu = r_1+r_2+r_3$ werden würde, auszuschliessen.

Hierzu kommen die aus jenen abgeleiteten Typen

$$(C_\mu) \equiv \begin{bmatrix} a^{2p-\beta} b_1^2 b_2^2 \dots, b_{p-\beta}^2 c_1 c_2 \dots c_\gamma \\ d_1 d_2 \dots d_{\gamma'} \end{bmatrix}_{\mu=2p+2-\beta}; \ \overline{a c_j d_j}$$

$$\gamma \leqq \gamma' \leqq \beta = 1, 2, \dots, p-1.$$

Auch hier hat man mit a alle Punkte b und c zu vereinigen, nun jedoch in verschiedenen Richtungen. Die Punkte d_1, ..., d_γ hat man auf den Zweigen ac_1, ac_2, ..., $ac_{\gamma'}$ anzunehmen und zwar so, dass mindestens ein Tripel ac_jd_j auf einer Geraden sich befindet. Herr J. gelangt so zu

$$\tfrac{1}{2}(p-1)(p+2)+\tfrac{1}{6}(p-1)p(p+1)$$

Normaltypen, bei denen $\mu < r_1 + r_2 + r_3$ ist. Für die Fälle $p = 1, \ldots, 4$ werden die Ergebnisse tabellarisch aufgeführt.

Im § 5 wird angegeben, dass die Anzahl D der veränderlichen Schnittpunkte zweier Curven eines linearen Systems vom Geschlecht 1 kleiner als $9 = 8p + s$, dagegen wenn $p > 1$ ist, kleiner als $6p + 2$ ist. E. K.

E. H. Moore. A problem suggested in the geometry of nets of curves and applied to the theory of six points having multiply perspective relations. American J. X. 243-257.

Der Herr Verfasser wendet die eindeutig umkehrbare quadratische Transformation auf die im Titel genannte Figur an, um zu neuen Sätzen zu gelangen. Hierbei benutzt er die Bemerkung, dass, wenn eine Figur, deren Punkte gewissen Bedingungen genügen, einer birationalen Transformation unterworfen wird, die Punkte der transformirten Figur ganz oder zum Teil von solchen Bedingungen befreit sind, wenn man von ihren Beziehungen zu den Fundamentalpunkten der Transformation absieht. T.

M. d'Ocagne. Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales. Lisboa J. (1888).

Man nehme in der Ebene einer ebenen Curve c willkürlich zwei feste Punkte O und P an, ferner einen auf der Curve beweglichen Punkt M; durch den Punkt P ziehe man parallel zur Normale der Curve c in M eine Gerade. Der Schnittpunkt H dieser Geraden mit OM beschreibt eine Curve n, deren Eigenschaften Herr d'Ocagne ermittelt. Hierauf löst er die folgende Aufgabe: Die Curve n sei eine Gerade oder ein Kreis, alle zugehörigen Curven c zu finden. Vertauscht man in der Definition der Curven n die durch den Punkt P zu den Normalen der Curve c gezogenen Parallelen mit Parallelen zu ihren Tangenten, so erhält man eine andere Curve t. Auch diese untersucht der Verfasser und beantwortet in Bezug auf sie dieselben Fragen wie bei den Curven n. Tx. (Lp.)

Fr. Machovec. Beiträge zur Construction der Tangenten und der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven. Prag. Ber. 169-181.

Der Verfasser behandelt folgende Aufgaben:

1) Es sind die Krümmungsmittelpunkte einer ebenen Curve *B* zu finden, welche mit einer Curve *A*, deren Elemente als gegeben vorausgesetzt sind, affin oder collinear verwandt ist.

2) Es sind die Tangenten und die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen zu finden, welche die Punkte einer Ebene beschreiben, die sich in einer festen Ebene auf beliebige Weise bewegt.

3) Es sind die Punkte und die Krümmungsmittelpunkte der Enveloppe einer beliebigen Curve der Ebene zu finden, welche die in 2) charakterisirte Bewegung hat.

In 2) und 3) wird die bewegliche Ebene so geleitet, dass die Endpunkte *a* und *b* einer starren Strecke auf zwei beliebigen Curven *A* und *B* gleiten. Die von dem Verfasser angewandte Methode zur Behandlung dieser Aufgaben besteht im wesentlichen darin, dass er die Curven *A* und *B* als orthogonale Projectionen zweier anderen Curven im Raum auffasst, die in einer bestimmten Beziehung zu einander stehen. Aus der bestimmten räumlichen Verbindung dieser Curven werden Rückschlüsse gemacht, die zur Lösung der gestellten Aufgaben führen.

Schn.

A. Mannheim. Applications de géométrie cinématique. Prag. Ber. 87-92.

Wenn von einem Punkte einer Kreisbahn zwei Punkte zugleich auslaufen, sich in gleichem Sinne bewegen, der eine Punkt *a* aber die doppelte Geschwindigkeit hat, als der andere Punkt *b*, so umhüllt die Sehne *ab* eine Curve. Es wird der Berührungspunkt für eine beliebige Lage der Sehne construirt und der Krümmungsmittelpunkt in diesem Punkte angegeben. Mit der Sehne *ab* durchläuft der Pol dieser Sehne eine Curve. Die Normale derselben wird construirt und ihr Krümmungsmittelpunkt ermittelt.

Schn.

D. Montesano. Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 207-215, 277-285.

Zwischen zwei dreidimensionalen Räumen findet bekanntlich eine eindeutige involutorische Verwandtschaft T statt, wenn ein Punkt denselben entsprechenden Punkt in jedem der zwei Räume hat. Die Geraden, welche die Punktepaare (d. h. die Paare entsprechender Punkte) verbinden, bilden einen Complex Γ, von welchem jeder Strahl im allgemeinen nur ein Punktepaar enthält. Herr M. hat sich die Aufgabe gestellt, alle Transformationen T zu bestimmen, deren Complex Γ linear ist.

Um diese Aufgabe zu lösen, fängt er mit der Bemerkung an, dass in diesem Fall der Ort der Strahlen von Γ, welche einer beliebigen Geraden r begegnen, eine Fläche vierter Ordnung k_4 ist. Alle Flächen k_4 bilden ein System, welches in ein-eindeutiger Beziehung mit dem aus den linearen Congruenzen gebildeten steht. Einem Congruenzenbüschel entspricht ein Flächenbüschel, dessen Grundcurve aus der (einfachen oder zusammengesetzten) Fundamentalcurve von T nebst dem Ort der Punktepaare auf der Geraden der Regelschar besteht, welche Träger des Congruenzenbüschels ist. Diese letzte Curve hat die Ordnung 6, das Geschlecht 3 und ist in einer quadratischen Fläche enthalten; die erstere aber hat die Ordnung 10 und, falls sie unzerlegbar ist, das Geschlecht 11.

Umgekehrt kann man mittels dieser zwei Curven auf folgende Weise eine Transformation T der genannten Art construiren. Ist C_{10} eine eigentliche oder zerlegbare Curve, durch welche ein Büschel von Flächen vierter Ordnung geht, dessen übrige Grundcurve eine C_6 ist, welche das Geschlecht 3 hat und in einem durch keinen Teil von C_{10} gehenden Hyperboloid enthalten ist (oder kürzer, welche durch jede Ebene in zehn Punkten einer Curve dritter Ordnung geschnitten wird), so gehen durch sie ∞^4 biquadratische Regelflächen. Die drei derselben, welche durch einen beliebigen Punkt P gehen, gehen auch durch einen anderen Punkt P'; P' entspricht dem Punkt in einer eindeutigen involutorischen Verwandtschaft T der oben angegebenen Art.

Diese Transformation ist im allgemeinen elften Grades; die Fläche Φ elfter Ordnung, welche einer Ebene entspricht, hat C_{10} als dreifache Curve und die singulären Strahlen der Transformation (d. h. die Geraden, von denen zwei beliebige Punkte als entsprechend angesehen werden können) als einfache Geraden. Die Zahl der singulären Strahlen ist im allgemeinen 20. Es kann geschehen, dass C_{10} aus verschiedenen Teilen besteht und ∞^1 vierfach schneidende Geraden besitzt: die Fläche, welche diese bilden, ist dann ein Teil jeder Fläche Φ, und die Ordnung der Transformation wird infolge dessen vermindert. Und es ist eben die Ermittelung der verschiedenen Fälle, in welchen die Zerlegung von C_{10} stattfinden kann, welche einen grossen Teil des Montesano'schen Aufsatzes füllt. Hierdurch gelangt der Verf. dazu, alle eindeutigen involutorischen Verwandtschaften zu bestimmen, deren Punktepaare auf den Strahlen eines linearen Complexes liegen. La.

D. Montesano. Sulle reciprocità birazionali dello spazio. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 583-590.

Zwischen zwei gewöhnlichen Räumen S und Σ besteht eine „birationale Reciprocität“, wenn jedem Punkte von S eine Ebene von Σ entspricht, und umgekehrt; sind insbesondere zwei beliebige entsprechende Elemente incident, so hat man eine birationale Nullreciprocität oder ein birationales Nullsystem höherer Ordnung. Herr Sturm (Math. Ann. XIX) und Herr Ameseder (Wiener Sitzungsberichte LXXXIII, J. für Math. XCVII) haben schon derartige Verwandtschaften zweiter und dritter Ordnung aufgefunden; Herr Montesano will in dem in Frage stehenden Aufsatze beweisen, dass es deren unendlich viele giebt. Zu diesem Zwecke bemerkt er, dass das Product einer birationalen Nullreciprocität mit einem gewöhnlichen Nullsystem eine eindeutige involutorische Raumtransformation ist, deren Punktepaare auf den Strahlen des linearen Complexes liegen, welcher mit dem Nullsystem verbunden ist; umgekehrt ist jede durch jene Eigenschaft charakterisirte eindeutige involutorische Verwandtschaft, combinirt mit dem Nullsystem, welches ihr lineares

System bestimmt, eine birationale Nullreciprocität. Jede der genannten eindeutigen involutorischen Transformationen (vgl. das obige Referat) erzeugt daher eine birationale Nullreciprocität, und die Bestimmung dieser ist auf die jener zurückgeführt. Indem der Verf. diese ebenso interessanten wie einfachen Sätze anwendet, erhält er einige birationale Nullsysteme, bei denen die Flächen von S, welche dem Ebenenbündel von Σ entsprechen, die charakteristische Eigenschaft haben, in einem einzigen veränderlichen Punkte durch die Strahlen einer bestimmten linearen Congruenz geschnitten zu werden. La.

F. Aschieri. Del legame fra la teoria dei complessi di rette e quelle delle corrispondenze univoche e multiple dello spazio. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 216-226, 285-298, 446-449.

Von dieser Abhandlung soll nur der erste Teil analysirt werden; sein Gegenstand ist eine besondere Abbildung der Geraden auf die Punktepaare, welche mit einem gegebenen Punkte in gerader Linie liegen. Σ_3 sei das System der ∞^3 Strahlenbüschel, von denen jeder einen Strahl besitzt, der einem gegebenen („fundamentalen") Strahlenbüschel (O sei sein Mittelpunkt und ω seine Ebene) angehört. Wir nehmen einen Punkt S_1 willkürlich im Raume an und setzen eine projective Verwandtschaft fest zwischen dem Punktfeld, von welchem ω der Träger ist, und dem Strahlenbündel, von welchem S_1 der Mittelpunkt ist; dem fundamentalen Büschel wird dann ein projectiver Ebenenbüschel entsprechen, von welchem o die Axe sei. Wir nehmen einen Punkt S_2 auf o willkürlich an und setzen zwischen den Bündeln O und S_2 eine dualistische Verwandtschaft fest, welche der Bedingung unterliegt, dass dem fundamentalen Büschel, im Bündel O betrachtet, im Bündel S_2 derselbe Ebenenbüschel entspreche, welcher ihm in der Verwandtschaft zwischen S_1 und O entspricht. Dies vorausgesetzt, sei M' ein beliebiger Raumpunkt; der Geraden $M'S_1$ entspricht in ω ein Punkt M, der auf dem Strahle des fundamentalen Büschels steht, welcher der Ebene $M'o$

in der Verwandtschaft zwischen ω und S_1 entspricht; der Geraden $M'S_2$ entspricht in O eine Ebene μ, welche durch den Strahl des fundamentalen Büschels geht, der der Ebene $M'o$ in der Verwandtschaft zwischen O und S_2 entspricht. Nach den gemachten Voraussetzungen fallen aber die zwei genannten Strahlen des fundamentalen Büschels zusammen; folglich sind M und μ Mittelpunkt und Ebene eines Büschels des Systems Σ_3: jeder Raumpunkt führt zu einem derselben. Sind umgekehrt M und μ Mittelpunkt und Ebene eines Büschels des Systems Σ_3, so fällt M in ω und geht μ durch O; man bestimme den dem M entsprechenden Strahl von S_1 und den der μ entsprechenden Strahl von S_2; diese zwei Strahlen liegen in der Ebene des Büschels o, welche dem Strahle $OM \equiv \omega\mu$ des fundamentalen Büschels entspricht, und schneiden sich in einem bestimmten Punkte M': jeder Büschel von Σ_3 führt zu einem Raumpunkte. Infolge dessen hat man eine eindeutige Verwandtschaft zwischen dem System Σ_3 und dem Punktraum, welche vom Verf. schon in einer früheren Arbeit gebraucht worden war (vgl. F. d. M. XIII. 1881. 654). Im ersten Paragraphen der gegenwärtigen werden ihre wichtigsten Eigenschaften angedeutet; der Verf. beschäftigt sich besonders mit den Beziehungen, welche zwischen einer Curve oder Fläche des Raumes und der entsprechenden Congruenz oder dem entsprechenden Complex bestehen, ohne jedoch die singulären Elemente der Abbildung vollständig zu bestimmen. Nehmen wir jetzt auf ω einen zweiten Punkt O^* an und im Raume einen beliebigen Punkt S_2^*. Wie wir mit Hülfe der Bündel S_1 und S_2 die Büschel des durch O und ω bestimmten Systems Σ_3 auf den Punktraum abgebildet haben, so können wir mit Hülfe der Bündel S_1 und S_2^* mit den Bündeln des durch O^* und ω bestimmten Systems Σ_3^* verfahren. Ist nun m' eine beliebige Gerade, so gehört sie einem bestimmten Büschel des Systems Σ_3 an (demjenigen, von welchem $m'\omega$ der Mittelpunkt und $m'O$ die Ebene ist) und einem bestimmten des Systems Σ_3^*. Diese zwei Büschel werden durch zwei Punkte M' und M'^* abgebildet, welche mit S_1 in gerader Linie liegen; daher entsprechen jeder Geraden des Raumes zwei Punkte, welche mit S_1 in gerader Linie liegen.

Es ist leicht einzusehen, dass umgekehrt durch jedes Punktepaar solcher Art überhaupt eine gerade Linie bestimmt wird, und daraus lässt sich die Folgerung ziehen, dass die angegebenen Constructionen zu einer eindeutigen Abbildung der Geraden auf die in geraden Linien mit S_1 befindlichen Punktepaare führen. Insbesondere: es giebt ∞^3 Geraden, deren jede durch zwei zusammenfallende Punkte abgebildet wird; sie bilden einen linearen Complex, von welchem man auf diese Weise die bekannte Abbildung auf den Punktraum erhält.

Der Verf. studirt im zweiten Paragraphen seiner Abhandlung die Verwandtschaft zwischen den Geraden m' und den Punktepaaren $M'M'^*$. Da es uns unmöglich ist, seine Resultate in wenigen Worten zu wiederholen, so beschränken wir uns auf die Bemerkung, dass, wenn m' einen Complex beschreibt, und man eins der Elemente des Punktepaares $M'M'^*$ willkürlich nimmt (z. B. M'), man für das andere (M'^*) eine bestimmte Zahl von Lagen angeben kann, so dass das Paar $M'M'^*$ eine Complexgerade darstellt; so wird eine (im allgemeinen mehrdeutige) Verwandtschaft zwischen M' und M'^* erzeugt, deren Theorie mit der Theorie des Complexes verbunden ist; ist der Complex linear, so kommt man zu einer quadratischen Raumtransformation, deren Studium den Inhalt des § 3 bildet. La.

G. Lazzeri. Sopra certi sistemi di linee e di superficie. Palermo Rend. II. 110-115.

Man habe in einer Ebene n Punkte und $n+2$ Geraden. Durch alle gegebenen Punkte geht eine bestimmte Curve n^{ter} Ordnung C, welche dem vollständigen $(n+1)$-Seit umgeschrieben ist, dessen Seiten $n+1$ der gegebenen Geraden sind. Betrachtet man nach und nach die $n+2$ $(n+1)$-Seite, welche man aus den gegebenen Geraden zusammensetzen kann, so erhält man ebenso viele Curven n^{ter} Ordnung, welche nicht nur durch die gegebenen Punkte, sondern auch durch andere $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte gehen. Setzt man voraus, dass $n=2$ sei und dass die gegebenen Punkte die unendlich fernen Kreispunkte seien, so erhält man den wohlbekannten (aber nicht von Clifford entdeckten, wie der

Verf. glaubt, weil Clifford selbst ihn „well known" nennt, S. 51 seiner Mathematical Papers) Lehrsatz: Die vier Kreise, welche den Dreiecken umgeschrieben sind, welche vier Geraden bestimmen, gehen durch denselben Punkt.

Um diese Resultate auf den Raum auszudehnen, setzt der Verf. voraus, dass eine ebene Curve n^{ter} Ordnung Γ_n und $n+3$ Ebenen in allgemeiner Lage gegeben seien. Schliesst man eine der gegebenen Ebenen aus, so erhält man ein vollkommenes $(n+2)$-Flach, welchem eine Fläche n^{ter} Ordnung S umgeschrieben ist, die durch Γ_n geht; schliesst man der Reihe nach jede der gegebenen Ebenen aus, so erhält man im ganzen $n+3$ Flächen S, unter denen merkwürdige Beziehungen bestehen; einige derselben werden vom Verf. bewiesen.

Allgemeiner kann man voraussetzen, dass neben der Curve Γ_n noch $n+2+p$ Ebenen gegeben seien; dadurch werden $\binom{n+2+p}{n+2}$ Flächen S bestimmt, die ein allgemeineres System bilden als das vorige. Ist z. B. $n=2$, so entsteht auf diese Weise ein schönes System von $\binom{p+4}{4}$ Flächen zweiter Ordnung; diese gehen durch denselben Kegelschnitt und sind den Tetraedern umgeschrieben, welche $p+4$ beliebige Ebenen bilden. Erwähnenswert ist der Fall, in welchem der gegebene Kegelschnitt der unendlich ferne Kugelkreis ist, weil dann die Flächen S Kugeln sind. La.

K. Küpper. Zur Theorie der ebenen und Raumcurven. Die Curven C^{2n}, C^{2n+1} vom Maximalgeschlecht [bezw. $(n-1)^2$, $n(n-1)$] mit Doppelpunkten. Prag. Ber. 265-277.

Herr Küpper bezeichnet als „C^{2n}, bezw. C^{2n+1} vom Maximalgeschlecht" solche Curven $2n^{\text{ter}}$, bezw. $(2n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche zu Doppelpunkten die Schnittpunkte einer C^n mit einer C^{n-1} oder die Grundpunkte eines Büschels von C^n besitzen. Mit Hülfe von gruppentheoretischen Entwickelungen, deren Einzelheiten sich nicht kurz wiedergeben lassen, untersucht Herr Küpper, welche Mannigfaltigkeiten von C^{2n} bezw. C^{2n+1} durch ge-

gebene $n(n-1)$ bezw. n^2 Doppelpunkte hindurch gehen. Die normale Mannigfaltigkeit würde negativ sein. In Wahrheit aber ist die der C^4 gleich 8, die der C^ν, sobald $\nu > 4$ ist, gleich 9. Für die C^{2n+1} wird dies Resultat auch mit Hülfe der projectivischen Erzeugung gewonnen. Dieselbe kann durch den Büschel der C^n und einen Büschel von C^{n+1} erzeugt werden, dessen Basis ausser den Grundpunkten des ersteren noch vier beliebige andere Punkte der C^{2n+1} enthält. Der allgemeine Hülfssatz, welcher in Frage kommt, dass ein bestimmter Büschel (B) eines Netzes zweiter Stufe durch fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 solche Curven sendet, dass

$$B(1, 2, 3, 4, 5) \overline{\wedge}\, \tau_1\, \tau_2\, \tau_3\, \tau_4\, \tau_5$$

ist, wo die τ beliebige Strahlen eines Bündels sind, wird von Herrn Küpper nochmals bewiesen. E. K.

A. Kneser. Synthetische Untersuchungen über die Schmiegungsebenen beliebiger Raumcurven und die Realitätsverhältnisse specieller Kegelschnittsysteme. Math. Ann. XXXI. 507-548.

Herr Kneser beschäftigt sich mit Systemen von Kegelschnitten, die zwei feste Punkte enthalten und eine vorliegende Curve L osculiren. Es erhebt sich die Frage nach der Anzahl der reellen Kegelschnitte des Systems, die einen gegebenen Punkt W enthalten. Sind die festen Punkte imaginär, so kann man sich auf den Fall der unendlich fernen Kreispunkte beschränken, und indem man eine stereographische Projection anwendet, die Frage auf die andere zurückführen: Wie viele Schmiegungsebenen einer sphärischen Curve gehen durch einen gegebenen Punkt der sie tragenden Kugeloberfläche? Sind im anderen Falle O_1 und O_2 die beiden reellen Punkte, so kann man die Curve von einem Punkte O aus auf ein die Geraden OO_1 und OO_2 enthaltendes Hyperboloid projiciren. Es handelt sich alsdann offenbar um die Zahl der Schmiegungsebenen, die von einem Punkte des Hyperboloids aus an die entstandene Curve sich legen lassen. Hiermit ist die Frage nach der Ver-

teilung der Schmiegungsebenen einer Raumcurve allgemein aufgeworfen.

Nach einer Reihe behutsamer Betrachtungen gewinnt Herr Kneser den Hauptsatz (§ 5), dass, wenn in einem nicht singulären Punkt S einer Raumcurve eine dieselbe enthaltende Fläche die Schmiegungsebene nicht zur Tangentialebene hat, sich von den S benachbarten Flächenpunkten aus je nur eine Schmiegungsebene an den S benachbarten Teil der Raumcurve legen lässt. Berührt dagegen die Fläche die Schmiegungsebene, so enthält sie Punkte, von denen aus an jedes noch so kleine S enthaltende Curvenstück drei Schmiegungsebenen gehen. Sie muss aber in diesem Fall um S herum sattelförmig sein. Daraus folgt, dass auf jeder sphärischen Curve aufeinander folgende Schmiegungsebenen sich ausserhalb der Kugel schneiden, wenn es sich um einen nicht singulären Punkt handelt; die zugehörigen Krümmungskreise begegnen sich nicht. Hieraus folgt, dass, wenn längs eines ebenen Bogens die Krümmung stetig abnimmt, jeder folgende Krümmungskreis sich um alle vorangegangenen ganz herumlegt, und dass diese Kreise den ringförmigen Ebenenteil zwischen der Anfangs- und Endlage einmal ganz überdecken. Indem er die möglichen Grenzlagen des Krümmungskreises einer Curve einzeln in Betracht zieht, gewinnt Herr Kneser den Satz (§ 10): Verändert sich an einer stetigen geschlossenen Curve mit $\mathfrak{w}$ Wendetangenten und $\mathfrak{a}$ gewöhnlichen Asymptoten der Krümmungskreis stetig, wird er nur unendlich gross, wenn der Osculationspunkt sich einem Wendepunkt oder der Unendlichkeit nähert, wird der Kreis schliesslich nur endlich oft ein Maximum- oder Minimumkreis, so gehen durch einen Punkt, der im Innern von $\mathfrak{m}$ Maximum- und $\mathfrak{n}$ Minimumkreisen liegt, $\mathfrak{a}+\mathfrak{w}+2\mathfrak{m}-2\mathfrak{n}$ Krümmungskreise (§ 10).

Auf einschaligen Hyperboloiden werden vorzüglich geschlossene Curven dritter Ordnung (im allgemeinsten Sinne) betrachtet. An eine solche Curve gehen (§ 4) von irgend einem Punkte aus eine oder drei Schmiegungsebenen. Die Geraden der einen Schar werden die Curve in einzelnen Punkten treffen, die der anderen zum einen Teil überhaupt nicht, zum anderen Teil in

Punktepaaren. Eine Schmiegungsebene der Curve berührt nun das Hyperboloid dann und nur dann, wenn in dem Schmiegungspunkt die Curve von einer Geraden der zweiten Schar berührt wird. Sind in der zweiten Schar überhaupt keine Tangenten vorhanden, so dass jede Gerade derselben in zwei reellen Punkten schneidet, so geht von irgend einem Punkte aus eine Schmiegungsebene an die Curve; im zweiten Falle sendet ein Punkt eine oder drei reelle Schmiegungsebenen aus, je nachdem seine Gerade der zweiten Schar die Curve in reellen Punkten trifft oder nicht. Der interessanteste Specialfall ist der einer in zwei unpaare Züge der betrachteten Art zerfallenden Raumcurve vierter Ordnung. Die Geraden der einen Schar treffen jeden der beiden Züge je einmal, eine Gerade der anderen Schar aber trifft höchstens eine der beiden Curven und alsdann in zwei Punkten. Durch vier bestimmte Geraden dieser Schar wird also das ganze Hyperboloid in vier Streifen zerlegt, von denen zwei nicht an einander stossende die beiden Züge vollständig enthalten. Wird nun der Hülfssatz angerufen, dass durch jeden Raumpunkt ein die Curve enthaltendes einschaliges Hyperboloid hindurchgeht, so folgt, dass von ihm aus entweder vier oder sechs Schmiegungsebenen an die Curve sich legen lassen.

Von der Eingangs erwähnten Aufgabe erhält man nun Lösungen in dem Falle, wo L ein Kegelschnitt ist, dem einer von den beiden Punkten, O_1, angehört, und in dem Falle, wo L eine zweiteilige Curve dritter Ordnung ist, während O_2 dem paaren, O_1 dem unpaaren Zuge angehört. Die Zahl der durch einen Punkt W gehenden osculirenden Kegelschnitte ist gleich 1, bezw. 4, wenn er, von O_1 aus gesehen, scheinbar der Curve angehört, hingegen gleich 3 bezw. 6, wenn dies nicht der Fall ist (§ 13).

Im allgemeinen Fall vermehrt bezw. vermindert sich die Zahl der einen Punkt W enthaltenden Kegelschnitte um 2, wenn er, von O_1 oder O_2 aus betrachtet, scheinbar die Curve L verlässt, oder sie betritt. Doch kommt hier auch noch in Betracht, ob der Punkt die Kontur eines vierpunktig berührenden System-Kegelschnittes überschreitet. Herr Kneser behandelt als Beispiel

den Fall, wo die beiden Punkte innerhalb eines Kegelschnittes L liegen. In diesem Falle giebt es zwei nur in O_1 und O_2 sich begegnende Kegelschnitte, die L vierpunktig berühren. Liegt W innerhalb oder ausserhalb beider Kegelschnitte, so gehen durch ihn zwei osculirende Kegelschnitte des Systems, für jede andere Lage dagegen überhaupt keine. E. K.

D. Montesano. Su una famiglia di superficie omaloidiche. Palermo Rend. II. 131-134.

Jede Fläche Φ_n des Systems soll auf einen Ebenen-Bündel, dessen Centrum auf ihr liegt, perspectivisch bezogen sein. Wird die Beziehung des Punktraums auf den Ebenen-Raum mit Hülfe eines birationalen Nullsystems bewirkt, so gehören den Punkten des letzteren die Flächen eines Systems von der betrachteten Art zu. Mit Hülfe eines Nullsystems Γ kann man die Fläche auf diejenige Ebene ω abbilden, welche dem Punkt O in Γ entspricht. Hierbei gehört jeder ebenen Curve von Φ_n eine Curve n^{ter} Ordnung zu. Aus der näheren Betrachtung dieser Abbildung schliesst Herr Montesano den Satz.

Die auf den Kegeln n^{ter} Klasse eines Netzes entstehenden Gruppen seien von der n^{ten} Ordnung; eine von ihnen enthalte $n-1$ Ebenen, die durch eine Gerade ϱ gehen. Bezieht man einen den Büschel ϱ enthaltenden Bündel so collinear auf das Netz, dass jeder durch ϱ hindurchgehenden Ebene der Kegel entspricht, welcher sie und die ausgezeichnete Gruppe berührt, so entsteht ausser einem Kegel n^{ter} Ordnung die allgemeinste Fläche von der betrachteten Art.

Jeder Punkt liegt mit seinem Bilde auf einem Leitstrahl des Nullsystems Γ. Herr Montesano giebt für das aus ihnen bestehende Strahlensystem einige Anzahlen. E. K.

J. Hadamard. Recherches de surfaces anallagmatiques par rapport à une infinité de pôles d'inversion. Darboux Bull. (2) XII. 118-121.

Geht eine Fläche durch Inversionen, deren Pole die Punkte einer Curve sind, in sich selbst über, so entsprechen einem beliebigen Punkte a derselben bezüglich der verschiedenen Pole die Punkte einer Curve λ. In λ und a wird die Fläche von einer Kugel S berührt, von der projective Eigenschaften angedeutet werden. Js.

Reyes y Prosper. Sur les propriétés graphiques des figures centriques. Math. Ann. XXXII. 157-158. W. St.

B. Besondere ebene Gebilde.

L. Certo. Sull' n-agono inscritto isoclino in un n-agono piano semplice dato. Batt. G. XXVI. 46-60.

Herr Certo knüpft an die von Steiner behandelte Aufgabe an, einem gegebenen n-Eck ein anderes isoklines einzuschreiben, dessen Seiten nämlich gegen die des gegebenen paarweise gleich geneigt sind. Bei ungeradem n giebt es stets ein isoklin eingeschriebenes Polygon, bei geradem n entweder überhaupt keines oder unendlich viele eingeschriebene Polygone, letzteres, wie Steiner gezeigt hat und Herr Certo später bestätigt, wenn die an den ungeradzahligen Ecken des gegebenen Polygons liegenden Winkel dieselbe Summe ergeben, wie die anderen Winkel.

Herr Certo nimmt das Problem im § 2 in folgender Weise in Angriff: Ist $a_1 a_2 \dots a_n$ das gegebene Polygon, so spiegele man eine beliebige Gerade r'_n an a_1, das Bild an a_2, das Bild an a_3 u. s. w., bis man zuletzt durch Spiegelung an a_n zu r''_n gelangt. Für ein isoklin eingeschriebenes Polygon fällt r'_n mit r''_n zusammen. Die Ebenen der r'_n mit r''_n können nun durch Drehung und Verschiebung für ungerades n in symmetrische Lage, für gerades n in Coincidenz gebracht werden. Im ersten Fall existirt

folglich, da von den gemeinsamen Geraden der Ebenen zwei mit der unendlich fernen Geraden sich decken, eine gemeinsame Gerade im Endlichen. Für gerades n existirt im allgemeinen überhaupt keine Doppelgerade ausser der unendlich fernen, im speciellen Fall aber, wenn die obige Bedingung erfüllt ist, entspricht jeder Strahl in einer bestimmten Richtung sich selbst und ist Seite eines isoklinen Polygons. Die Verbindungslinie eines Punktes mit seinem n^{ten} Spiegelbilde ist eine solche Gerade. Im ersten Fall halbirt die gesuchte Gerade die Strecken zwischen den gegebenen Punkten und ihren n^{ten} Spiegelbildern.

Wenn ein isoklin eingeschriebenes Polygon ganz im Innern eines gegebenen Polygons verläuft, so hat es unter allen überhaupt eingeschriebenen Polygonen den kleinstmöglichen Umfang. Ist bei geradem n die oben erwähnte Bedingung nicht erfüllt, oder liegt überhaupt das isokline Polygon nicht ganz im Innern des gegebenen, so tritt der kleinste Umfang bei einem ausgearteten Polygon ein. Die auch schon von Herrn Sturm behandelte Frage wird in den Abschnitten III und IV näher untersucht. (Vgl. den Bericht F. d. M. XIX. 1887. 534).

E. K.

A. Breuer. Constructive Geometrie der Kegelschnitte auf Grund der Focaleigenschaften.. Eisenach. Bacmeister. 110 S. gr. 8°.

Die überaus grosse Literatur über diesen Gegenstand glaubt der Herr Verfasser noch bereichern zu sollen, um durch eine einheitlichere Darstellung die gegenseitige Verwandtschaft dieser Curven mehr zur Geltung zu bringen. Referent ist der Ansicht, dass die übliche Behandlungsweise, welche der gesonderten Entwickelung der Eigenschaften der einzelnen Kegelschnittarten erst die der gemeinsamen Eigenschaften folgen lässt, für den Lernenden mehr Reiz besitzt. Die Darstellung ist eine sehr ausführliche; die zahlreichen Figuren zeichnen sich durch Correctheit und Klarheit aus.

T.

Fr. Faber. Planimetrische Erörterungen. Pr. Gymn. Lauban. 26 S. 4°.

Der Verfasser geht aus von der Definition eines Kegelschnitts als geometrischen Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch einen gegebenen Punkt hindurchgeht und einen gegebenen Kreis berührt. Aus dieser Definition werden auf elementar-geometrischem Wege die Eigenschaften der Parabel, Ellipse und Hyperbel hergeleitet. F.

H. Schröter. Ein Satz über das dem Kegelschnitt umschriebene Siebeneck. Schlömilch Z. XXXIII. 374-375.

Dem Brianchon'schen Satze für das einem Kegelschnitt umbeschriebene Sechseck schliesst sich ein Satz über das umbeschriebene Achteck an, den Herr Hurwitz aus der Betrachtung eines auf dem einfachen Hyperboloid verlaufenden geradlinigen räumlichen Achtecks durch perspective Projection (Vgl. Schröter's Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung u. s. w., S. 121) gewann. Ein zweiter Beweis wird hier vom Verfasser dadurch geliefert, dass er die vier Geraden 12, 34, 56, 78 eines aus den acht Punkten 1 bis 8 bestehenden, einem Kegelschnitt umbeschriebenen Achtecks als Curve vierter Ordnung betrachtet, und ebenso die vier Geraden 23, 45, 67, 81. Beide Curven vierter Ordnung schneiden sich in 16 Punkten, und jede neue Curve vierter Ordnung die durch 13 dieser Punkte hindurchgeht, muss auch die drei übrigen enthalten. Nun liegen acht von diesen Punkten, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 auf einem Kegelschnitt. Folglich müssen die übrigen acht auch auf einem solchen liegen. Dies sind aber die Ecken desjenigen Achtecks, dessen aufeinander folgende Seiten 12, 45, 78, 23, 56, 81, 34, 67 sind. Weder auf diese Weise, noch durch Projection lässt sich ein wohl noch nicht bemerkter Satz über das einem Kegelschnitt umbeschriebene Siebeneck ableiten. Dieser von Herrn Schröter angegebene Satz lautet: Berühren die Seiten 12, 23, 34, 45, 56, 67, 71 eines einfachen Siebenecks 1 2 3 4 5 6 7 einen Kegelschnitt, so bilden die

Diagonalen desselben, in der Reihenfolge genommen:

14, 25, 36, 47, 51, 62, 73,

ein neues einfaches Siebeneck, welches einem zweiten Kegelschnitt einbeschrieben ist. Scht.

K. Schober. Zur Construction der Kegelschnittslinien. Hoppe Arch. (2) VII. 99-101.

Ist von einem Kegelschnitt ein Paar conjugirter Durchmesser gegeben, so kennt man acht seiner Punkte; mit Hülfe des Pascal'schen Satzes kann man aber schon aus fünf Punkten beliebig viele andere und die Tangenten in ihnen finden; die bekannte Construction lässt sich im vorliegenden Fall auf eine geringe Zahl von Linien reduciren. R. M.

Weill. Applications des propriétés projectives des coniques. Nouv. Ann. (3) VII. 429-430.

Zwei Kegelschnitte mögen durch die Punkte A, B, C, D gehen und eine Gerade in H resp. in K berühren; ein dritter Kegelschnitt durch A, B, C, D möge diese Gerade in P und Q treffen; dann sind bekanntlich H, K, P, Q harmonische Punkte, und H und K conjugirt. Diesem Satz wird nach dem Princip der Dualität der entsprechende gegenübergestellt, und letzterer dann auf besondere Fälle angewandt. Ebenso werden auch Sätze über conjugirte, ein- und umgeschriebene Dreiecke angewandt.

Mz.

A. Renon. Solution de la question 1567. Nouv. Ann. (3) VII. 104-105.

Es handelt sich um den Ort für die Brennpunkte eines Kegelschnitts, welcher einem Viereck eingeschrieben ist, dessen Seiten zwei andere Kegelschnitte mit festen Brennpunkten berühren. Lg.

Delassus. Une application des transversales réciproques. Journ. de Math. spéc. (3) II. 3-4.

Beweis eines Laguerre'schen Satzes über die Kegelschnitte aus den Nouv. Ann. vom Jahre 1880 p. 144, No. 1341.

Lp.

H. Kiehl. Die durch drei ähnliche Punktreihen erzeugten Dreiecke und Kegelschnitte. Pr. Realgymn. Bromberg. 14 S.

Der Brocard'sche Kreis hat zu Endpunkten eines Durchmessers den Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks ABC und den Grebe'schen Punkt K desselben, den Gegenwinkelpunkt seines Schwerpunktes. Ein grosser Teil der mit ihm in Verbindung stehenden Eigenschaften bleibt aber, wie Herr Kiehl zeigt, erhalten, wenn ein beliebiger Punkt P für K eintritt. Es seien A_0, B_0, C_0 die Mitten der Seiten BC, CA, AB, ferner F_a, F_b, F_c die von P verschiedenen Schnittpunkte des neuen Kreises mit PA, PB, PC. Alsdann werden die Parabeln mit den Tangentenpaaren

$$HB_0 \text{ u. } HC_0, \quad HC_0 \text{ u. } HA_0, \quad HA_0 \text{ u. } HB_0$$

und den Brennpunkten F_a, F_b, F_c der Reihe nach von B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 berührt, und es giebt unendlich viele Dreiecke, deren Ecken A_v, B_v, C_v auf HA_0, HB_0, HC_0 liegen, und deren Seiten B_vC_v, C_vA_v, A_vB_v die erwähnten Parabeln berühren. Das Verhältnis $A_0A_v : B_0B_v : C_0C_v$ ist das der trimetrischen Coordinaten von $P(p_a{:}p_b{:}p_c)$. Eines der Dreiecke, $A_1B_1C_1$, ist dem Kreise eingeschrieben. $A_vB_vC_v$ ist hinsichtlich P perspectivisch ähnlich zum Fusspunktendreieck eines Punktes V von PH. Solche Dreiecke, deren Punkte V der Umkreis harmonisch trennt, sind einander ähnlich. Die beiden allen drei Parabeln gemeinsamen Tangenten stehen auf einander senkrecht. Ihr Kreuzungspunkt Q zerlegt jedes Dreieck $A_vB_vC_v$ in Teildreiecke, deren Inhalte sich wie $\frac{a}{p_a} : \frac{b}{p_b} : \frac{c}{p_c}$ verhalten. Q liegt mit dem Gegenwinkelpunkt P_1 von P und dem Schwerpunkt S in einer Geraden, und es ist $SQ = \frac{1}{2}QP_1$; auch schneiden sich A_1F_a, B_1F_b, C_1F_c in Q.

Dreht man die Träger der erhaltenen Punktreihen mit gleicher Geschwindigkeit und in gleicher Richtung um A_0, B_0, C_0,

so erhält man drei Scharen confocaler Parabeln mit je einer gemeinsamen Tangente B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0. Auch jetzt teilt der Punkt Q die Dreiecke $A_0B_0C_0$ nach constanten Verhältnissen

$$\frac{a}{p_a}:\frac{b}{p_b}:\frac{c}{p_c}$$

und sendet an je drei zusammengehörige Parabeln gemeinsame Tangenten aus. Dieselben sind conjugirte Durchmesser eines Kegelschnittes, dessen Halbaxen-Quadrate sich verhalten wie die Abschnitte des durch P geteilten Durchmessers des Umkreises.

Als specielle Fälle dieser Parabelscharen charakterisiren sich diejenigen, welche die Herren Artzt und Brocard mit dem Dreieck in Verbindung gebracht haben. E. K.

M. d'Ocagne, Beyens, Bernard. Solution d'une question. Nouv. Ann. (3) VII. 442-447.

Es wird der Satz bewiesen: Sind TP und TQ Tangenten einer Parabel, die den Brennpunkt S hat, und trifft die Gerade TS den Kreis TPQ zum zweiten Male in L, so ist $TS = SL$.

Dies wird von jedem der drei Autoren rein geometrisch nachgewiesen. Auch finden sich einige Zusätze zu diesem Satz. Mz.

C. Gusserow. Die Ellipse als Normalprojection des Kreises. Hoffmann Z. XIX. 418-419.

Die angegebene Construction will die Schwierigkeiten vermeiden, welche die üblichen Darstellungsarten der Ellipse durch Projection beim Uebergang auf die Brennpunkte und die damit zusammenhängenden Sätze darbieten. Lg.

Farjon. Solution d'une question. Nouv. Ann. (3) VII. 348-350.

Um den Brennpunkt F' einer Ellipse beschreibe man einen Kreis. Von einem Punkte P_1 dieses Kreises lege man an die Ellipse eine Tangente, die den Kreis wieder in P_2 trifft; ebenso von P_2 eine Tangente P_2P_3 und von P_3 die Tangente P_3P_4. Man

soll die Grösse des Kreisradius durch die Bedingung bestimmen, dass P_4P_1 gleichfalls Tangente der Ellipse wird.

Durch geometrische Betrachtung wird für den gesuchten Radius R die Gleichung gefunden:

$$R^2 = 2(a^2+c^2),$$

wo $c^2 = a^2-b^2$ ist, und a, b bekannte Bedeutung haben.

Mz.

Jeřabek, J. Neuberg, Fuhrmann. Sur l'hyperbole inverse de la droite d'Euler. Mathesis VIII. 81-89, 115.

Vielseitige Untersuchung der gleichseitigen Hyperbel, welche durch die Ecken eines Dreiecks, das Umkreiscentrum, den Lemoine'schen Punkt, den Höhenschnitt geht. Mn. (Lp.)

P. Payet. Solution géométrique. Nouv. Ann. (3) VII. 325-331.

Es wird eine Schar von Kegelschnitten betrachtet, die alle einen Brennpunkt F gemein haben und durch zwei feste Punkte A und B gehen. Diese Kegelschnitte bilden zwei Systeme: Bei denen des einen Systems gehen die zu F gehörenden Leitlinien durch einen zwischen A und B auf AB liegenden Punkt; beim andern System durch einen auf AB gelegenen Punkt, der aber nicht zwischen A und B ist. Der Ort der Centra aller dieser Kegelschnitte setzt sich aus zwei confocalen Kegelschnitten zusammen. Hieran schliesst sich dann noch eine Discussion, je nachdem auf dem letztgenannten Orte ein Centrum C gewählt ist.

Mz.

M. Disteli. Die Steiner'schen Schliessungsprobleme nach darstellend geometrischer Methode. Mit 10 lithographirten Tafeln. Leipzig. Teubner. XII u. 124 S. 8°.

Verfasser leitet die Steiner'schen Polygone und Schliessungssätze für die ebenen Curven dritter und vierter Ordnung vom Geschlecht Eins auf darstellend geometrischem Wege ab, indem er diese Curven im Anschluss an Herrn Fiedler's bezügliche

Untersuchungen als Centralprojectionen der Raumcurve vierter Ordnung erster Art betrachtet, welche als Durchdringungscurve zweier Kegel zweiter Ordnung erhalten werden kann. Bei dieser Darstellungsweise ergeben sich die massgebenden Punktinvolutionen auf der Curve vom Geschlecht Eins aus entsprechenden Involutionen der Flächen des durch die zwei Kegel bestimmten Flächenbüschels zweiter Ordnung, dessen Regelflächen die Träger von reellen Steiner'schen Secantensystemen sind und zu den Steiner'schen Polygonen führen. Hk.

K. Cranz. Beitrag zur projectivischen Geometrie. Böklen Mitt. II. 143-152.

Nach einem von Steiner herrührenden Satze bestimmen die Tangente und Normale in einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts K mit den Hauptaxen desselben eine Parabel, welche die Normale im Krümmungsmittelpunkt berührt. Allgemeiner gehört zu einem beliebigen Punkte A in der Ebene von K ebenfalls eine bestimmte Parabel; zieht man nämlich durch A eine beliebige Gerade g und durch deren Pol die zu g senkrechte Gerade g_1, so umhüllt bei Drehung der Geraden g um A die Gerade g_1 eine Parabel, welche auch durch A geht und, wenn O der Mittelpunkt, F und F_1 die Brennpunkte von K, endlich B und B_1 die Berührungspunkte der Tangenten von A an K sind, AO zur Directrix und die Senkrechten auf AF in F, auf AF_1 in F_1, auf AB in B und auf AB_1 in B_1, ferner die Hauptaxen von K, sowie das Paar senkrechter Strahlen in dem involutorischen Strahlenbüschel A zu Tangenten hat (vgl. Steiner's Ges. W. II. 629; Pelz Prag. Ber. 1879 p. 205 ff. u. 1882 p. 3ff.; cf. F. d. M. XII. 1880. 473 ff. und XV. 1883. 538). Von dieser Parabel werden folgende weitere Eigenschaften abgeleitet: Die zu einem Punkte A in Bezug auf den Kegelschnitt K gehörige Parabel bleibt dieselbe für alle zu K confocalen Kegelschnitte K_1, und ebenso für irgend einen Kegelschnitt K_2, welcher einen beliebigen der K_1 doppelt berührt, falls die Berührungssehne die Polare von A in Bezug auf K_1 (und K_2) ist.

Diese Eigenschaften werden dann auch auf den Raum ausgedehnt, indem jeder beliebigen Geraden in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung in analoger Weise ein hyperbolisches Paraboloid zugeordnet ist, von dem ganz entsprechende Eigenschaften gelten. T.

A. Suini. Contribuzione alla teoria delle coniche.
Besso Per. mat. III. 65-69.

Durch Anwendung der Principien der Geometrie der Lage beweist der Verfasser die beiden Sätze:

I. Die Tangente und die Normale in einem Punkte M einer Ellipse oder einer Hyperbel und die Axen der Curve berühren eine bestimmte Parabel; dieselbe berührt die Normale in dem zu M gehörigen Krümmungsmittelpunkte. II. Die Tangente und die Normale in einem Punkte M einer Parabel und die Axe der Curve berühren eine bestimmte Parabel, welche die Axe der gegebenen Parabel zur Scheiteltangente hat, und welche die Normale in dem zu M gehörigen Krümmungsmittelpunkte berührt. Hieraus werden sehr einfache Constructionen für den Krümmungsmittelpunkt in einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts gefolgert. La. (Lp.)

Cl. Servais. Sur la courbure dans les coniques.
Nouv. Ann. (3) VII. 369-374.

Aus der Transformation von Hirst für den besondern Fall, wo der Fundamentalkegelschnitt ein Kreis und der Pol ein Punkt auf diesem ist, wird der Satz abgeleitet: Beschreibt man im Punkte A eines Kegelschnitts einen berührenden Kreis, dessen Radius gleich dem Durchmesser des Krümmungskreises ist, und zieht verschiedene Secanten, welche den Kegelschnitt und den Kreis in B und C schneiden, so ist der Ort des durch $(ABCD) = -1$ bestimmten Punktes D eine Gerade parallel der Krümmungssehne. Im weitern Verfolge ergeben sich noch sechs neue Sätze über die Krümmung der Kegelschnitte. H.

A. MANNHEIM. Construire le centre de courbure de la développée d'une conique. Böklen Mitt. II. 133-135.

Alle Kegelschnitte, welche einen Kegelschnitt C in zwei Punkten m und m_1 berühren, haben ihre Mittelpunkte auf dem Durchmesser von C, welcher der Sehne mm_1 conjugirt ist. Rückt m_1 nach m, so ergiebt sich, dass alle Kegelschnitte, welche mit C eine Berührung dritter Ordnung bilden, ihre Mittelpunkte auf dem Durchmesser von C haben, welcher nach m gerichtet ist. Unter allen diesen Kegelschnitten tritt eine Parabel auf. Für diese wird zunächst das gestellte Problem gelöst, und dann die Lösung auf den Kegelschnitt C übertragen. Die Construction ist folgende: Ist m ein Punkt von C und μ sein Krümmungsmittelpunkt, so ist die in μ auf $m\mu$ errichtete Senkrechte eine Normale der Evolute. Diese schneidet den nach m laufenden Durchmesser von C in e. Verlängert man nun $e\mu$ über μ hinaus um das Dreifache, so gelangt man zu dem Krümmungscentrum der Evolute. Schn.

CL. SERVAIS. Applications de la quasi-inversion linéaire aux courbes osculatrices. Mathesis VIII. 28-35.

Zahlreiche Anwendungen der folgenden Transformation: Wenn ein Kegelschnitt S und ein fester Punkt A dieses Kegelschnitts gegeben sind, so heissen zwei Punkte entsprechend, wenn sie mit A auf einer Geraden liegen und in Bezug auf S conjugirt sind. Der Verf. wählt als S einen Kreis und erhält eine grosse Anzahl eleganter Sätze über die Kegelschnitte, ferner auch einige Eigenschaften der Strophoide. Mn. (Lp.)

CH. BEYEL. Vier Aufgaben über drei- und vierpunktige Berührung von Kegelschnitten. Schlömilch Z. XXXIII. 120-125.

Die ersten beiden Aufgaben verlangen die Construction der zwei bezw. vier Kegelschnitte, welche durch zwei gegebene Punkte gehen und ausserdem, durch einen auf einem Kegel-

schnitt gegebenen Punkt gehend, dabei diesen Kegelschnitt dreipunktig berühren, bezw. den Kegelschnitt vierpunktig berühren. Die letzten beiden Aufgaben sind Specialfälle der ersten beiden, indem die beiden irgendwo gegebenen Punkte zu den imaginären Kreispunkten, die gesuchten Kegelschnitte also zu Kreisen werden. Dann giebt es drei bezw. vier solcher Kreise. Im vierten Falle sind die Stellen vierpunktiger Berührung bekanntlich die vier Schnittpunkte mit den Axen. Die Untersuchungsmethode ist geometrisch (Involutionen). Gelegentlich ergeben sich auch weitere Eigenschaften der Figur. Scht.

Ch. Beyel. Ueber Osculation und vierpunktige Berührung von Kegelschnitten. Hoffmann Z. XIX. 489-496.

Die vorliegende Arbeit behandelt Tactionsprobleme von Kegelschnitten, hauptsächlich mit Benutzung der beiden Sätze: Eine Gerade schneidet aus den Kegelschnitten eines Büschels Paare einer Involution aus, und: Ein Kegelschnitt, welcher durch zwei Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels geht, trifft denselben in Paaren einer Involution. Es werden u. a. die Aufgaben gelöst: den Krümmungskreis in einem Punkte eines Kegelschnitts zu construiren; den Kegelschnitt zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt geht und mit einem gegebenen Kegelschnitt in einem gegebenen Punkt eine vierpunktige Berührung hat, u. a. m. Lg.

A. Keller. Ueber gewisse Vierecke, die von Viereckspaaren abhängen. Diss. Giessen. 29 S. 8°.

H. Schröter. Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung. Leipzig. Teubner. VI u. 295 S. 8°.

Der berühmte Herausgeber von Jacob Steiner's Vorlesungen über die auf projective Eigenschaften gestützte Theorie der Kegelschnitte (in zweiter Auflage 1876 bei Teubner) giebt hier in einem fast 19 Druckbogen umfassenden Buche eine einheit-

liche, rein synthetische Entwickelung der Eigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung, wie sie für diejenigen wünschenswert erscheint, welche zuerst an das Studium der Curven dritter Ordnung herantreten und keine anderen Hülfsmittel beherrschen, als die Bekanntschaft mit den Elementen der synthetischen Geometrie und den Haupteigenschaften der Kegelschnitte. Zwar sind die in dem Buche gewonnenen Resultate, welche verschiedenen Zeiten und verschiedenen Urhebern angehören, zum grossen Teil schon Gemeingut der Wissenschaft geworden; aber gerade deshalb erscheint es wünschenswert, ein Lehrbuch zu besitzen, welches die ebenen Curven dritter Ordnung in derselben Weise behandelt, wie das oben genannte Buch desselben Verfassers die Lehre von den Kegelschnitten darstellt; und indem die Erzeugungsweisen und die Eigenschaften der Curven dritter Ordnung sich naturgemäss auf die Eigenschaften der Kegelschnitte stützen, kann das vorliegende Buch als eine Fortsetzung des Buches über die Kegelschnitte betrachtet werden. Ueberdies lag auch noch kein Versuch zu einer buchartigen, zusammenfassenden synthetischen Darstellung der ebenen Curven dritter Ordnung vor, da das von Salmon verfasste und von Fiedler übersetzte Buch „A treatise on higher plane curves“ diese Curven völlig analytisch, das Buch von Durège (Leipzig 1871) sie überwiegend analytisch behandelt, und endlich das von Cremona 1862 herausgegebene Buch über ebene Curven einerseits zu alt ist, andererseits die Curven dritter Ordnung auch nur als Beispiel für die vorausgehende allgemeine Theorie behandelt.

Da der Verfasser in der Vorrede den Gang der Untersuchung selbst skizzirt, so erscheint es am zweckmässigsten, dieses Selbst-Referat hier folgen zu lassen:

„Der Verfasser beginnt mit der Construction der $C^{(3)}$ aus drei Paaren conjugirter Punkte derselben, von welcher Clebsch (Math. Ann. V. 422) erklärte, dass „sie an Einfachheit das Aeusserste leiste“, und deren Ursprung bei einer ausgearteten $C^{(3)}$ in den Polareigenschaften des Kegelschnitts sich findet. Aus ihr entspringt die Erzeugung der $C^{(3)}$ vermittelst zweier Strahleninvolutionen in projectiver Beziehung und halb-perspectiver Lage,

wodurch eine gelegentliche Bemerkung Steiner's bestätigt wird, „dass das eigentliche Wesen vieler Eigenschaften der Curve dritten Grades vornehmlich auf der sogenannten Involution beruhe“ (J. für Math. XLVII. 6: „Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven“). Man gelangt hiernach ungezwungen sowohl zu der $C^{(3)}$ als Tripelcurve eines Kegelschnittnetzes, als auch zu den Chasles'schen Erzeugungsweisen vermittelst Kegelschnittbüschel und Strahlenbüschel oder zweier Kegelschnittbüschel in projectiver Abhängigkeit und besonderer Lage, da eine Strahleninvolution auch nur ein Büschel ausgearteter Kegelschnitte ist. Hieran reihen sich verschiedene Constructionen der $C^{(3)}$ aus neun willkürlich und unabhängig von einander gegebenen Punkten, sowie der Hauptsatz (Schnittpunktsatz), welcher die Bedingung zwischen den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritter Ordnung enthält, und die Construction des neunten notwendigen Punktes einer Gruppe von neun associirten Punkten, von denen acht willkürlich gegeben sind.

Die Tangentenquadrupel aus drei in gerader Linie liegenden Punkten der $C^{(3)}$ liefern eine eigentümliche Configuration ihrer Berührungspunkte, sowie ihrer Durchschnittspunkte und zeigen den Salmon'schen Satz von dem constanten Werte des Doppelverhältnisses eines Tangentenquadrupels.

Die ursprüngliche Erzeugung der $C^{(3)}$ vermittelst zweier projectiven Strahleninvolutionen in halbperspectiver Lage führt nun zu der Einteilung der $C^{(3)}$ in ihre zwei Hauptgattungen (die einzügige und die zweizügige), sowie zu den acht verschiedenen Gestalten derselben, von denen drei der ersten und fünf der zweiten Gattung angehören unter Berücksichtigung der unendlich-entfernten Curvenpunkte (Durège: „Ueber die Formen der Curven dritter Ordnung“, J. für Math. LXXV. 153). Die Bedingungen für die Erzeugung der verschiedenen Gestalten der $C^{(3)}$ werden aufgesucht. Die Betrachtung des Tangentenquadrupels aus einem Curvenpunkte hatte schon zur konischen Polare desselben geführt; die Erweiterung derselben zeigt uns das ganze Kegelschnittnetz der konischen Polaren für sämtliche Punkte der Ebene und eröffnet den Einblick in die vielfach verschlungenen Polar-

eigenschaften einer $C^{(3)}$ und den Zusammenhang unter den konischen und geraden Polaren mit den Polokoniken und dem begleitenden Kegelschnitt. Hier treten auch die metrischen Beziehungen auf, welche bei Cremona den Ausgangspunkt bilden, von dem er zu den Polareigenschaften der $C^{(3)}$ gelangt. Die ausgearteten Kegelschnitte des Netzes der konischen Polaren zeigen uns die Hesse'sche und die Cayley'sche Curve, deren Zusammenhang schon bei der Einführung des Kegelschnittnetzes hervortrat.

Die Hesse'sche Curve bietet den unmittelbaren Anhalt zur Untersuchung der Wendepunkte einer $C^{(3)}$, ihrer Configuration und Realität, sowie der Lagenbeziehung ihrer harmonischen Polaren. Den Schluss der Untersuchung bilden einerseits die Steiner'schen Schliessungsprobleme für die $C^{(3)}$, welche nach dem Vorgange von Küpper und Schoute eine synthetische Lösung finden, und andererseits die von Steiner ohne Beweis angegebenen Eigenschaften von mehrpunktig die $C^{(3)}$ berührenden Kegelschnitten. Ausgeschlossen von der Betrachtung blieb vorläufig die Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, sowie die Büschel von Curven dritter Ordnung".

Dem Wunsche des Verfassers, dass sein Buch den Freunden synthetisch-geometrischer Forschung Anregung und Stoff zu eigener Untersuchung und zur Erweiterung der angestellten Betrachtungen darbiete, möchte der Referent den Wunsch hinzufügen, dass bald eine zweite Auflage notwendig sein möchte, welche auch die elementaren Systeme der Curven dritter Ordnung und im Zusammenhang damit die von Zeuthen und dem Referenten erkannten verschiedenen Ausartungen derselben behandelt.

Scht.

H. Schröter. Zurückführung der Grassmann'schen Definitionen der Curve dritter Ordnung auf die von Chasles, Cayley und Hesse angegebenen Erzeugungsweisen. J. für Math. CIV. 62-84.

Für die wirkliche Erzeugung der Curve dritter Ordnung

und die Herleitung ihrer Eigenschaften sind die von Grassmann im XXXVI. Bande des Journals für Mathematik angegebenen Erzeugungsweisen unfruchtbar geblieben, im Gegensatz zu der Chasles'schen aus einem Kegelschnittbüschel und einem ihm projectiven Strahlenbüschel, sowie der Cayley-Hesse'schen aus drei Paaren conjugirter Punkte. Hier zeigt nun der Verfasser, dass die beiden ersten Grassmann'schen Erzeugungen Umformungen der Chasles'schen sind, und dass die dritte Grassmann'sche Erzeugung auf die Cayley-Hesse'sche Erzeugung hinausläuft. Am Schluss werden auch die von Grassmann angegebenen Verallgemeinerungen seiner Erzeugungen auf die Erzeugung aus Kegelschnittbüschel und projectivem Strahlbüschel zurückgeführt.

Scht.

M. Baur. Synthetische Einteilung der Curven dritter Ordnung. 6 Tafeln. Stuttgart. J. B. Metzler. 58 S.

Das vorliegende Buch hat die Aufgabe, eine genaue Einteilung der Curven dritter Ordnung auf Grund der Kriterien vorzunehmen, die in Newton's „Enumeratio linearum tertii ordinis" hervortreten. Als Ausgangspunkt wählt Herr B. hierbei die Möbius'sche Methode, die vorliegende Curve vom Mittelpunkte einer Kugel aus auf die Oberfläche zu projiciren. Nachdem die Hauptgattungen dieser sphärischen Curven „dritter" Ordnung gewonnen sind, ergeben sich die einzelnen Arten, indem man dem Hauptkreise, dem Bilde der unendlich fernen Geraden der Projectionsebene, andere und andere Lagen anweist.

Möbius ist bekanntlich auf Grund seiner Entwickelungen dazu gelangt, drei Gattungen einzügiger Curven ohne Doppelpunkt zu unterscheiden. Indem Herr B. dies adoptirt und zudem sechs Formen aufführt, die Newton seinen Principien gemäss hätte bemerkbar machen müssen (Newton lässt z. B. bei den Curven mit einem paaren Zuge oder isolirtem Punkt den Fall mit drei unendlich fernen Wendepunkten fort), gelangt Herr B. zu 96 Curvenformen statt der 72, die in der Enumeratio sich vorfinden.

Newton führt 18 Formen einzügiger Curven vor. Jedoch nur bei der Curve mit drei unendlich fernen Wendepunkten unterscheidet er die drei Gattungen von einander. Die 15 übrigen Formen können alle in die erste Gattung eingeordnet werden. Aber nicht alle Unterscheidungen, die bei diesen Curven gemacht werden können, lassen sich auf die beiden anderen Untergattungen übertragen. Es können z. B. bei diesen die drei Asymptoten nicht durch einen Punkt gehen. Daraus erklärt sich, dass für einzügige Curven zweiter und dritter Gattung nur je neun Formen neu hinzukommen.

Die Berechtigung, die Unterteilung der Gattung der einzügigen Curven vorzunehmen, sucht Herr B. hauptsächlich in der Gestalt der sphärischen Curve. Durch die Wendekreise und den Kreis, welcher die drei Paare von Wendepunkten enthält, wird die Kugelfläche in acht Dreiecke und sechs Vierecke zerlegt. Die letzteren und sechs der ersteren liegen dem Kreise mit den sechs Wendepunkten an. Die Curve zieht sich bei der ersten Untergattung nur durch die Vierecke, bei der zweiten hingegen durch die sechs Dreiecke hindurch. Bei der dritten Gattung gehen die drei Wendekreise durch zwei Punkte. Enthält eine sphärische Curve ausser einer einfachen Curve ein Paar von Zwillings-Curven oder -Punkten, so verhält sich der erstere Teil wie eine Curve der zweiten Unter-Gattung. Sehr interessant ist übrigens die Thatsache, dass man bei sphärischen Curven mit drei Paaren von Wendepunkten sich auf solche einfache Curven beschränken kann, die durch ihre Wendepunkte in sechs congruente Teile zerlegt werden (§ 5).

Nach Meinung des Ref. berechtigt zu der Unterteilung der Gattung der einzügigen Curven vorzugsweise eine Eigenschaft, die Herr B. nur flüchtig streift. Während nämlich die Tangenten einer Curve der ersten Untergattung die ganze Ebene derselben, einzelne Teile sogar sechsfach überdecken, bleiben bei der zweiten einzelne Stücke ganz und gar frei. Die dritte Untergattung wird dadurch charakterisirt, dass die drei Wendetangenten sich in einem Punkte treffen.

Als bewiesen setzt Herr B. (§ 1) voraus, dass eine Curve

dritter Ordnung einen oder drei in einer Geraden liegende Wendepunkte besitzt, ferner einige Haupteigenschaften der harmonischen Polaren der Wendepunkte. E. K.

F. Morley, P. H. Schoute. Solution of question 9107. Ed. Times XLVIII. 89-90.

Vier gerade Linien werden durch Kegelschnitte berührt. Dann liegen die Punkte, in denen letztere sich rechtwinklig schneiden, auf einer circularen kubischen Curve, welche durch die sechs Schnittpunkte jener Geraden und durch die drei Höhenfusspunkte des Diagonaldreiecks geht. Die reelle Asymptote der kubischen Curve ist parallel zu der Geraden, auf der die Mitten der drei Diagonalen liegen. Herr Schoute, der diesen von Hrn. Morley ausgesprochenen Satz beweist, führt Hrn. Schröter (Math. Ann. V. 50, F. d. M. IV. 1872. 281) und Hrn. Pelz (Wien. Ber. LXIV, F. d. M. IV. 1872. 286) als Entdecker des ersten Teils des Satzes an. Lp.

L. Certo. Sulle forme di terzo grado generate da due forme elementari projettive di primo e di secondo grado di un piano o di una stella. Batt. G. XXVI. 41-45.

Bis auf einige geringfügige Aenderungen in der Einleitung deckt sich die Arbeit mit einer anderen, die Herr C. unter gleichem Titel früher hat erscheinen lassen. (Cf. F. d. M. XVII. 1885. 629.) E. K.

P. H. Schoute. Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. Hoppe Arch. (2) VI. 113-156.

Fortsetzung der eingehenden Untersuchung, welche Herr Schoute schon früher über die im Titel genannten Curven angestellt hat, und über welche im Jahrbuch (zuletzt XVIII. 1886. 572) referirt ist. Bei der viele interessante Resultate bietenden Untersuchung leistet ausser der Polarentheorie namentlich die quadratische Transformation gute Dienste, welche die Curve

vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten in ihren Wendeschnitt überführt, der die Curve in den Berührungspunkten der vier Doppeltangenten schneidet. Die Mitteilung der zahlreichen Einzelresultate würde die Grenzen eines Referats übersteigen.

Scht.

G. Kohn. Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung. Wien. Ber. XCVII. 325-328, 1381-1384.

In diesen beiden Noten werden ohne Beweis einige neue Sätze über die Berührungskegelschnitte und die Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierter Ordnung mitgeteilt. W. St.

A. Leuck. Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung. Diss. Bern.

Die hier untersuchten Curven entstehen folgendermassen: Ein Fundamentaldreieck mit den Ecken A_1, A_2, A_3 ist gegeben, und in seiner Ebene irgend ein Kegelschnitt p. Dieser Kegelschnitt p wird nun durch Anwendung einer birationalen quadratischen Transformation (Inversion) zu einer Curve vierter Ordnung p' mit den Doppelpunkten A_1, A_2, A_3. Den Tangenten von p entsprechen dabei Kegelschnitte, welche dem Fundamentaldreieck umgeschrieben sind und p' berühren. Bringt man nun jeden solchen Kegelschnitt mit der zugehörigen Tangente von p zum Durchschnitt, so ist der Ort aller dieser Durchschnitte eine Curve sechster Ordnung, sechzehnter Klasse mit 7 Doppelpunkten, 30 Wendetangenten und 72 Doppeltangenten; dieselbe bildet den Gegenstand dieser Arbeit. Nach einigen allgemeinen Betrachtungen werden besondere Lagen des Kegelschnitts p zum Dreieck $A_1A_2A_3$ angenommen. Der Kegelschnitt p kann dem Dreieck harmonisch conjugirt, er kann ihm eingeschrieben, umgeschrieben sein, und noch andere Fälle werden betrachtet. Dies wird gründlich und ausführlich besprochen; eine grosse Zahl sehr guter Figuren trägt zum Verständnis des Gegebenen bei.

Mz.

E. DE JONQUIÈRES. Construction géométrique de courbes unicursales, notamment de celle du cinquième ordre douée de six points doubles. Palermo Rend. II. 118-123.

Schon 1887 (C. R. CV. 1148, F. d. M. XIX. 632) hatte der Verfasser theoretisch gezeigt, wie man die Basen zweier projectiven Büschel festlegen kann, wenn dieselben eine Curve m^{ter} Ordnung nullten Geschlechts erzeugen sollen, und für dieselbe die vielfachen Punkte und die nötige Anzahl einfacher Punkte der Lage nach gegeben sind. Hier wird nun für das Beispiel der im Titel genannten Curve die geometrische Construction wirklich der Reihe nach ausgeführt. Gegeben sind die sechs Doppelpunkte und zwei einfache Punkte. Die Construction wird so eingerichtet, dass zwei Büschel von Curven dritter Ordnung ein Gebilde erzeugen, das aus der gewünschten Curve und einer Geraden besteht. Scht.

G. FOURET. Sur quelques propriétés géométriques des stelloïdes. C. R. CVI. 342-345.

Herr F. Lucas hatte in einer Note der Comptes rendus (CVI. 195) eine Gruppe algebraischer Curven berührt, die er Stelloide genannt hat. Herr Fouret, der schon vor 20 Jahren diese Curven studirt hatte, ist dadurch veranlasst, diese Studien wieder aufzunehmen, zu vervollständigen und hier zu veröffentlichen. Zwei Systeme von n Geraden mögen „gleich orientirt" heissen, wenn die Winkelsumme, die die Geraden des einen Systems mit einer Axe bildet, sich von der entsprechenden Winkelsumme des andern Systems gar nicht oder um ein Vielfaches von π unterscheidet. Bewegt sich nun ein Punkt so, dass seine Verbindungsgeraden mit n festen Punkten einen Büschel von constanter Orientirung bilden, so beschreibt der Punkt eine Curve, die eine Stelloide S_n genannt wird. Die n festen Punkte liegen auf S_n und bilden eine Gruppe zusammengehöriger Hauptpunkte. Die S_2 sind gleichseitige Hyperbeln. Von den S_n und ihren Hauptpunkt-Gruppen giebt der Verfasser eine grosse Reihe

von Eigenschaften an, deren letzte sich auch auf Lage und Construction der Krümmungsmittelpunkte beziehen. Scht.

C. Besondere räumliche Gebilde.

Niewenglowski. Solution de la question proposée en philosophie au concours général en 1884. Nouv. Ann. (3) VII. 252-255.

Es sei ein Dreieck ABC und eine Gerade L, die nicht in der Ebene des Dreiecks ist, gegeben; man verbinde dann irgend einen Punkt D von L mit B und C, wodurch ein (im allgemeinen windschiefes) Viereck $DBAC$ entsteht. Es wird nun bewiesen, dass die Mitten der vier Seiten dieses Vierecks auf einem Parallelogramm S liegen; hierauf wird die Veränderung von S betrachtet, die in Folge der Verschiebung von D auf L stattfindet; ferner, wann S ein Rechteck oder Rhombus wird; endlich, ob S ein Quadrat sein kann. Mz.

A. Petot. Sur une extension du théorème de Pascal à la géométrie de l'espace. Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. Suppl. 3-65.

Der Verfasser will für den Pascal'schen Lehrsatz ein räumliches Analogon finden, das von derselben fundamentalen Bedeutung für den Raum ist, wie es der Pascal'sche Satz für die Ebene ist. Er sieht dieses Analogon in einem complicirten Satze, dem er zwei Fassungen giebt, von denen die zweite sich so darstellen lässt: Drei auf einer Fläche dritten Grades liegende Geraden und acht auf derselben liegende Punkte müssen, da $3.4+8.1 = 19+1$ ist, in ihrer Lage von einander abhängig sein. Diese Abhängigkeit ist folgende. Die drei Geraden mögen a, b, c, zwei von den acht Punkten mögen D und E, die sechs übrigen M_1 bis M_6 heissen. Ferner mögen A und B zwei Punkte

sein, die man auf den beiden Schnittgeraden der Ebene *cE* mit den Ebenen *aE* und *bE* willkürlich annehme. Durch *D* lege man noch zwei Gerade α und β, welche die Ebene cM_1 in F_1 und G_1 treffen. Ferner möge die Ebene aM_1 von der Geraden *DA* in A_1 und die Ebene bM_1 von der Geraden *DB* in B_1 geschnitten werden. Die Schnittgerade der beiden Ebenen, welche einerseits A, F_1, A_1, andererseits B, G_1, B_1 verbinden, sei m_1. Ebenso wie m_1 aus M_1 durch A, B, α, β abgeleitet ist, so leite man nun durch dieselben Elemente aus M_2 bis M_6 die Geraden m_2 bis m_6 ab. So gewinnt man sechs Gerade, die dadurch, dass sie einem und demselben linearen Complexe angehören, die gewünschte Abhängigkeit ergeben. Da, wie Cremona gezeigt hat, alle Flächen dritten Grades, die durch drei Gerade und sechs Punkte gehen, eine Raumcurve sechster Ordnung ersten Geschlechts gemein haben, so ergeben sich dem Verfasser Eigenschaften und Constructionen nicht bloss der Fläche dritten Grades, sondern auch jener Raumcurve sechster Ordnung. Ueberdies gelangt man im besondern auch zu Beziehungen zwischen zehn Punkten, die auf einer Fläche zweiten Grades liegen. In der Literatur, auf welche der Verfasser Bezug nimmt, vermisst der Referent gerade die Arbeit, welche durch die für die Fläche dritter Ordnung als gegeben vorausgesetzten Elemente der vorliegenden Arbeit am nächsten steht. Es ist dies die im Jahre 1880 in den Math. Ann. XVII. erschienene Abhandlung des Referenten über die trilineare Beziehung, in welcher sich aus der trilinearen Beziehung dreier Ebenenbüschel naturgemäss die Construction einer Fläche dritter Ordnung in zwei Fällen ergiebt, wo ebenfalls von den auf ihr liegenden Geraden drei als gegeben zu betrachten sind. Scht.

C. Hossfeld. Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, von denen acht imaginär sind. Schlömilch Z. XXXIII. 180.

Die acht imaginären Punkte sind als Doppelpunkte von vier elliptischen, auf den reellen Geraden 12, 34, 56, 78 gelegenen Involutionen gegeben. Die Construction läuft darauf hinaus,

durch die acht imaginären Punkte zwei Regelflächen zweiter Ordnung zu legen; beide bestimmen dann einen Flächenbüschel, und diejenige Fläche desselben, welche den neunten reellen Punkt enthält, ist die gesuchte Fläche. Scht.

KOBER. Die harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades. Diss. Halle.

Der Verfasser untersucht das räumliche Analogon der von Schröter in den §§ 52 und 54 seiner Theorie der Kegelschnitte behandelten merkwürdigen Eigenschaften harmonisch zugeordneter Kegelschnitte hinsichtlich ihrer Lage zu einander und zum gemeinsamen Polardreieck. Den Ausgangspunkt bildet ein Tetraeder und die seine sechs Kanten berührende Fläche zweiten Grades. Es zeigt sich sofort, dass die drei Verbindungsgeraden der Berührungspunkte je zweier Gegenkanten sich in einem Punkte schneiden, und dass demgemäss die den Berührungspunkten in Bezug auf die Ecken harmonisch zugeordneten Punkte in einer und derselben Ebene liegen. So ordnet sich jeder Ebene des Raumes in Bezug auf die Fundamental-Figur ein Punkt harmonisch zu. Ferner ergeben die Verbindungsgeraden eines Punktes mit den vier Ecken des Tetraeders ein Vierkant und die Schnittgeraden der zugeordneten Ebene mit den vier Flächen des Tetraeders ein Vierseit dergestalt, dass die Diagonalen dieses Vierkants und dieses Vierseits die Gegenkanten eines zweiten Tetraeders bilden, dessen Ecken und Flächen in Bezug auf das erste Tetraeder harmonisch zugeordnet sind. Ein drittes Tetraeder, das jedem dieser beiden Tetraeder harmonisch zugeordnet ist, hat zu Gegenkanten die Diagonalen der einfachen Raumvierecke, in denen die Gegenkanten eines Paares harmonisch zugeordneter Tetraeder einander schneiden. Einem Paare von solchen harmonisch zugeordneten Tetraedern sind immer drei Hyperboloide um- und einbeschrieben, welche das dritte Tetraeder zu einem eigentlichen Polartetraeder haben. Auf die so geschaffenen Grundlagen baut der Verfasser dann die Eigenschaften der harmonisch zugeordneten Flächen und der

harmonisch zugeordneten Polarsysteme, die hier nicht kurz genug dargestellt werden können. Bemerkt mag nur noch werden, dass die Untersuchungen des Verfassers mit den Arbeiten von O. Hermes im LVI. Bande des Journals für Math., mit Arbeiten von Thieme in Schloemilch's Zeitschrift XXII, mit denen von Reye, Schröter und Vietor über gewisse Configurationen, sowie endlich mit Untersuchungen von Stephanos, Veronese und Schur in engem Zusammenhange stehen. Scht.

A. del Re. Sur une question de géométrie liée à la théorie des normales à une quadrique. Nouv. Ann. (3) VII. 359-362.

Man denke sich eine Fläche zweiten Grades und deren Krümmungsmittelpunktsfläche. Legt man nun von einem beliebigen Punkt P des Raumes an die letztere den Berührungskegel, so liegt in jeder Tangentialebene dieses Kegels eine einzige Normale der Fläche zweiten Grades. Die Fusspunkte der so erhaltenen Normalen bilden eine Curve achter Ordnung, die vom Verfasser betrachtet wird. Sie ist ein Teil des Schnitts der Fläche mit einer gewissen Fläche fünften Grades, die eine Doppelcurve und einen dreifachen Punkt in P besitzt. Diese Fläche hat zu den Krümmungsmittelpunktsflächen aller der ursprünglichen Fläche homofocalen Flächen dieselbe Beziehung wie die erwähnte Curve zu der Einzelfläche. Scht.

A. Kiefer. Ueber die geraden Kegel und Cylinder, welche durch gegebene Punkte des Raumes gehen, oder gegebene gerade Linien des Raumes berühren. Progr. Thurgau. 30 S.

Es wird die von Steiner in der „Systematischen Entwickelung" u. s. w. (Ges. W. I, 453) gestellte Aufgabe: „Welches ist der Ort des Mittelpunktes der geraden Kegelfläche, a) welche durch irgend vier oder fünf gegebene Punkte im Raume geht, oder b) welche irgend vier oder fünf gegebene Gerade im Raume be-

rührt?“ in eingehender Weise behandelt. Als Ort der Spitzen aller Rotationskegel, die durch irgend vier feste Punkte des Raumes gehen, ergiebt sich eine Fläche von der 14ten Ordnung, welcher die sechs Verbindungsgeraden der Punkte als vierfache Gerade angehören; ihre Schnittcurve mit der unendlich fernen Ebene besteht aus den doppelt zu rechnenden Geraden, in welchen diese von den vier Seitenflächen des von den vier Punkten gebildeten Tetraeders getroffen wird, den Diagonalen des von diesen vier Geraden gebildeten Vierseits und einer gewissen Curve dritter Ordnung, welche durch die sechs Ecken des Vierseits hindurchgeht. Sollen die Rotationskegel noch durch einen fünften Punkt gehen, so ist der Ort ihrer Spitze eine Raumcurve von der 144sten Ordnung; von ihnen arten sechs in Rotationscylinder aus, deren Axen zu sechs Erzeugenden eines gewissen Kegels zweiter Ordnung parallel sind; jene Curve schneidet jede der 10 Verbindungsgeraden der fünf gegebenen Punkte in zwei Punkten je viermal, und jede der unendlich fernen Geraden der 10 durch je drei der fünf Punkte gehenden Ebenen in zwei Punkten je viermal und in vier Punkten je zweimal. Durch irgend sechs gegebene Punkte des Raumes gehen 1888 Rotationskegel. Als Lösung des Problems b) ergiebt sich eine Fläche 12ter Ordnung, der die gegebenen vier Geraden vierfach angehören, und die auch durch ihre zwei gemeinsamen Transversalen geht, bezw. eine Raumcurve 96ster Ordnung, welche durch 12 Punkte jeder der fünf gegebenen Geraden je viermal hindurchgeht. Es giebt endlich 576 Rotationskegel, welche sechs gegebene Gerade des Raumes berühren.

Im Anschluss hieran behandelt der Verfasser noch zwei Gegenstände. Einmal giebt er einfache Lösungen des ebenfalls von Steiner gestellten Problems, diejenigen vier Kegelschnitte zu construiren, welche durch drei gegebene Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren, und untersucht die Curve vierter Klasse (mit drei Doppeltangenten), welche von den Verbindungslinien derjenigen beiden Punkte umhüllt wird, in denen ein variabler Kegelschnitt, welcher durch drei Punkte gehen und einen festen Kegelschnitt berühren soll, diesen ausserdem trifft.

Ueberdies giebt die oben erwähnte in der unendlich fernen Ebene liegende Curve dritter Ordnung, welche sich projectiv in die Brennpunktscurve einer Kegelschnittschar transformiren lässt, Veranlassung zu einer neuen Ableitung der hauptsächlichsten Eigenschaften dieser vielfach behandelten Curve, die hier als Erzeugnis von zwei projectiven Büscheln gleichseitiger Hyperbeln auftritt. T.

P. Dittmar. Das Büschel von Kegelschnitten, welches ein Ebenenbüschel aus einem Kegel II. Ordnung ausschneidet. Diss. Giessen. 19 S. 4°.

C. Hossfeld. Ueber eine Aufgabe aus der projectiven Geometrie des Raumes. Construction der Raumcurve dritter Ordnung aus imaginären Punkten. Schlömilch Z. XXXIII. 111-116.

Für die Theorie der Kegelschnittbüschel ist die Aufgabe von Bedeutung, die reellen Schnittpunkte der beiden Paare imaginärer Gegenseiten eines durch die Doppelpunkte zweier elliptischen Punktinvolutionen gebildeten Vierecks zu construiren. Hier wird nun das räumliche Analogon dieser Aufgabe gelöst, welches darin besteht, die reellen Schnittlinien der vier Paare imaginärer Gegenflächen eines vollständigen Sechsecks zu construiren, welches durch die Doppelpunkte dreier auf windschiefen Geraden gelegenen elliptischen Punktinvolutionen gebildet wird. Die Lösung dieser Aufgabe wird dann angewandt, um die Raumcurve dritter Ordnung aus sechs imaginären Punkten zu construiren. Scht.

E. de Jonquières. Construction géométrique de la surface du troisième ordre. Réflexions sur la génération des surfaces algébriques à l'aide de deux faisceaux projectifs. C. R. CVI. 526-529.

E. DE JONQUIÈRES. Construction géométrique, par deux faisceaux projectifs, de la surface du troisième degré déterminée par diverses conditions données. C. R. CVI. 907-912.

E. DE JONQUIÈRES. Nouvelles recherches sur la construction, par deux faisceaux projectifs, de la surface générale du troisième ordre. C. R. CVI. 209-215.

Im Zusammenhang mit den voraufgegangenen Mitteilungen des Verfassers in den Comptes rendus (S. diesen Band, unten Seite 654), wird hier im besondern die Construction der Fläche dritter Ordnung in gewissen Fällen behandelt, und zwar in der ersten Abhandlung, wenn von den 27 Geraden vier gegeben sind, welche nicht in derselben Ebene liegen, und von denen jede zwei schneidet, die dritte aber nicht, und wenn ausser dieser zwölffachen Bedingung noch sieben Punkte gegeben sind, durch die die Fläche gehen soll. In der zweiten Abhandlung werden erstens drei Doppelpunkte und sieben einfache Punkte, zweitens drei Gerade, die sich nicht treffen, und sieben Punkte als gegeben betrachtet. In der dritten Abhandlung werden für die Fläche erstens drei Gerade, eine Gerade, die zwei von ihnen trifft, und fünf Punkte, zweitens sieben Punkte einer auf ihr liegenden Raumcurve vierter Ordnung erster Art, sowie fünf sonstige Punkte als gegeben betrachtet. In der ersten Abhandlung macht der Verfasser, ausgehend von der Construction der Fläche dritter Ordnung, darauf aufmerksam, dass die Resultate in den oben citirten Mitteilungen wesentlich arithmetischer Natur sind, und dass die Geometrie noch weitere Beschränkungen in besonderen Fällen hinzufügen könnte. In der dritten Abhandlung zeigt der Verfasser, wie seine Probleme auch nahe Beziehungen zu gewissen Problemen über Kegelschnitt-Systeme haben. In allen drei Abhandlungen finden sich Berührungspunkte mit Untersuchungen des Herrn Sturm. Scht.

E. DE JONQUIÈRES. Construction géométrique d'une surface à points doubles, du quatrième ordre. C. R. CVII. 430-432.

Mit Hülfe der in voraufgehenden Mitteilungen erörterten und auf die Fläche dritter Ordnung (S. vor. Seite) angewandten Methode wird hier die Fläche vierter Ordnung aus sieben gegebenen Doppelpunkten und sechs einfachen Punkten construirt.

Scht.

Sporer. Eine Verallgemeinerung des Steiner-Cayley'schen Pentaeders der Flächen dritten Grades. Böklen Mitt. II. 199-202.

Es wird hier ohne Beweis eine Reihe von Sätzen aus der Polarentheorie der Fläche dritter Ordnung mitgeteilt, von welchen gewisse Steiner'sche Sätze specielle Fälle sind.

W. St.

C. Czuber. Die sphärische Curve vierter Ordnung als Einhüllende von Kreisscharen. Hoppe Arch. (2) VII. 143-164.

Herr Thomae hatte im XXIX. Bande der Schloemilch'schen Zeitschrift eine Reihe von Problemen der Cyklographie nach dem folgenden anschaulichen Verfahren behandelt. (Vergl. auch Fiedler's Cyklographie, S. 242 u. f.) Jedem Punkte im Raume entspricht auf einer festen Kugel der Kreis, dessen Ebene Polarebene des Punktes ist, und diesem Kreise entspricht stereographisch ein Kreis einer festen Ebene. Hieran anschliessend, benutzt der Verfasser die Beziehung zwischen der räumlichen Abbildung und dem sphärischen Kreissystem, um mit ihrer Hülfe die Eigenschaften der sphärischen Curve vierter Ordnung als Einhüllende von Kreisscharen nachzuweisen. Die gewonnenen Resultate lassen sich dann durch collineare Transformation leicht auf die allgemeine Curve vierter Ordnung erster Species übertragen.

Scht.

A. Mannheim. Sur certaines conoïdes et en particulier sur le conoïde de Plücker. C. R. CVI. 820-824.

Das Plücker'sche Konoid (Cayley'sches Cylindroid) kann

vermittelst der continuirlichen Ortsänderung einer Ellipse von unveränderlicher Grösse erzeugt werden, und unzählig viele verschiedene Ellipsen können zu der Erzeugung verwandt werden. Dieser Satz und einige allgemeinere werden hier bewiesen. Unter den zahlreichen Arten, die Ortsänderung so zu bewerkstelligen, dass das gewünschte Erzeugnis sich ergiebt, befindet sich folgende specielle. Die ihre Grösse beibehaltende Ellipse muss sich mit den beiden Endpunkten ihrer kleinen Axe auf zwei von den Kanten einer rechtwinkligen dreikantigen Ecke bewegen, während sie die dritte Kante dieser Ecke schneidet. Scht.

J. Cardinaal. Meetkundige theorie der scheeve oppervlakken van de vierde orde. Amst. Versl. en Meded. (3) V. 447-487.

An die Untersuchungen von Chasles, Cayley, Cremona, Reye u. a. anknüpfend, bespricht Verfasser die geometrische Theorie der windschiefen Oberflächen vierter Ordnung. Er giebt ein neues Mittel der Klassification dieser Flächen an, welches sich auf die allgemeine Entstehungsweise einer nicht geradlinigen Oberfläche mit Hülfe zweier projectivischen Oberflächenbündel des zweiten Grades gründet. So kommt er zu einer Einteilung in vier Gruppen, und jede Gruppe führt zu verschiedenen Fällen, welche nach einander betrachtet werden. Die Resultate werden in einer Tabelle zusammengestellt und mit denen von Salmon, Cremona, Cayley verglichen, sodann auch mit den Modellen, welche Herr Rohn entworfen und die Firma Brill in Darmstadt ausgeführt und in den Handel gebracht hat. Schliesslich werden einige bekanntere Oberflächen, welche zu den hier behandelten gehören, wie der Keil von Wallis, das Kreiskonoid und das schiefe Tonnengewölbe, in die entsprechenden Gruppen eingeordnet und eingehender betrachtet. G.

C. Demartres. Sur le lieu d'un cercle doublement sécant à trois cercles fixes. Darboux Bull. (2) XII. 176-177.

Nachweis, dass der fragliche Ort eine Cyklide ist; allgemeiner: Wenn drei feste Kegelschnitte C_1, C_2, C_3 gegeben sind, die einen vierten K zweimal schneiden, so ist der Ort eines fünften, die vier ersteren zweimal schneidenden Kegelschnitts eine Oberfläche vierter Ordnung mit K als Doppelkegelschnitt. (Vgl. F. d. M. XVII. 1885. 735.) Lp.

A. Sucharda. Ueber die Singularitäten einer Gattung von Rückungsflächen vierter Ordnung. Wien. Ber. XCVII. 1083-1100.

Der Verfasser hatte 1885 (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 769) einen Aufsatz über gewisse Flächen veröffentlicht, welche von einer krummen Linie erzeugt werden, die sich im Raume so bewegt, dass alle ihre Punkte congruente Bahnen zurücklegen. Hier werden Flächen von derselben Art behandelt, die aber einen Mittelpunkt besitzen und vierten Grades sind. Sie entstehen, wenn die Leitcurve und die Erzeugende centrische Kegelschnitte sind. Die Singularitäten der entstehenden Flächen und eine gewisse Reciprocität zwischen denselben werden eingehend behandelt. Scht.

V. Murer. Sulla superficie di 5° ordine, dotata di quartica doppia di 1° specie. Ven. Ist. Atti. (6) V. 1223-1231.

Aus Abhandlungen von Clebsch und Sturm hebt Herr Murer zunächst einige Eigenschaften der Fläche hervor. Dieselbe besitzt eine Schar die C_4 viermal treffender Kegelschnitte C_2, in der sieben Geradenpaare vorkommen, daneben giebt es auf der Fläche 64 einzelne Kegelschnitte K, die C_4 je dreimal treffen. Nach der von Sturm gegebenen Erzeugungsweise entsteht eine solche Fläche aus einem Büschel von Flächen zweiten Grades und einem projectivischen Ebenenbüschel zweiter Ordnung. Herr Murer stellt mit Hülfe beider Gebilde einen Büschel von Flächen dritter Ordnung her, der ausser der Fläche mit dem Ebenenbüschel noch den von letzterem umhüllten Kegel erzeugt; es ist dies jedoch eine unnötige Complication. Jedenfalls folgt, dass 11 ein-

fache Bedingungen die Fläche eindeutig bestimmen, wenn ihre Doppelcurve vorliegt.

Herr Murer beschäftigt sich hierauf mit der Lage der 64 besonderen Kegelschnitte gegen die 14 Geraden. In einer ersten Tabelle werden solche k-upel ($k = 1, 2, \ldots, 7$) von Kegelschnitten betrachtet, von denen je zwei einander in zwei Punkten begegnen, und zwar wird ausser der Anzahl der k-upel auch diejenige der Geraden angeführt, die i Kegelschnitte eines k-upels treffen. Nach dieser Tabelle ist z. B. die Zahl der Septupel gleich 64, und es treffen sieben der Geraden je einen, die übrigen je sechs Kegelschnitte des Septupels. In einer zweiten Tabelle werden solche k-upel von Kegelschnitten behandelt, von denen keine zwei einander begegnen.

Mit Hülfe von Flächen dritter Ordnung durch C_4 ist Herr Sturm zu Systemen von Raumcurven dritter und vierter Ordnung auf der betrachteten Fläche gelangt. Dem fügt Herr Murer ohne Beweis hinzu, dass 64 Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art auf der Fläche liegen. Eine solche Curve ist der Restschnitt einer Fläche vierter Ordnung, welche ausser der C_4 einen der Kegelschnitte K und drei Kegelschnitte C_2 enthält. Die Curve schneidet den benutzten K in drei Punkten und einen anderen Kegelschnitt K, der mit dem ersten α Punkte gemein hat, in $2-\alpha$ Punkten. E. K.

D. Montesano. Su la curva gobba di 5^0 ordine e di genere 1. Napoli Rend. (2) II. 181-188.

Der Herr Verfasser beschäftigt sich mit einer bemerkenswerten Beziehung, zu welcher die Raumcurve fünfter Ordnung vom Geschlecht 1 Veranlassung giebt. Von den 27 Geraden einer jeden von den vierfach unendlich vielen Flächen dritter Ordnung Σ, welche durch die Raumcurve gehen, sind 20 Sehnen, fünf sind Trisecanten, und zwei von ihnen treffen die Curve gar nicht. Da durch jede Gerade des Raumes eine und nur eine von diesen Flächen geht, so ergiebt sich hieraus eine paarweise Zuordnung der Geraden des Raumes; diese Paare sind conjugirte

Strahlen in einem Nullsystem, die Trisecanten der Curve bilden den zugehörigen linearen Complex Γ. Die erwähnte Beziehung besteht nun darin, dass jedem Punkte des Raumes derjenige durch denselben gehende Strahl von Γ zugeordnet wird, welcher auf der Fläche des Systems Σ liegt, welche jenen Punkt zum Doppelpunkt hat. Vermittelst dieser perspectiven, eindeutigen und durch die Curve vollständig bestimmten Correspondenz χ leitet dann der Verfasser eine Reihe von Eigenschaften der Kegelschnitte her, welche die Raumcurve in fünf Punkten treffen; z. B.: jeder dieser Kegelschnitte geht durch den seiner Ebene in dem Nullsystem entsprechenden Pol und ist der Ort der Punkte, welche den in seiner Ebene liegenden Geraden des Complexes Γ in χ entsprechen. Ferner studirt der Verfasser eine Involution, welche durch ein dreifach unendliches lineares System von Flächen dritter Ordnung, welche durch die Raumcurve gehen, bestimmt wird, und deren conjugirte Punkte auf den Strahlen eines linearen Complexes liegen, welcher zu dem Complexe Γ involutorisch ist, und betrachtet ausserdem einen Kegelcomplex (2,2) (vergl. F. d. M. XVI. 1884. 724), welcher die Punkte und Sehnen der gegebenen Raumcurve zu singulären Elementen hat und ebenfalls durch die Raumcurve vollständig bestimmt ist. Schliesslich untersucht er eine birationale Raumtransformation, welche durch zwei Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte 1 bestimmt wird, deren Trisecanten einem und demselben linearen Complex angehören. T.

Em. Weyr. Ueber Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins. Dritte Mitteilung. Wien. Ber. XCVII. 592-617.

Die beiden ersten Mitteilungen befinden sich in denselben Berichten XC. 1036-1059 und XCII. 498-523, worüber man F. d. M. XVI. 1884. 599 ff. und XVII. 1885. 661 ff. vergleiche. Diese Mitteilung ist den Punktinvolutionen J^n_{n-1}, deren Ordnung die Stufe um 1 übersteigt, auf der Raumcurve R_5 fünfter Ordnung vom Geschlechte 1 gewidmet und beginnt mit der Quadrupel-

involution dritter Stufe J^4_3, d. h. der dreifachen Unendlichkeit von Punktquadrupeln der R_5, deren jedes durch drei seiner Punkte eindeutig bestimmt ist. Eine solche J^4_3 setzt eine centrale Beziehung zwischen den Punkten und den Trisecanten der Curve fest, so zwar, dass die Ebenen, welche die Curvenpunkte mit den ihnen entsprechenden Trisecanten verbinden, durch einen festen Punkt der Curve, das Centrum der J^4_3, geht; jeder Punkt der R_5 wird unter anderem auch von den Schnittpunkten der Trisecante zu einem Quadrupel ergänzt. Eine solche J^4_3 ist ebensowohl durch ein Quadrupel, welches man beliebig wählen kann, als durch ihr Centrum vollkommen bestimmt. Die Construction des Centrums einer J^4_3 ergiebt eine interessante Eigenschaft der der R_5 eingeschriebenen Tetraeder. In jeder J^4_3 giebt es doppelt unendlich viele ebene Quadrupel. Jedes Quadrupel bildet mit dem Centrum der durch dasselbe bestimmten J^4_3 ein Quintupel, von dem auch jeder andere Punkt das Centrum der durch die vier übrigen Punkte bestimmten J^4_3 ist; alle diese Quintupel der R_5 bilden eine Involution J^5_4, die eine fundamentale ist, insofern sie durch die R_5 vollständig bestimmt ist. Sie enthält alle ebenen Quintupel der R_5 und diejenigen, welche aus irgend einem Paar einer J^2_1 und irgend einem Tripel der gepaarten J^3_2 bestehen. — Sodann wird gezeigt, wie die J^4_3 auch durch ein System von Kegeln, welche einen Punkt der C_5 zum gemeinsamen Scheitel und die beiden in ihm sich schneidenden Trisecanten zu Kanten haben, und allgemeiner durch das System von Hyperboloiden, welche durch zwei feste Trisecanten hindurchgehen, erzeugt werden können. Die Quadrupel einer J^4_3, welche aus zwei Doppelpunkten oder einem vierfachen Punkte bestehen, erfahren eine specielle Behandlung. Die Schnittpunkte einer R_5 mit einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung liefern eine J^{10}_9, die mit der fundamentalen J^5_4 eng zusammenhängt; dieser Zusammenhang, sowie die Involutionen J^n_{n-1} ($n < 10$) werden unter Zugrundelegung einiger Sätze über die Zerlegung der Punktgruppen einer J^n_{n-1} auf einer ganz beliebigen Raumcurve vom Geschlechte 1 in solche von Involutionen J^p_{p-1} ($\Sigma p = n$) untersucht, was zu einer Reihe von Sätzen führt, z. B.: Irgend zwei

Gruppen der fundamentalen J_4^5 liegen auf ein und derselben Fläche zweiter Ordnung; durch sieben beliebige Punkte der R_5 lässt sich eine Fläche zweiter Ordnung legen, welche eine Trisecante in sich enthält. Sodann geht der Verfasser auf diejenigen Flächen von der dritten Ordnung ein, die sich durch die Raumcurve legen lassen, und gelangt zu Sätzen und zu einem gewissen linearen Nullsystem, auf das gleichzeitig Herr Montesano in der oben besprochenen Arbeit geführt worden ist. Zum Schluss wird der allgemeine Satz gegeben: Alle Flächen n^{ter} Ordnung, welche durch beliebige $5n$—1 feste Punkte der R_5 hindurchgehen, gehen auch noch durch einen und denselben weiteren festen Punkt von R_5; es giebt also auf der R_5 eine fundamentale J_{5n-1}^{5n}, und irgend n Quintupel der fundamentalen J_4^5 stellen zusammen eine Gruppe jener dar. Dieser Satz lässt sich ohne weiteres auf beliebige Curven vom Geschlechte 1 ausdehnen. T.

G. Koenigs. Note sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire. Toulouse Ann. I. 9-12. (1887)

Lässt sich zu einer Raumcurve eine Gerade g so bestimmen, dass, wenn α die Schmiegungsebene in einem beliebigen Punkte A der Curve bedeutet, die Punktreihe $g(\alpha) \barwedge$ dem Ebenenbüschel $g[A]$ ist, so hat der Verfasser diese Curve eine Curve mit anharmonischer Axe genannt (Ann. de l'Éc. Norm. (2) XI); ausserdem hat er auch Flächen behandelt, deren Asymptotencurven von dieser Art sind. In der vorliegenden Note zeigt er den Zusammenhang, in welchem diese Curven und Flächen zu den von Lie betrachteten Flächen stehen, deren Asymptotencurven die Strahlen eines linearen Complexes zu Tangenten haben. T.

J. Kleiber. Construction einer Plücker'schen Complexfläche aus ihren vier singulären Strahlen. Schlömilch Z. XXXIII. 349-356.

Der Herr Verfasser stellt sich die Aufgabe, aus den vier singulären Strahlen der Complexfläche dieselbe zu construiren. Er zeigt, dass diese Construction ausführbar wäre, wenn eine Raumcurve dritter Ordnung bestimmt wäre durch zwei Schmiegungsebenen, die in ihnen liegenden Tangenten und die Berührungspunkte. Nun ist dadurch eine kubische Raumcurve keineswegs bestimmt, und die von dem Herrn Verfasser versuchte Construction ist somit nicht ausführbar. W. St.

I. Conti. Sulle congruenze generate da una coppia di piani in corrispondenza doppia. Palermo Rend. II. 97-106.

Zwischen den Ebenen P, P' ist eine ein-zweideutige Verwandtschaft hergestellt, wenn einem Strahlenbüschel o der ersteren Ebene ein Kegelschnittbüschel F^2 der letzteren zugewiesen wird und alle Strahlen bestimmt werden, die entsprechende Elemente beider projectiven Gebilde und eine beliebige Gerade σ schneiden. Ein-zweideutige Verwandtschaften zwischen beiden Ebenen liefern auch die Strahlen, die die entsprechenden Elemente von o, F^2 und einer ihnen projectiven Regelfläche treffen. Das im ersteren Falle in Frage kommende Strahlensystem ist von der dritten, das im letzteren einfachsten Falle von der fünften Ordnung und Klasse, beide Strahlensysteme besitzen leicht bestimmbare Singularitäten und Brennflächen. Js.

E. de Jonquières. Détermination du nombre maximum des points doubles, proprement dits, qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une surface algébrique, de degré m, dont la détermination est complétée par d'autres points simples donnés. C. R. CVI. 19-26.

E. de Jonquières. Sur un trait caractéristique de dissemblance entre les surfaces et les courbes algébriques, d'où dépendent les limites respectives des nombres de points doubles (ou, plus généralement, de points mul-

tiples d'ordre r) qu'il est permis de leur attribuer arbitrairement. C. R. CVI. 156-162.

E. DE JONQUIÈRES. Sur quelques notions, principes et formules qui interviennent dans plusieurs questions concernant les courbes et les surfaces algébriques. C. R. CVI. 234-241.

Der hier behandelte Gegenstand ist die Erzeugung algebraischer Flächen aus zwei projectiven Büscheln in dem Falle, wo ausser einfachen Punkten auch Doppelpunkte oder vielfache Punkte der gesuchten Fläche gegeben sind. Bei der Bestimmung der Fläche zählt ein solcher gegebener r-facher Punkt bekanntlich $\frac{1}{6}r(r+1)(r+2)$-fach, ein Doppelpunkt also vierfach. In der zweiten Abhandlung constatirt der Verfasser einen wichtigen Unterschied zwischen der Erzeugung von Curven und von Flächen aus projectiven Büscheln. Der Grad i nämlich der Curve, die der gesuchten Curve in gewisser Weise zu adjungiren ist, muss 1 oder 2 sein, damit ein Zerfallen stattfinde. Bei den Flächen aber kann der Grad der adjungirten Fläche jeden beliebigen Wert bekommen. Daher kommt es dann, dass das Maximum der Doppelpunkte, die für eine Fläche m^{ter} Ordnung ($m>4$) ausser einfachen Punkten gegeben sein können, leicht bestimmbar ist. Es ergiebt sich nämlich dafür die grösste ganze Zahl, die in $\frac{1}{4}D$ steckt, wo D die Constantenzahl

$$\tfrac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)-1$$

der Fläche m^{ter} Ordnung ist. Für r-fache Punkte hat man statt $\frac{1}{4}D$ die gemischte Zahl $\dfrac{6D}{r(r+1)(r+2)}$ zu nehmen. In der dritten Abhandlung werden die wesentlichen Punkte des Verfahrens zusammengefasst und beleuchtet, und schliesslich werden für die Beispiele der Bestimmung der Fläche 9ter Ordnung aus 54 Doppelpunkten und drei einfachen Punkten oder aus 10 vierfachen Punkten und 19 einfachen Punkten die beiden erzeugenden Büschel hergestellt. Scht.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

S. Dickstein. Bericht über die Arbeiten aus dem Gebiete der polydimensionalen Geometrie. Prace mat. fiz. I. 129-136. (Polnisch.)

Eine kurze historische Darstellung der Entwickelung der genannten Disciplin von Riemann und H. von Helmholtz an bis zum Jahre 1888. Dn.

V. Schlegel. Ueber den sogenannten vierdimensionalen Raum. Berlin.

G. D. H. Anmaerkninger rörande Kroppan af högre Dimensioner. Zeuthen Tidss. (5) VI. 187-188.

Einige Bemerkungen über die Körper von mehr als drei Dimensionen. V.

F. Chizzoni. Sulla corrispondenza univoca fra le rette di uno spazio ordinario ed i punti di uno spazio lineare a quattro dimensioni. Atti dell' Acc. Gioenia di Scienze naturali in Catania. (3) XX.

Sind ein vierdimensionaler Raum Σ_4 und ein dreidimensionaler S_3 gegeben, so wähle man in diesem letzteren willkürlich zwei Ebenen A_2 und B_2, im ersteren zwei Gerade A_1 und B_1 aus und stelle zwischen den ∞^2 Punkten von A_2 (oder B_2) und den ∞^2 Ebenen, welche durch A_1 (oder B_1) gehen, eine projective Correspondenz her. Erinnert man sich dann, dass zwei Ebenen von Σ_4 sich im allgemeinen in einem Punkte schneiden, so sieht man ein, dass es möglich ist, die Geraden von S_3 den Punkten von Σ_4 eindeutig entsprechen zu lassen, derart, dass 1) einer Geraden von S_3 der Schnitt der beiden Ebenen entspricht, die den Spuren derselben auf den Ebenen A_2 und B_2 homolog sind; 2) einem Punkte von Σ_4 die Gerade entspricht, welche die

Punkte von A_2 und B_2 verbindet, die den durch diesen Punkt und bezw. durch A_1 und B_1 gehenden Ebenen homolog sind.

Die von Herrn Chizzoni erforschte Verwandtschaft ist ein besonderer Fall der so eben erläuterten und wird durch die folgende Anordnung der gegebenen Gebilde erhalten. Man nehme an, dass der Raum S_3 zu Σ_4 gehöre, und dass die Gerade $A_1(B_1)$ die Ebene $B_2(A_2)$ in einem Punkte $B_0(A_0)$ schneide. Dann schneidet jede Gerade R_1 von S_3 die A_2 und B_2 in zwei Punkten M_0 und N_0. Projicirt man M_0 aus A_1 und N_0 aus B_1, so hat man zwei Ebenen von Σ_4, welche sich in einem Punkte M_0, dem Bilde von R_1, schneiden.

Wählt man die Coordinatensysteme passend aus, so nehmen die Formeln, durch welche man von den Punkten von Σ_4 zu den Geraden von S_3 übergeht, das folgende sehr einfache Aussehen an:

$$r_{23} \equiv x_2 x_3, \quad r_{31} \equiv x_1(x_3+x_5), \quad r_{12} \equiv -x_1 x_2,$$
$$r_{14} \equiv -x_1 x_4, \quad r_{24} \equiv x_2(x_4+x_5), \quad r_{34} \equiv x_5(x_3+x_4+x_5);$$

die umgekehrten Formeln sind:

$$x_1 \equiv r_{12}(r_{31}-r_{14}), \quad x_2 \equiv r_{12}(r_{23}+r_{24}), \quad x_3 \equiv r_{23}(r_{14}-r_{31}),$$
$$x_4 \equiv r_{14}(r_{23}+r_{24}), \quad x_5 \mp r_{12} r_{34}.$$

Teils mit Hülfe dieser Gleichungen, teils durch geometrische Betrachtungen bestimmt Herr Chizzoni, welche Gebilde von S_3 den Geraden, den Ebenen, den dreidimensionalen Räumen von Σ_4 entsprechen; ebenso die Gebilde von Σ_4, welche den Strahlenbüscheln, den Strahlenbündeln, den Strahlenfeldern und den speciellen linearen Complexen von S_3 entsprechen. Allgemeiner untersucht er die Beziehungen, welche zwischen den Regelflächen, den Congruenzen und den Complexen von S_3 einerseits und den entsprechenden Mannigfaltigkeiten einer, zweier oder dreier Dimensionen von Σ_4 andererseits bestehen, indem er zugleich die Absicht der Fortsetzung dieser Untersuchungen ankündigt.

La. (Lp).

G. Bordiga. Dei complessi in generale nello spazio a quattro dimensioni ed in particolare di alcuni di primo ordine. Loro projezione e rappresentazione nello spazio ordinario. Ven. Ist. Atti. (6) VI. 919-966.

Im vierdimensionalen linearen Raume R_4 befinden sich ∞^6 Gerade, unter diesen giebt es ∞^3, welche drei beliebigen Bedingungen genügen: sie bilden eine Mannigfaltigkeit, welche Herr Bordiga aus Analogie „Complex" nennt; Ordnung μ des Complexes ist die Zahl ihrer Geraden, welche durch einen beliebigen Punkt von R_4 gehen, während ihre Klasse ν der Grad der Regelfläche ist, welche durch ihre in einem dreidimensionalen Raume R_3 befindlichen Geraden gebildet wird.

Insbesondere bilden einen Complex alle Geraden, welche

a) eine zweidimensionale Fläche F_1 (Doppelleitfläche des Complexes) in zwei Punkten, eine andere zweidimensionale Fläche F_2 (einfache Leitfläche des Complexes) in einem Punkte treffen;

b) jede von drei zweidimensionalen Flächen F_i (Leitflächen des Complexes) in einem Punkte treffen. Diesen zwei Complexklassen ist der erste Teil der in Rede stehenden Abhandlungen gewidmet.

Nennt man n_i die Ordnung der Fläche F_i, p_i das Geschlecht und h_i die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte ihres Schnittes durch einen R_3, so ergiebt sich leicht für einen Complex Ω_a der ersten Klasse

$$\mu = n_2\left\{\frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2}-p_1\right\},\quad \nu = n_2\left\{\frac{n_1(n_1-1)}{2}+h_1\right\}.$$

Alle Punkte der gegebenen Flächen sind singuläre Punkte des Complexes, weil durch jeden ∞^1 Complexstrahlen gehen: haben die Flächen Punkte gemein, so sind diese noch singulärer; denn durch jeden gehen ∞^2 Complexstrahlen. Die ∞^2 Geraden, welche beide Flächen in zwei Punkten treffen, sind Doppelstrahlen des Complexes, während die Geraden, welche F_1 in drei und F_2 in einem Punkte treffen, dreifache Geraden des Complexes sind. Dreifache Complexstrahlen sind auch die Geraden, welche F_1 in zwei und F_2 in drei Punkten treffen; sechsfache (nicht vierfache, wie der Herr Verfasser sagt) die Geraden, welche F_1 in drei und F_2 in zwei Punkten treffen; neunfache (nicht fünffache) die Geraden, welche beide Flächen in drei Punkten treffen. Die Complexe dieser Art, welche eine Fläche n_1^{ter} Ord-

nung als zweifache und eine n_2^{ter} Ordnung als einfache Leitfläche haben, können nicht von einer Ordnung kleiner als n_2 sein, und sind von dieser Ordnung nur, wenn die Doppelleitfläche eine kubische Normalfläche ist; insbesondere werden die einzigen Complexe Ω_a erster Ordnung durch die Sehnen dieser Fläche gebildet, welche eine Ebene treffen.

In einem Complex Ω_b der zweiten Klasse hat man

$$\mu = n_1 n_2 n_3, \qquad \nu = 2 n_1 n_2 n_3;$$

jeder Punkt einer Fläche F_i der gegebenen Flächen ist Mittelpunkt eines Strahlenkegels, dessen Ordnung $n_k n_l$ ist (ikl ist eine beliebige Permutation von 1 2 3), während durch jeden Punkt, welcher zweien dieser Flächen gemein ist, ∞^2 Complexstrahlen gehen. Der Complex besitzt als zweifache Strahlen die ∞^2 (in drei Congruenzen verteilte) Geraden, welche zwei der gegebenen Flächen in je einem Punkte und die dritte in zwei Punkten treffen, als vierfache (nicht als dreifache, wie der Herr Verfasser meint) die ∞^1 (in drei Regelflächen verteilte) Geraden, welche zwei der gegebenen Flächen in je zwei Punkten und die dritte in einem treffen; als dreifache die ∞^1 (ebenfalls in drei Regelflächen verteilte) Geraden, welche zwei der gegebenen Flächen in je einem Punkt und die dritte in drei Punkten treffen. Der Complex hat auch eine endliche Zahl sechsfacher Geraden, von denen jede eine der gegebenen Flächen in einem, eine in zwei und eine in drei Punkten schneidet; zuletzt eine endliche Zahl achtfacher Geraden, von denen jede eine Sehne aller gegebenen Flächen ist: mit Unrecht glaubt der Herr Verfasser, dass alle diese Geraden vierfache Complexstrahlen seien. — Die Complexe Ω_b können erster Ordnung nur dann sein, wenn alle gegebenen Flächen eben sind, doch können sie in Complexe niedrigerer Ordnung zerfallen.

Der zweite Teil der Abhandlung, mit der wir uns beschäftigen, hat zum Gegenstand die Complexe erster Klasse und erster Ordnung Ω_a, welche, wie schon gesagt, aus den Geraden bestehen, welche eine Ebene α und eine kubische Normalfläche F treffen. Jeder Punkt von F ist der Mittelpunkt eines zweidimensionalen Complexkegels zweiter Ordnung, während die drei Durchschnitts-

punkte A_1, A_2, A_3 von F und α die Mittelpunkte dreier dreidimensionalen Complexkegel sind. Der Complex Ω_a besitzt drei singuläre Ebenen λ_1, λ_2, λ_3; λ_i geht durch A_k und A_l und schneidet F in einem Kegelschnitt c_i^2. Nicht geringe Wichtigkeit hat bei der Bestimmung der Eigenschaften des Complexes Ω_a die Untersuchung der Regelflächen fünfter Ordnung, welche aus den Complexstrahlen bestehen, die eine beliebige Gerade schneiden, sowie die Erforschung der Congruenz fünfter Ordnung und vierter Klasse, welche aus den Complexstrahlen besteht, die eine beliebige Ebene schneiden; diese Untersuchung ist mit besonderer Sorgfalt in der Originalabhandlung durchgeführt.

Nimmt man in R_4 einen Punkt O und einen dreidimensionalen Raum R_3 beliebig an, und projicirt den Complex Ω_a aus O auf R_3, so erhält man einen Complex vierten Grades Ω' des gewöhnlichen Raumes R_3. Jeder Punkt des Raumes R_3 ist der Mittelpunkt eines rationalen Kegels vierter Ordnung. In R_3 hat man eine singuläre Ebene α'; der Complexkegel, welcher einen Punkt von α' als Mittelpunkt hat, zerfällt in zwei Strahlenbüschel, von denen einer in α' gelegen und dreimal zu nehmen ist. Ferner hat man in R_3 eine kubische Regelfläche, von der jeder Punkt der Mittelpunkt eines in zwei Quadrikegel zerfallenden Complexkegels ist. Es giebt auch in R_3 drei Punkte A_i', welche Mittelpunkte von Strahlenbündeln sind, die aus zweifachen Geraden des Complexes bestehen, und drei Ebenen λ_i', welche aus einfachen Geraden desselben bestehen. Der Complex enthält ∞^2 Congruenzen (5, 4), ∞^4 Congruenzen (4, 4) und eine Congruenz (3, 4). Neue Eigenschaften erhält er, wenn man den Projectionsmittelpunkt in besonderen Lagen annimmt.

Wählt man einen dreidimensionalen Raum R_3 beliebig, so geht durch jeden seiner Punkte ein Strahl des Complexes Ω_a; umgekehrt, jeder Strahl des Complexes Ω_a schneidet im allgemeinen R_3 in einem bestimmten Punkte: daraus entnimmt man eine Methode, um Ω_a (und in Folge dessen auch Ω') auf einen gewöhnlichen Raum eindeutig abzubilden. Die Untersuchung dieser Abbildung wird im vorletzten Paragraphen der Bordiga'schen Abhandlung geführt.

Der letzte Paragraph ist der birationalen Verwandtschaft gewidmet, welche zwischen zwei Räumen R_3 und R'_3 entsteht, wenn man auf beide den Complex Ω_a nach der erwähnten Weise abbildet und zwei Punkte als entsprechend ansieht, wenn sie demselben Complexstrahl entsprechen. Diese Verwandtschaft hat die Eigenschaft, dass einer Ebene oder einer Geraden eines Raumes eine Fläche oder eine Linie fünfter Ordnung in dem anderen entspricht; die so erzeugten ∞^3 Flächen fünfter Ordnung enthalten als Doppellinien dieselbe kubische Raumcurve und als einfache dieselbe rationale ebene Curve vierter Ordnung.

La.

G. Bordiga. Di una certa superficie del 7° ordine. Ven. Ist. Atti. (6) V. 1397-1403.

Im Raume von fünf Dimensionen wird das Erzeugnis eines Raumbündels zweiter Stufe mit dem Träger Σ_2 und dreier reciprok bezogenen Bündel von Räumen vierter Dimension mit den Trägern $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ betrachtet. Hierbei entsteht eine Fläche siebenter Ordnung und zweiter Dimension, die mit Σ_2 eine ebene Curve dritter Ordnung C^3, mit $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ je vier Punkte gemein hat. Von jeder Geraden a von $S_2^{(i)}$ geht eine dreifach schneidende Ebene aus, welche $\Sigma_2 a$ mit dem Träger des entsprechenden Büschels von $S_2^{(i)}$ gemein hat. Herr Bordiga zieht daraus später den Schluss, dass eine beliebige Gerade fünf dreifach schneidende Ebenen aussendet, was wohl nicht ganz zu rechtfertigen ist. Jeder Σ_2 enthaltende Raum vierter Dimension hat mit der Fläche eine Normalcurve vierter Ordnung gemein, die C^3 dreimal trifft. Hiernach kann man durch Projection von Σ_2 aus die Fläche auf eine Ebene eindeutig abbilden, und zwar entspricht jedem ebenen Schnitt eine Curve vierter Ordnung, C^3 eine Curve dritter Ordnung. Die Abbildung führt auf neun Fundamentalpunkte, und es ergeben sich somit auf der Fläche neun von Σ_2 ausgehende Geraden und 36 Kegelschnitte. Ferner entstehen neun Mannigfaltigkeiten von Räumen vierter Dimension, deren jeder eine Raumcurve dritter und eine sie in drei Punkten treffende Raumcurve vierter Ordnung erster Art mit der Fläche

gemein hat. Jede dieser Mannigfaltigkeiten hat einen „Kummer'schen“ Kegel zweiten Grades zur Enveloppe, der einen Punkt von C^3 zur Spitze hat.

Herr Bordiga projicirt nun die Fläche in verschiedenen Arten auf den Raum. E. K.

C. Segre. Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario. Torino Mem. (2) XXXIX. 48 S.

Wie in der Geometrie der Ebene und des Raumes nach der Vollendung der Theorie der Curven und Flächen zweiter Ordnung die Mathematiker sich der Erforschung der Curven und Flächen dritter Ordnung zugewandt haben, um dann zu denjenigen höherer Ordnung zu gelangen, so mussten in der Geometrie des linearen vierdimensionalen Raumes die Untersuchungen über kubische Mannigfaltigkeiten denen über quadratische folgen. Eine Anregung zu einer solchen Untersuchung fand man nicht nur in dem inneren Interesse, das solche Gebilde besitzen, sondern auch in der Hoffnung, dass die neuen auf diese Weise erlangten Wahrheiten neue Wahrheiten der gewöhnlichen Geometrie zur Folge haben könnten, wie schon in der Geometrie unseres Raumes viele Sätze der Flächentheorie neue Sätze oder mindestens neue Beweise bekannter Sätze der ebenen Geometrie gegeben hatten. Dass eine solche Hoffnung nicht ohne Berechtigung war, ist durch die Abhandlung bewiesen, welcher das gegenwärtige Referat gewidmet ist, und deren hauptsächlichster Zweck die Erforschung der kubischen Mannigfaltigkeiten des vierdimensionalen Raumes ist; zugleich lernt aber der Leser die Existenz neuer Flächen und neuer Strahlensysteme unseres Raumes kennen und findet neue Eigenschaften einiger bekannten Gebilde auseinandergesetzt.

Nennen wir Γ eine (darunter verstanden dreidimensionale) in einem linearen vierdimensionalen Raume enthaltene Mannigfaltigkeit. Umschreibt man von einem Punkte P dieses Raumes der Mannigfaltigkeit einen Kegel und schneidet man denselben durch einen dreidimensionalen Raum R, so gewinnt man eine

Fläche F, die (der Analogie wegen) „scheinbarer Umriss" von Γ in Bezug auf den Punkten P heisst; diese Fläche ist vierter Ordnung (und wird daher im Folgenden mit F^4 bezeichnet), wenn P auf Γ liegt, sonst aber sechster Ordnung (und wird dann mit F^6 bezeichnet). F^6 hat als Rückkehrlinie eine auf einer Fläche zweiter Ordnung gelegene Curve sechster Ordnung δ^6, sie ist sogar die allgemeinste Fläche solcher Art. Alle Mannigfaltigkeiten F, die auf R und in Bezug auf P dieselbe F^6 zum scheinbaren Umriss haben, werden aus einer von ihnen abgeleitet, indem man dieselbe durch eine Homologie transformirt, deren Mittelpunkt P ist; die Constantenanzahl, von der F^6 abhängt, ist um fünf Einheiten kleiner als diejenige, von der die entsprechende Γ abhängt. F^4 wird durch eine bestimmte Ebene μ längs eines Kegelschnitts berührt; auch sie ist die allgemeinste Fläche dieser Art. Der obige Satz über die Γ, welche dieselbe F^6 als scheinbaren Umriss haben, ist auch für die F^4 richtig, wie auch der Zusatz über die Constantenanzahl. Jede Gerade, welche F doppelt berührt, ist die Projection einer in Γ gelegenen Geraden, daher sind die Untersuchungen der Doppeltangenten von Γ von denen der Geraden von Γ nicht wesentlich verschieden. Aus dieser Bemerkung folgt erstens, dass die Doppeltangenten von F^4, welche der Ebene μ nicht angehören, ein Strahlensystem (12, 27), d. h. 12ter Ordnung und 27ster Klasse bilden, und dass die 12 Strahlen des Systems, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, in zwei Sextupel verteilt sind, jedes auf einem Kegel zweiter Ordnung gelegen; zweitens, dass die Doppeltangenten von F^6 ein Strahlensystem (18, 27) bilden, und dass die 18 Strahlen des Systems, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, in drei Sextupel verteilt sind, jedes auf einem Kegel zweiter Ordnung gelegen. Die Klasse von F ist gleich der Anzahl der dreidimensionalen Räume, welche durch einen beliebigen Punkt gehen und Γ berühren, und ist daher durch die Differenz zwischen 24 und der doppelten Zahl der Doppelpunkte von Γ ausgedrückt.

Nach diesen allgemeinen Entwickelungen über die Eigenschaften der kubischen Mannigfaltigkeiten und ihrer Projectionen betrachtet der Verfasser einige interessante besondere Fälle der-

selben. Er bemerkt zuerst, dass Γ im allgemeinen keine Ebene enthält, die Voraussetzung, dass sie eine enthalte, hat als notwendige Folge, dass sie vier Doppelpunkte hat und durch zwei projective Büschel aus dreidimensionalen linearen und quadratischen Räumen erzeugbar ist. In diesem Falle kann Γ als die Projection des Durchschnitts zweier vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung im fünfdimensionalen Raume auf den vierdimensionalen Raum betrachtet werden; daher können die Eigenschaften von Γ aus denen dieses Durchschnitts abgeleitet werden. Die Projectionen dieser besonderen Γ sind bemerkenswerte Flächen vierter und sechster Ordnung, von denen der Verfasser die Singularitäten und die Doppeltangenten bestimmt, nicht nur in dem allgemeinen Falle, sondern auch in den speciellen Fällen, welche durch das Auftreten neuer Doppelpunkte und neuer Ebenen gekennzeichnet sind.

Die zweite Reihe kubischer Mannigfaltigkeiten, mit welcher sich der Verfasser beschäftigt, besteht aus allen denjenigen, welche durch drei projective Netze erzeugbar sind. Bezeichnet man im vierdimensionalen Raume mit „Netz" die Grundgebilde, deren Elemente die durch eine gegebene Gerade gehenden dreidimensionalen Räume sind, so befinden sich ∞^2 Durchschnittslinien der entsprechenden Räume dreier projectiven Netze auf einer kubischen Mannigfaltigkeit Γ, welche die Träger der Netze und ein anderes ganz ähnliches System von ∞^2 Geraden enthält. Γ enthält sechs unabhängige Doppelpunkte und ist die allgemeinste dieser Art. Projicirt man Γ, so erhält man entweder eine F^4 mit sechs auf einem Kegelschnitte liegenden Doppelpunkten und sechs andere unabhängige, oder eine mit einer Rückkehrcurve sechster Ordnung und sechs Doppelpunkten versehene F^6. — Die kubische Mannigfaltigkeit und ihre Projection werden besonderer Art, wenn man die Voraussetzung macht, dass in den drei erzeugenden Netzen eine gewisse Zahl r ($r = 1, 2, 3, 4$) von Ternen entsprechender Räume durch dieselbe Ebene gehen. Ist $r = 1$ oder 2, so hat Γ eben so viele neue Doppelpunkte. Ist $r = 3$, so besitzt Γ drei neue Doppelpunkte und viele andere sehr wichtige Eigenschaften (z. B. sie gehört dem durch zwei Ternen von Räumen be-

stimmten Büschel an und kann durch drei Raumbüschel in trilinearer Beziehung erzeugt werden); ist endlich $r = 4$, so gelangt man zu jener bemerkenswerten kubischen Mannigfaltigkeit, welche den Gegenstand eines früheren Aufsatzes desselben Verfassers bildete (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 673).

Alle die obigen Mannigfaltigkeiten enthalten eine endliche Zahl von Doppelpunkten, in welchen der Berührungskegel allgemeiner Natur ist. Aber, so bemerkt der Verfasser, der Berührungskegel in einem Doppelpunkt einer Mannigfaltigkeit kann einen Punkt, eine Gerade, eine Ebene u. s. w. als Träger und in Folge dessen verschiedene Eigenschaften haben. Nennt man einen Doppelpunkt einen von der r^{ten} Art, ($r > 1$), wenn der zugehörige Berührungskegel einen r-dimensionalen ebenen Raum zum Träger hat, so sieht man, dass ein solcher Punkt die Klasse der Mannigfaltigkeit um $3 \cdot 2^{r-2}$ Einheiten vermindert. Hat eine Mannigfaltigkeit einen (r—1)-dimensionalen Doppelraum, so wird jeder Punkt desselben ein Doppelpunkt r^{ter} Art. Wendet man diese allgemeinen Betrachtungen auf die kubischen Mannigfaltigkeiten an, so erkennt man, dass Γ Doppelpunkte erster, zweiter, dritter und vierter Art haben kann; setzt man voraus, dass sie solche Besonderheiten besitzen, so erhält man mit Singularitäten höherer Art versehene Projectionen F.

Die letzte Kategorie kubischer Mannigfaltigkeiten, welche der Verfasser untersucht, wird durch diejenigen gebildet, welche unendlich viele Doppelpunkte besitzen. Nachdem Herr S. alle Linien bestimmt hat, welche Doppelcurven von einer Γ sein können, betrachtet er der Reihe nach diejenigen, welche besitzen: eine Doppelgerade, einen Doppelkegelschnitt, zwei sich schneidende Doppelgeraden, drei durch denselben Punkt gehende Doppelgeraden (ihr scheinbarer Umriss ist eine Steiner'sche Römerfläche), eine rationale normale Doppelcurve vierter Ordnung (jede solche Γ ist der Ort der Sehnen einer solchen Curve), zwei durch denselben Punkt gehende Doppelkegelschnitte; ferner diejenigen, welche ein aus Doppelpunkten zweiter Art bestehendes Geradenpaar oder einen solchen Kegelschnitt haben; endlich diejenigen, welche unendlich viele auf einem Kegelschnitte verteilte Doppel-

punkte vierter Art besitzen. — Für alle diese Mannigfaltigkeiten und auch die specielleren durch neue Doppelpunkte charakterisirten bestimmt der Verfasser die Geraden, die besonderen Erzeugungsmethoden und die Projectionen.

Die auf den gewöhnlichen Raum R eindeutig abbildbaren Γ (z. B. die mit Doppelpunkten) führen auf eine wichtige Klasse von Raumtransformationen. Betrachten wir nämlich, ausser der eindeutigen Abbildung von Γ auf R, die zwei- oder dreideutige, die durch Projection von Γ aus einem Punkte P auf R erzeugt wird; lässt man ferner den Punkt von R, welcher eindeutig einem Punkt von Γ entspricht, den zwei oder drei Punkten entsprechen, welche aus diesem letzten durch Projection entstehen, so erhält man eine zwei- oder dreideutige Transformation von R, welche der obengenannten Klasse angehört und vom Verfasser am Schluss seiner Arbeit untersucht wird. La.

C. Segre. Alcune considerazioni elementari sull' incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni. Palermo Rend. II. 45-52.

Die descriptiven Eigenschaften der linearen beliebig ausgedehnten Räume können nicht nur mit Hülfe von Rechnungen bestimmt werden, sondern auch durch ähnliche Betrachtungen wie diejenigen, welche die analogen Eigenschaften der Ebene und des Raumes klar legen; die Betrachtungen dieser letzten Art bieten sogar in der mehrdimensionalen Geometrie eine ähnliche Eleganz und Klarheit, Vorteile, welche sie in der gewöhnlichen Geometrie gewähren. Der Segre'sche Aufsatz, über welchen jetzt berichtet werden soll, und welcher einen interessanten Beitrag zur synthetischen Geometrie des vierdimensionalen linearen Raumes R_4 liefert, kann als eine Bestätigung der obigen Behauptung dienen.

In R_4 befinden sich ∞^4 Punkte (R_0), ∞^6 Geraden (R_1), ∞^6 Ebenen (R_2) und ∞^4 gewöhnliche Räume (R_3). In R_4 sind zwei R_1 „incident", wenn sie einen R_0 gemein haben oder in einem R_2 liegen; zwei R_2, wenn sie einen R_1 gemein haben oder in einem R_3 liegen; ein R_1 und ein R_2, wenn sie einen R_0 gemein haben oder in

einem R_2 liegen; die Incidenz ist in den zwei ersten Fällen eine doppelte Bedingung, in den letzten aber eine einfache.

Sind drei unter einander unabhängige R_1 oder R_2 gegeben, so kann man einen vierten finden, der zu allen gegebenen incident ist. Es giebt ∞^4 R_1, die zu zwei unabhängigen R_2 incident sind; in jedem R_3 befinden sich ∞^2 derselben, welche eine lineare Congruenz bilden; durch jeden R_0 gehen ∞^1, welche einen Büschel bilden. Die zu drei unabhängigen R_2 incidenten R_1 betragen ∞^3. Die zu vier unabhängigen R_2 incidenten R_1 betragen ∞^2; jede Ebene enthält zwei derselben, wenn die vier gegebenen R_2 sich in sechs verschiedenen Punkten schneiden, deren keine drei in gerader Linie liegen. Alle zu ihnen incidenten Geraden begegnen einem fünften durch die anderen eindeutig bestimmten R_2, welcher mit den gegebenen eine „symmetrische Gruppe von fünf associirten Ebenen" bildet. Dualistische Betrachtungen führen zu einer „symmetrischen Gruppe von fünf associirten Geraden". — Bemerkt man noch, dass zu drei R_2 und einem R_1 drei R_1 incident sind, so sieht man, dass alle zu drei R_2 und einem R_1 incidenten R_1 eine kubische Regelfläche erzeugen, während die zu vier R_2 incidenten R_1 eine kubische Mannigfaltigkeit bilden. Der Leser kann die Eigenschaften dieser letzteren in dem Aufsatz Sulla varietà cubica con dieci punti doppii dello spazio a quattro dimensioni (vergl. F. d. M. XIX. 1887. 674) oder in der Abhandlung Sulle varietà cubiche ecc. (Siehe das vorangehende Referat) finden.

Sechs unabhängige R_2 sind im allgemeinen zu fünf bestimmten R_1 incident, welche unter sich associirt sind; dualistisch: sechs unabhängige R_1 sind im allgemeinen zu fünf bestimmten unter sich associirten R_2 incident. Endlich: die ∞^1 zu fünf unabhängigen nicht associirten R_1 (oder R_2) incidenten R_2 (oder R_1) sind zu ∞^1 R_1 (oder R_2) incident; jene ∞^1 R_1 (oder R_2) bilden eine Regelfläche, welche das dualistische Gebilde des durch diese ∞^1 R_2 (oder R_1) erzeugte Regelfläche ist; beide Regelflächen sind fünfter Ordnung. La.

C. SEGRE. Sulle curve normali di genere p dei varii spazii. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 523-528.

Es sind zwei Jahre her, dass Herr Segre eine wichtige Formel aufstellte, mit der wir uns im vorigen Bande des Jahrbuchs (F. d. M. XIX. 1887. 671, 679) beschäftigt haben. Als eine neue Anwendung derselben beweist er am Anfange des zu besprechenden Aufsatzes, dass aus ihr der berühmte Clifford'sche Satz abgeleitet werden kann: Eine Curve von dem Geschlecht p und der Ordnung $n > 2p-2$ gehört einem Raume an, dessen Dimension höher als $n-p$ ist. Er benutzt diese Gelegenheit, um das grosse Interesse zu zeigen, welches die Bestimmung des höchsten Wertes der Dimension eines linearen Raumes hat, der eine Curve von dem Geschlecht p und der Ordnung n enthalten kann, unter der Voraussetzung, dass diese Curve nicht allgemeine Moduln besitze. Durch den Beweis eines zweiten mit dieser letzten Frage verbundenen Clifford'schen Satzes wird er dazu geleitet, die Aufmerksamkeit der Geometer auf die Curven von dem Geschlecht p und der Ordnung $2p-2$ zu lenken, welche einem $(p-1)$-dimensionalen Raume angehören; mit diesen Curven haben sich die Gelehrten zwar schon beschäftigt, doch scheinen dieselben weiterer Untersuchungen zu bedürfen. Der Verfasser beweist eine neue Eigenschaft derselben und bemerkt, dass sie für die synthetischen Untersuchungen über eindimensionale Mannigfaltigkeiten mit linearen Transformationen in sich sehr nützlich seien. Zum Schluss macht Herr Segre auf einige interessante Flächen aufmerksam, welche die beste Darstellung der algebraischen Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen zu bieten scheinen. Ihre charakteristische Eigenschaft ist die, dass ihre linearen Schnitte auf einer Fläche unseres Raumes durch die Durchschnitte derselben mit ihren adjungirten Flächen dargestellt werden. La.

C. SEGRE. Un' osservazione sui sistemi di rette degli spazii superiori. Palermo Rend. II. 148-149.

Als Analoga der ∞^2 Strahlensysteme in unserem gewöhn-

lichen Raume kann man im n-dimensionalen linearen Raume die ∞^{n-1} Strahlensysteme ansehen und sich die Aufgabe stellen, die Eigenschaften der ersteren auf die letzteren auszudehnen. In dem zu besprechenden Aufsatze wird diese Ausdehnung für die ersten Focaleigenschaften ausgeführt. Zuerst findet der Verfasser, dass im allgemeinen jeder Strahl des Systems durch $n-1$ unendlich nahe Strahlen desselben in ebensovielen Punkten geschnitten wird, welche „Brennpunkte" des Systems genannt werden. Im allgemeinen bilden die Brennpunkte eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, welche von jedem Strahl des Systems in den bezüglichen Brennpunkten berührt wird. Aber diese $n-1$ Berührungsbedingungen mit einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit können, zum Teil oder im ganzen, durch Berührungs- oder Schnittbedingungen mit Mannigfaltigkeiten anderer Dimension vertreten werden; so hat in unserem Raume im allgemeinen ein Strahlensystem eine Brennfläche; aber es kann auch eine Brennfläche und eine Brenncurve, oder zwei Brenncurven haben. La.

G. Castelnuovo. Sopra una congruenza del 3° ordine e 6ª classe dello spazio ordinario e sulle sue projezioni nello spazio ordinario. Ven. Ist. Atti. (6) V. 1249-1281.

G. Castelnuovo. Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a quattro dimensioni. Ven. Ist. Atti. (6) VI. 525-579.

Sind in dem n-dimensionalen linearen Raume R_n $(n-1)$ projective aus R_{n-1} bestehende Grundgebilde zweiter Stufe gegeben, so ist ein System von ∞^2 Geraden R_1 bestimmt, von denen jedes Element der Durchschnitt von $n-1$ entsprechenden R_{n-1} ist. Der Analogie wegen kann man dieses System „Congruenz", die Zahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ihrer einen beliebigen R_{n-3} schneidenden Geraden ihre „Ordnung", und die Zahl $\frac{1}{2}n(n-1)$ ihrer in einem beliebigen R_{n-1} enthaltenen Geraden ihre „Klasse" nennen. Auf die Wichtigkeit solcher Gebilde macht der Verfasser in der Einleitung zur ersten Abhandlung aufmerksam, deren Titel wir in der Ueberschrift gegeben haben; nachher aber

beschäftigt er sich ausschliesslich mit dem besonderen Falle $n = 4$. Dies genügt gewiss um zu beweisen, dass die Untersuchungen, über welche wir jetzt berichten sollen, denselben Zweck verfolgen wie einige derjenigen, welche den Gegenstand der Segre'schen Abhandlung Sulle varietà cubiche u. s. w. (siehe S. 662) bilden, und von welchen ein Teil sich schon in dem Aufsatze desselben Verfassers Sulla varietà cubica con dieci punti doppii (F. d. M. XIX. 1887. 673) befindet. Wir beschränken uns auf diesen allgemeinen Hinweis der vielen Berührungspunkte zwischen den Castelnuovo'schen und den Segre'schen Arbeiten, ohne sie in allen Fällen zu verfolgen; dass dies ganz zufällig ist, wird durch beide Verfasser ausdrücklich erklärt.

Es seien $d^{(1)}$, $d^{(2)}$, $d^{(3)}$ drei Gerade von R_4 in einer ganz allgemeinen Lage, und zwischen den $\infty^2 R_2$, welche durch sie gehen, sei eine projective Beziehung festgestellt. Es giebt dann $\infty^3 R_1$, durch welche drei entsprechende Räume gehen; sie bilden eine Congruenz sechster Ordnung und dritter Klasse, welche wir mit Γ_6^3 bezeichnen wollen. Diese Geraden bilden (um die Benennungen des Verfassers zu gebrauchen) eine dreidimensionale kubische Fläche F_3^3, bei der die Geraden von Γ_6^3 „Erzeugende" genannt werden. Aber F_3^3 enthält noch andere Geraden; einige derselben bilden eine zweite Congruenz Γ_6^3, welche der vorigen ganz ähnlich ist und daher durch Δ_6^3 bezeichnet wird, während ihre Elemente „Directrices" genannt werden; die übrigen bilden eine dritte Congruenz 12ter Ordnung und 15ter Klasse, deren Elemente „Axen" heissen. Bei der Unmöglichkeit, alle die Beziehungen anzudeuten, welche der Verfasser zwischen den Erzeugenden, den Directrices und den Axen aufstellt, bemerken wir nur, dass zwei beliebige Erzeugende durch vier Directrices getroffen werden und umgekehrt. Die Fläche F_3^3 hat sechs Doppelpunkte, welche aus jeder Axe auf jede Ebene in sechs Punkte eines Kegelschnitts projicirt werden. Durch jeden Punkt von F_3^3 gehen eine Erzeugende, eine Directrix und eine Axe; diese sechs Geraden gehören einer die dreidimensionale F_3^3 berührenden Ebene und einem Kegel zweiter Ordnung an. Die Klasse von F_3^3, d. h. die Zahl der dreidimensionalen

Räume, die durch eine beliebige Ebene gehen und F_3^2 berühren, ist gleich 12.

Bezieht man ein beliebiges Punktfeld und eines (und daher jedes) der die F_3^2 erzeugenden Gebilde projectiv aufeinander, lässt man ferner einen Punkt des Feldes und die Gerade, welche den drei entsprechenden R_3 gemein ist, sich entsprechen, so gelangt man zu einer einfachen eindeutigen Abbildung von Γ_6^2, welche man benutzen kann, um diese Congruenz zu untersuchen.

Projicirt man aus einem Punkt P von R_4 die drei obigen Congruenzen auf den gewöhnlichen Raum, so erhält man drei Congruenzen (im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes). Fällt P nicht auf F_3^2, so sind zwei dieser Congruenzen (3, 6) und die dritte (15, 12). Die zwei ersten haben ganz dieselben Eigenschaften; jede hat sechs kubische rationale Strahlenkegel, von denen jeder durch die Mittelpunkte der anderen geht. Durch jeden Kegelmittelpunkt geht ferner ein Strahl der Congruenz. Diese hat sechs nicht durch denselben Punkt gehende Doppelstrahlen; ihre Brennfläche ist sechster Ordnung und 12ter Klasse und hat als Cuspidalcurve den Durchschnitt einer quadratischen mit einer kubischen Fläche, ausserdem sechs Doppelpunkte; ihre Bitangenten, welche der erwähnten Congruenz nicht angehören, bilden die beiden anderen Congruenzen, von denen wir gesprochen haben. Fällt umgekehrt P auf F_3^2, so erhält man zwei Congruenzen (2, 6) und eine (8, 15): die zwei ersten sind die durch die Kummer'schen Arbeiten wohl bekannten Congruenzen zweiter Ordnung, sechster Klasse, zweiter Art; der Verfasser bestimmt ihre wichtigsten bekannten Eigenschaften und noch andere neue.

Dies sind die hauptsächlichsten Resultate, zu denen der Verfasser in der ersten der in Rede stehenden Abhandlungen gelangt. Der Zweck der zweiten ist eine Untersuchung der Veränderungen, welche sie erleiden, und der Vermehrung, welche sie erlangen, wenn zu den Voraussetzungen der Frage einige Besonderheiten treten; und, um uns bestimmter auszudrücken, wenn bei den drei erzeugenden Gebilden $h (= 1, 2, 3, 4)$ Ternen entsprechender Räume durch ebensoviele Ebenen gehen. Die Ordnung der erzeugten Congruenz ist immer 3, während ihre

Klasse 6—h wird; die dreidimensionale Fläche F_3^2 hat Doppelpunkte und enthält die besagten h Ebenen und $\frac{1}{2}h($ andere. Diese Sätze (und noch andere, welche wir der wegen unterdrücken) werden von dem Verfasser für $h = 1$ aus seiner ersten Abhandlung abgeleitet. Den Fall $h = 4$ studirt er, indem er sich die Aufgabe stellt: die Eigensch des Systems zu bestimmen, das durch die Geraden gebildet welche drei beliebige R_2 von R_4 treffen; im Laufe der U suchung stösst Herr C. auf eine höchst bemerkenswerte Co ration in R_4, welche aus 15 Ebenen und 10 Punkten be durch jeden dieser Punkte gehen sechs jener Ebenen, und in Ebene befinden sich vier Punkte; die Erforschung der v eleganten Eigenschaften dieser Configuration bilden einen i essanten Abschnitt der Arbeit.

Projicirt man die Geraden von F_3^2 aus einem der Fl nicht angehörigen Punkte, so erhält man in dem gewöhnli Raume $h+2$ Congruenzen $(3, 6-h)$ und eine $\left(3(4-h), \binom{6-}{2}\right.$ mit derselben Brennfläche; Ordnung und Klasse dieser Fl sind gleich $2(6-h)$; sie hat $6+h$ Doppelpunkte, $\frac{1}{2}h(h+3)$ dop berührende Ebenen und eine auf einer quadratischen Fläche legene Cuspidalcurve sechster Ordnung. Projicirt man F_3^2 einem ihrer Punkte, so erhält man Congruenzen (2, 5), (2 (2, 3), (2, 2), welche so aus einem neuen Gesichtspunkte trachtet werden; um uns z. B. auf die quadratischen Congruen zu beschränken, so sieht man sehr leicht, dass diese ei linearen Complex angehören, und kommt zu dem bekann Klein'schen Satze über die Gleichheit zwischen dem Doppelv hältnis der vier Durchschnittspunkte einer Geraden mit ei Kummer'schen Fläche und der vier Berührungsebenen derselb welche durch jene Gerade gehen.

Viele andere der gewöhnlichen und der vierdimensiona Geometrie angehörige Sätze befinden sich in den Originalarbeit welche als ein nicht unwichtiger Beitrag zur synthetisch vierdimensionalen Geometrie angesehen werden müssen.

La.

G. CASTELNUOVO. Geometria sulle curve ellittiche. Torino Atti. XXIV. 4-22.

Die klassische Abhandlung von Brill und Nöther: Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung auf die Geometrie (Math. Annalen VII) hat es unter anderem in ein klares Licht gestellt, von welcher Wichtigkeit für die Untersuchungen der Geometrie auf einer Curve die Betrachtung der Reihe von n-punktigen Gruppen g_n^r ist, von denen eine endliche bestimmte Zahl r beliebige Punkte der Curve enthält, und insbesondere der Involutionen I_n^r beliebiger Ordnung und beliebiger Stufe. Und dass diese Wichtigkeit nicht auf die ebenen und räumlichen Curven beschränkt sei, wird durch Arbeiten bewiesen, über welche in den vorigen Bänden des Jahrbuchs (z. B. XIX. 677) berichtet wurde. Die neue Arbeit des Herrn C., welche uns beschäftigen soll, hängt mit diesen letzteren zusammen, wie der Leser jetzt aus der folgenden kurzen Inhaltsangabe erkennen wird.

Die Gruppen g_n^r können auf die Punkte einer r-dimensionalen Mannigfaltigkeit eindeutig bezogen werden; dann werden die invariantiven Charaktere dieser Mannigfaltigkeit die Charaktere von g_n^r geben; insbesondere, wenn $r = 1$ ist, kann man vom Geschlechte einer g_n^1 sprechen. Eine Einteilung der algebraischen Curven kann sich auf die Betrachtung der rationalen Reihen von Punktgruppen stützen, welche sie enthalten, und man kann in dieselbe Klasse alle Curven setzen, für welche die kleinste Ordnung n der rationalen I_n^1 dieselbe ist; jede Klasse kann nachher in Unterklassen eingeteilt werden, indem man die Involution nächst höherer Ordnung betrachtet. Eine wichtige Bemerkung ist die, dass zwei eindeutig auf einander bezogene Curven immer einer und derselben Klasse angehören. Ferner, befindet sich auf einer Curve C eine rationale Reihe g_n^r, $r > 1$, so kann man in dem r-dimensionalen Raume R_r eine auf C eindeutig bezogene Curve C' bestimmen. Unter den zahlreichen Folgerungen, welche man aus diesem Satz ableiten kann, bemerken wir nur diese: Bilden alle n-punktigen Gruppen einer Curve eine rationale Reihe, so ist auch die Curve rational.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen unternimmt de
fasser die Erforschung derjenigen Curven (der elliptischen), w
durch die Eigenschaft charakterisirt sind, zwei rationale
Involutionen kleinster Ordnung und infolge dessen unendlich
ähnliche Involutionen zu haben. Solche Curven kann es in
Raume geben. Selbst in R_n befindet sich eine von der Or
$n+1$ („Normalcurve" genannt), welche mit einer beliebigen
benen elliptischen Curve in eindeutiger Beziehung steht.
elliptische Normalcurve hat die bemerkenswerte Eigenschaft,
Reihe von I_n^{n-1} zu besitzen, die mit n^2 n-fachen Punkten
sehen sind. Zwei in eindeutiger Beziehung stehende ellipt
Normalcurven bestimmen unendlich viele birationale Transfo
tionen ihrer Räume, in welchen die Punkte einer Curve
Punkten der anderen entsprechen (dieser Satz ist eine Vera
meinerung eines von Herrn Segre herrührenden).

Wir erinnern daran, dass es zweierlei eindeutige Tr
formationen einer elliptischen Curve in sich selbst giebt (W
Wiener Sitzungsberichte LXXXVII); jede ist durch zwei
sprechende Punkte bestimmt. Bezeichnet man mit $[a, b]$,
der Verfasser vorschlägt, die durch die entsprechenden Pu
a, b bestimmte Transformation zweiter Art, so kann man
folgenden wichtigen Satz aussprechen: Wenn zwei R_{n-1} von
eine elliptische Normalcurve dieses Raumes in den Punktgrup
$(a_0 a_1 \ldots a_n)$, $(a'_0 a'_1 \ldots a'_n)$ schneiden, so ist das Product der n
Transformationen $[a_0, a'_0]$. $[a_1, a'_1]$, $\ldots$, $[a_n, a'_n]$ der Einheit glei
und geben umgekehrt die n Transformationen $[a_1, a'_1]$, $\ldots$, $[a_n$
als Product die Einheit, so begegnen die durch die zwei Grupp
$(a_1 a_2 \ldots a_n)$ und $(a'_1 a'_2 \ldots a'_n)$ bestimmten R_{n-1} der Curve in de
selben Punkte.

Der Verfasser wendet sich alsdann zu den nicht rational
Involutionen erster Stufe und beweist zuerst, dass alle elliptis
sind. Sind $(a_1^{(1)} a_2^{(1)} \ldots a_n^{(1)})$, $\ldots$, $(a_1^{(n)} a_2^{(n)} \ldots a_n^{(n)})$ n Gruppen ein
Involution I_n, welche sich auf einer elliptischen Normalcur
von R_n befindet, so begegnen die n durch die folgenden Pun
gruppen $(a_r^{(1)} a_r^{(2)} \ldots a_r^{(n)})$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ bestimmten de

R_{n-1} in einem und demselben Punkte. Dies hat insbesondere statt für die n Osculationsräume der Curve in den Punkten einer Gruppe von I_n. Die Zahl der I_n einer elliptischen Curve ist $n+1$, wenn $n+1$ eine Primzahl ist; ferner

$$n\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\cdots,$$

wenn $\alpha, \beta, \ldots$ die Factoren von n sind. Ist die Curve eine normale in R_n, so bestimmt jede dieser Involutionen

$$n\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\cdots$$

cyklische Collineationen, deren jede alle die Gruppen von I_n in sich selbst transformirt.

In dem letzten Teil seiner Arbeit bestimmt Herr Castelnuovo zuerst eine eindeutige Beziehung zwischen den n-punktigen Gruppen einer elliptischen Curve und einer Mannigfaltigkeit von R_n und findet, dass diese durch eine elliptische Reihe von $\infty^1 R_{n-1}$ gebildet ist. Jeder dieser R_{n-1} entspricht einem Punkte der Curve eindeutig. Dann hebt der Verf. für eine Reihe $g_n^{(1)}$ die Wichtigkeit zweier Zahlen oder „Indices" i, j hervor, von denen der erste die Zahl der Gruppen der Reihe ist, welche einen beliebigen Punkt des Trägers enthalten, während der zweite die Zahl der Gruppen der Reihe ist, welche einer beliebigen I_n^{n-1} angehören. Diese zwei Indices sind mit dem Geschlecht π der Reihe durch die folgende Gleichung verbunden:

$$\pi = \frac{(j-1)(ni-j)}{n(n-1)} + 1.$$

Wie nützlich die Indices sind, ist aus den schönen Sätzen ersichtlich, welche den Aufsatz schliessen; unter ihnen wollen wir nur denjenigen anführen, welcher lehrt, dass die Zahl der Gruppen einer g_n^r, welche ein $(r+1)$-faches Element haben, gleich $(r+1)(ni-rj)$ ist. La.

M. Pieri. Sopra un teorema di geometria a n dimensioni. Batt. G. XXVI. 351-354.

Der in Frage stehende Lehrsatz kann auf folgende Weise

ausgedrückt werden: „Ist die Summe der Dimensionen zweier algebraischen Mannigfaltigkeiten, welche in demselben linearen Raume enthalten sind, kleiner als die Dimension dieses Raumes, so haben sie eine algebraische Mannigfaltigkeit gemein, deren Ordnung gleich dem Producte der Ordnungen der gegebenen Mannigfaltigkeiten ist".

Derselbe wurde schon von Halphen analytisch bewiesen (S. M. F. Bull. II. 34). Der Verfasser will ihn durch geometrische Betrachtungen herleiten; er erreicht sein Ziel durch eine Anwendung des Correspondenz-Princips in einem beliebigen linearen Raume, indem er klarlegt, dass, wenn der Lehrsatz in einem $(d-1)$-dimensionalen Raume wahr ist, er auch in einem d-dimensionalen gilt. Wir können sagen, dass das Ziel erreicht wird; denn für $d=2$ oder $d=3$ ist das Theorem schon von Chasles und Fouret geometrisch bewiesen worden. La.

E. Abzählende Geometrie.

C. Küpper. Die Abzählung als Fehlerquelle in der modernen Geometrie. Math. Ann. XXXII. 282-289.

Der Verfasser wendet sich gegen das von de Jonquières in den Comptes rendus (s. F. d. M. XIX. 1887. 684) aufgestellte Princip zur projectivischen Erzeugung einer Curve $(n+n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit Doppelpunkten aus zwei Büscheln n^{ter} und n_1^{ter} Ordnung, wobei die Doppelpunkte als Basispunkte der beiden Büschel benutzt werden. Es wird nämlich daselbst das Maximum der zulässigen Zahl von Doppelpunkten dadurch ermittelt, dass eine gewisse Anzahl unbekannter Basispunkte durch projectivische Beziehungen festgelegt wird. Der Verfasser zeigt nun, unter specieller Vorführung der von de Jonquières behandelten Fälle $n_1 = n$ und $n_1 = n+1$, dass durch projectivische Beziehungen niemals so viele Punkte bestimmt werden können, als zur Vervollständigung der Basen ausser den Doppelpunkten noch erforderlich sind, und weist an speciellen Zahlenbeispielen der

Widerspruch der durch das de Jonquières'sche Princip gewonnenen Resultate mit bekannten Thatsachen nach. Auch der angebliche Ausnahmefall C^6 wird richtig gestellt. Schliesslich wird festgestellt, dass für die Möglichkeit der Erzeugung neben der Anzahl der Doppelpunkte noch die Zahl der durch sie ausgedrückten Bedingungen und die Lage dieser Punkte in Frage kommt, wenn das mit diesen Punkten zusammenhängende Abzählungsverfahren zuverlässige Resultate liefern soll. Schg.

C. KÜPPER. Ueber die auf einer Curve m^{ter} Ordnung C_p^m vom Geschlecht p von den ∞^2 Geraden G der Ebene ausgeschnittene lineare Schar $g_m^{(2)}$. Math. Ann. XXXI. 291-301.

Man vergleiche Prag. Ber. 1887. 477-485 und 609-612, worüber F. d. M. XIX. 1887. 684 und 686 berichtet worden ist. T.

G. FOURET. Sur la détermination de l'ordre de la surface lieu des points dont les distances à des surfaces algébriques données vérifient une relation algébrique donnée. Soc. Philom. Mém. 77-83.

Es seien k algebraische Flächen $F_1, \ldots, F_k$ von den Ordnungen $m_1, \ldots, m_k$, den Rängen $n_1, \ldots, n_k$ und den Klassen $r_1, \ldots, r_k$, von denen keine den imaginären Kugelkreis enthält, gegeben. Ferner seien die immer auf passender Normale gerechneten Entfernungen eines Punktes P von allen diesen Flächen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$. Wenn nun zwischen diesen Entfernungen δ eine algebraische Relation besteht, so wird P eine Fläche beschreiben, deren Ordnung der Verfasser in der vorliegenden Arbeit bestimmt. Unter anderem ergiebt sich, dass die Ordnung der gesuchten Fläche $2(m_1+n_1)+r_1$ wird, wenn der bewegliche Punkt von einem Punkte und der Fläche F_1 gleichen Abstand haben soll. Soll die Summe der Quadrate der Abstände von den k Flächen constant sein, so ist die Ordnung der von dem Punkte beschriebenen Fläche $2(m_1+n_1+r_1)(m_2+n_2+r_2)\ldots(m_k+n_k+r_k)$. Scht.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Lehrbücher, Coordinaten.

G. SALMON und W. FIEDLER. Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. 5te umgearbeitete Aufl. Teil II. Leipzig. Teubner. XX, 433-809 S. gr. 8°.

Dieser zweite Teil, welcher die Capitel XIV bis XXII enthält, beschäftigt sich zunächst mit linearen Systemen von Kegelschnitten (XIV), mit den projectivischen Eigenschaften (XV), mit speciellen homogenen Gleichungsformen (XVI), mit der allgemeinen Gleichungsform (XVII), mit der Invariantentheorie binärer Formen (XVIII) und der Invariantentheorie der Kegelschnitte (XIX). Besonderes Interesse bietet das XX. Capitel dar, in welchem die analytischen Grundlagen der Metrik behandelt werden. Durch dieses Capitel wird einerseits in mehr praktischer Hinsicht der Uebergang von metrischen zu allgemeinen Relationen und umgekehrt vermittelt, andererseits wird auf eine sehr zweckmässige Weise ein Uebergang zu den theoretischen Untersuchungen der absoluten Geometrie gewonnen, bei welcher die euklidische (parabolische) Geometrie als specieller Fall erscheint, und ihr Zusammenhang mit der elliptischen Geometrie, als deren Repräsentant in gewissem Sinne die Sphärik angesehen werden kann.

und mit der hyperbolischen sich in sehr anschaulicher Weise ergiebt. Es ist freilich bei dieser, wie bei vielen anderen Darstellungen des Gegenstandes, darauf hinzuweisen, dass jede Einführung in die absolute Geometrie, welche sich auf Rechnungen stützt, deren Grundlagen ohne die euklidische Geometrie nicht aufrecht zu erhalten sein dürften, theoretisch nicht vollständig befriedigt, dass vielmehr eine theoretisch befriedigende Einführung in die Elementargeometrie gehört und nicht durch Rechnung, sondern durch genaue Prüfung und sorgfältige Formulirung der Axiome geschehen muss, worauf gerade die Studirenden immer wieder aufmerksam gemacht werden müssten.

Die beiden letzten Capitel handeln von den reciproken Verwandtschaften (XXI) und von der Methode der Projection (XXII). Die bekannten Vorzüge des Buches, welche in grosser Vielseitigkeit, klarer Darstellung und beständiger Verknüpfung der allgemeinen Theorien mit einfachen Anwendungen und Beispielen bestehen, treten auch in der neuen Bearbeitung auf das vorteilhafteste hervor. A.

H. Ganter und F. Rudio. Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium dargestellt und mit zahlreichen Uebungsbeispielen versehen. Leipzig. B. G. Teubner. VIII. u. 166 S. gr. 8°.

In diesem Buche sind die Hauptlehren der ebenen analytischen Geometrie, soweit sie sich auf den Punkt, die Gerade, den Kreis und die Kegelschnitte beziehen, gegeben. Es sind von vorne herein bestimmte, einem ersten Studium entsprechende Grenzen eingehalten; es fehlt z. B. die Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Veränderlichen. Dafür ist aber das Gegebene in sich abgeschlossen, streng wissenschaftlich und sehr deutlich dargestellt, so dass das Buch sehr gut als Grundlage des Unterrichts in der analytischen Geometrie der Ebene auf einem Gymnasium oder Realgymnasium dienen kann. Zahlreiche Uebungsbeispiele tragen zum besseren Ver-

ständnis und zur Durcharbeitung des Ganzen bei: auch ist die äussere Ausstattung des Buches gut, so dass dasselbe sehr wohl zum Gebrauch empfohlen werden kann. Mz.

L. VIGLIANE. Lecciones de geometria analytica. Buenos-Ayres.

Dieses Werk enthält die Vorlesungen des Verfassers an der Universität von Buenos-Ayres in den Jahren 1885 und 1886. Tx.

Weitere Lehrbücher.

F. ASCHIERI. Geometria analitica dello spazio. Milano. Manuale Hoepli.
S. F. d. M. XIX. 1887. 690.

J. CASEY. Tratado de geometria analytica. Buenos-Ayres.
Spanische Uebersetzung von Herrn J. Casey's Analytical Geometry durch Herrn Balbin, Professor an der Universität von Buenos-Ayres. Tx.

J. M. GABUTTI y M. R. MONLLEO. Teorías de la notacion abreviada, dualidad y transformacion de figuras, sequidas de varios apuntes de geometría analítica. Madrid. 103 S. u. 2 Taf.

J. VAN HENGEL. Eine Auswahl aus der analytischen Geometrie der Ebene. Pr. Gymn. Emmerich. R. M.

A. IMBER et M. WEILL. Cours de géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'École Centrale et à l'École Polytechnique. Paris. 1000 S. gr. 8°.

J. D. RUNKLE. Plane analytic geometry. Boston.

G. SALMON. Tratado de geometría analítica (Secciones conicas). Traducido de la 6. edicion inglesa por L. de la Puente. Ferrol. XIV u 578 S.

H. SONNET et G. FRONTERA. Éléments de géométrie analytique. 7e éd. Paris. 758 S.

M. Viparelli. Geometria analitica applicata alle arti. Libro I. Torino. 82 S. u. 12 Taf.

H. Westermann. Die analytische Geometrie auf der Schule und das Rechnen mit Hülfe der Logarithmen. Riga VI u. 141 S.

P. J. Hollman. Verzameling van vraagstukken op het gebied van de .analytische meetkunde der ruimte. Derde gedeelte. Alkmaar. H. Coster & Zoon. 112 S.

Fortsetzung und Schluss des früher erwähnten Werkes (Siehe F. d. M. XIX. 1887. 795). Die Aufgaben, die hier gestellt und gelöst werden, beziehen sich auf Gleichungen von Oberflächen von einem höheren als dem zweiten Grade.

G.

P. J. Hollman. Verzameling van vraagstukken op het gebied der analytische meetkunde van het platte vlak. Alkmaar. Coster & Zoon. 170 S.

Eine Sammlung von 100 Aufgaben mit ihren Auflösungen über die analytische Geometrie der Ebene mit Hülfe der Differential- und Integralrechnung. G.

Fr. Graefe. Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere der Flächen zweiten Grades. Für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen bearbeitet. Leipzig. Teubner. XIV u. 127 S. gr. 8°.

Die Sammlung besteht aus 936 Aufgaben, welche sich an die Lehrbücher von Hesse und Salmon anschliessen, und ist nach ähnlichen Gesichtspunkten gearbeitet wie des Verfassers „Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte" (F. d. M. XVII. 1885. 689). Ausser den Zahlenbeispielen zur Einübung der Begriffe bestehen die ersten 796 Aufgaben im wesentlichen

aus solchen Sätzen und Constructionen, welche im Vortrage über analytische Geometrie oder in den ausführlicheren Lehrbüchern erledigt werden. Als selbständig zu bearbeitende Aufgaben würde eine grosse Anzahl von ihnen zu schwer sein, wie z. B. Nr. 523: „Bestimme den Ort der Hauptkrümmungsmittelpunkte einer Fläche zweiten Grades". Die Lösung dieses Problems hat ja mehrere hochstehende Mathematiker beschäftigt. Was Referent über die erste Sammlung bemerkte, dass nämlich die Fassung vieler Aufgaben der Genauigkeit ermangelte, gilt auch für die gegenwärtige. Man beachte z. B. Nr. 599: „Bestimme die Tangentenebenen eines Hyperboloides mit einer Mantelfläche, welche die Fläche schneiden". No. 653: „Der Schnitt eines Ellipsoides durch die Tangentenebene des Asymptotenkegels eines confocalen Hyperboloides ist von constanter Länge". Aufgabe 292 verlangt den Nachweis der Existenz der beiden Systeme von Geraden:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=l\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad l\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b}$$

auf dem einschaligen Hyperboloid. Offenbar ist dies aber nur das eine System; das andere ist ausgelassen. Lp.

J. Koehler. Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure. Questions et Solutions. IIe Partie. Géométrie de l'espace. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Anzeige des ersten und des zweiten Teiles dieser Sammlung in Darboux Bull. XII$_1$. 158-163.

Ch. Brisse. Recueil de problèmes de géométrie analytique, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Solutions des problèmes donnés au concours d'admission à l'École Centrale, depuis 1862. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. Jacquier. Application de la géométrie à la science des nombres. Interprétation des théorèmes et des discussions de l'algèbre élémentaire au moyen de la géométrie des courbes, etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. Lemoine. Des systèmes de coordonnées qui déterminent le plus simplement un point par une construction. S. M. F. Bull. XVI. 162-172.

Bei seinen Bemühungen, einen Punkt in der Ebene durch eine einfachere Construction zu bestimmen, als es in den gebräuchlichen Coordinaten-Systemen geschieht, ist der Verfasser zu dem folgenden Systeme gelangt: Er wählt drei feste Punkte A, B, C, zieht CA und CB, verbindet den zu bestimmenden Punkt M mit A und B. Schneiden sich nun AM und CB in X, BM und AC in Y, so werden CX und CY als die Coordinaten des Punktes M betrachtet. Die gerade Linie wird in diesem System durch eine Gleichung zweiten Grades dargestellt. Rücken A und B resp. auf CA und CB ins Unendliche, so werden CX und CY die gewöhnlichen cartesischen Coordinaten des Punktes M. In entsprechender Weise lässt sich das cartesische System im Raum erweitern. F.

V. Gattoni. Determinazione di un punto rispetto ad altri noti di posizione. Caserta. 28 S. mit Taf.

Fr. Hofmann. Parameterdarstellung von orthogonalen Substitutionen, welche identisch umkehrbar sind, auf geometrischem Wege. Schlömilch Z. XXXIII. 381-384.

Schneidet eine durch den Punkt $(abcd)$ gehende Gerade die Fläche $F = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$ in den Punkten $(x_1 y_1 z_1 w_1)$ und $(x_2 y_2 z_2 w_2)$, so liefern die durch $(x_1 y_1 z_1 w_1)$ und $(abcd)$ ausgedrückten Werte der Coordinaten x_2, y_2, z_2, w_2 ein System von Ausdrücken, deren Quadratsumme wieder gleich Null ist. Die

Wiederholung dieser Transformation führt auf die x_1, y_1, z_1, w_1 zurück. Setzt man $(xyzw)$ statt $(x_1\ y_1\ z_1\ w_1)$ $(XYZW)$ statt $(x_2 y_2 z_2 w_2)$, so ist die Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = 0$$

bis auf einen Factor mit $F = 0$ identisch. Hieraus ergeben für die Coefficienten dieser Substitution Eigenschaften, w dieselbe als eine involutorisch-orthogonale, identisch umkeh erscheinen lassen. Dieses Resultat wird auf n Verände ausgedehnt und (für $n = 3$) aus den Hermite-Cayley'schen meln für orthogonale Substitutions-Coefficienten abgeleitet.

Schg.

E. Padova. Sulla teoria delle coordinate curvili
Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_2. 369-376.

Die Theorie der krummlinigen Coordinaten von Brioschi die der Minimalflächen von Beltrami werden ausgedehnt einen krummen dreidimensionalen Raum und allgemeine Co naten. In letzterer Beziehung wird gefunden, dass die partie Differentialgleichungen, welche die Minimal-Flächen und Flächen relativer Nullkrümmung definiren, bei Anwendung Differentialparametern dieselbe Form annehmen wie im eukl schen Raume, bezogen auf allgemeine Parameter. *H.*

K. Baer. Parabolische Coordinaten in der Ebene u im Raume. Pr. Rg. Frankfurt a. O.

Diese Arbeit hat den Zweck, eine übersichtliche und sys matische Darstellung der verschiedenen Arten parabolischer (ordinaten zu geben, den Zusammenhang dieser mit ander Coordinaten zu erläutern und verschiedene vorteilhafte Verwe dungen derselben in der Theorie der Abbildungen, der graphisch Darstellungen, des Potentials u. s. w. darzulegen. Es wechse dabei eigene Untersuchungen des Verfassers mit den Resultate anderer Autoren, namentlich von Holzmüller und Günther, a Die Definition der ebenen parabolischen Coordinaten schlies sich an die conforme Abbildung an. Unter den weiterhin be

handelten Gegenständen seien hervorgehoben: Der Zusammenhang mit elliptischen und Polarcoordinaten, die graphische Darstellung der Pythagoreischen Dreieckszahlen, die Darstellung verschiedener geeigneter Curven in parabolischen Coordinaten, die Methode der Inversion und die graphische Darstellung der Logarithmen im Anschluss an die logocyklische Curve. — Im Raume, wo drei Systeme orthogonaler Flächen zur Verwendung kommen, fällt die Coordinatenbestimmung verschieden aus je nach der Art der zu Grunde gelegten parabolischen Flächen. Alle diese Fälle werden eingehend discutirt, und die wichtigsten fundamentalen Aufgaben, namentlich die Bestimmung von Linien- und Flächenelementen, mittels der verschiedenen Systeme gelöst.

Schg.

H. G. SCHULZ. Lemniskatische Polarcoordinaten mit ihren Beziehungen zu den gewöhnlichen Polarcoordinaten und den rechtwinkligen Parallelcoordinaten. Pr. Realprogymn. Pillau. 29 S. 4° u. 1 Taf.

Ist $w = u + iv$ ein Punkt der w-Ebene und $z = x + iy$ ein Punkt der z-Ebene, so entspricht vermöge der Abbildung

$$w = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

(nach Holzmüller) der Schar concentrischer Kreise um den Nullpunkt der w-Ebene eine Schar confocaler Lemniskaten n^{ter} Ordnung in der z-Ebene, und dem Büschel der durch den Nullpunkt gehenden Geraden ein Büschel von Hyperbeln n^{ter} Ordnung. Das Netz gewöhnlicher Polarcoordinaten geht also durch obige Transformation in ein Netz lemniskatischer Polarcoordinaten n^{ter} Ordnung über. Der Verfasser untersucht nun die Eigenschaften dieser Coordinaten und die Lagen der Curven für die Specialfälle $n = 2, 3$, sowie für den Fall, dass die Brennpunkte der Lemniskatenschar ein reguläres n-Eck mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt bilden. Auch werden u. a. die gewöhnlichen Coordinaten eines Punktes nebst ihren Differentialen, sowie die nach den Brennpunkten der Lemniskaten gehenden Leitstrahlen und deren Neigungswinkel gegen die Abscissenaxe als Functionen

der lemniskatischen Polarcoordinaten dargestellt. Im allgemeinsten Falle lassen sich, wie der Verfasser an einem Beispiele zeigt, wenigstens die Gleichungen der Lemniskaten und Hyperbeln leicht aufstellen. — Interessant wäre es gewesen, wenn Verfasser mit Hülfe seiner Rechnungen die schon von Holzmüller und Biermann behandelten Sätze über den Zusammenhang des Asymptotenschnittpunktes der Hyperbeln n^{ter} Ordnung mit dem Schwerpunkte der Wurzelpunkte (Brennpunkte) auf neuem Wege bewiesen und Anregungen in dieser Richtung gegeben hätte. Die Anwendungen auf Hydrodynamik, Wärmelehre, Elektrodynamik und Kinematik conform veränderlicher Systeme, in denen der eigentliche Wert dieser Coordinaten beruht, hätten gleichfalls Anlass zu fruchtbaren Untersuchungen gegeben.

Schg.

G. Humbert. Sur l'orientation des systèmes de droites. American J. X. 258-281.

Der Begriff der „Orientirung" eines Systems von geraden Linien rührt von Laguerre her; die Fruchtbarkeit und Bedeutung dieses neuen Princips für die Theorie ebener Curven wird durch die vorliegende ausserordentlich elegante Abhandlung ins hellste Licht gesetzt.

Laguerre definirt: Wenn in einer Ebene zwei Systeme von Geraden, A und A', gegeben sind, wenn in derselben Ebene eine feste Axe H beliebig angenommen wird, wenn endlich die Summe der Winkel zwischen H und den Geraden des Systems A sich von der analogen Summe für das System A' nur um ein Vielfaches von π unterscheidet, soll gesagt werden, die beiden Systeme haben „gleiche Orientirung". Diese Eigenschaft ist offenbar unabhängig von der Lage von H und hängt nur von den Richtungen der gegebenen Geraden ab.

Herr Humbert giebt dieser Definition folgende interessante und schärfere analytische Form: Zu den n Geraden des Systems A seien durch den Anfangspunkt der Coordinaten die n Parallelen

$y-a_\lambda x=0$ ($\lambda=1, 2, \ldots, n$) gezogen; es sei ferner

$$f(x,y)=\prod_{\lambda=1}^{n}(y-a_\lambda x),$$

so kann die Orientirung des Systems A durch den Bruch $\frac{f(1,i)}{f(-1,i)}$ definirt werden. Mit Leichtigkeit ergiebt sich daraus das Fundamentaltheorem: Damit ein veränderliches System von n Geraden, dessen Gleichung einen Parameter rational enthält, dieselbe feste Orientirung behalte, ist nötig und hinreichend, dass jedesmal, wenn eine oder mehrere Geraden des Systems durch einen der unendlich fernen Kreispunkte der Ebene gehen, eine eben so grosse Zahl anderer Geraden des Systems durch den andern Kreispunkt gehen.

Wenn nun unter den bisher unbestimmt gelassenen Geraden fortan Tangenten algebraischer Curven verstanden werden, so bieten sich zwei Hauptfragen dar. Einerseits: Wie muss eine Familie algebraischer Curven beschaffen sein, damit die Systeme der von einem festen Punkte an jede einzelne Curve der Familie zu legenden Tangenten dieselbe Orientirung haben? Andererseits: Wie muss eine algebraische Curve beschaffen sein, damit das System der von einem veränderlichen Punkte an dieselbe zu legenden Tangenten constante Orientirung habe?

Der Verfasser verfolgt zunächst das letztere Problem; es zeigt sich, dass die fragliche Curve ihre sämtlichen Brennpunkte im Unendlichen haben muss. Diese Bedingung wird z. B. erfüllt von allen den algebraischen Hypocykloiden, welche entstehen, wenn ein Kreis im Innern eines grösseren Kreises rollt. Die einfachste derselben ist die so häufig studirte „Hypocykloide mit drei Spitzen". (Die Literatur über dieselbe giebt u. a. Perlewitz im Prog. des Sophien-Realgymnasiums Berlin, Ostern 1890.) Die Tangenten-Eigenschaft, welche hier auf diese Curve geführt hat, scheint bisher noch nicht bemerkt worden zu sein; sie lässt sich in Verbindung bringen mit einem bekannten Resultat aus der Darstellung mittels elliptischer Functionen, auch liefert sie verschiedene Sätze über umbeschriebene Dreiecke und Vierecke der Curve. Der fruchtbarste von diesen lautet: Durch

jede Ecke eines der Hypocykloide umbeschriebenen Dreiecks geht eine neue Tangente der Curve; die drei so bestimmten Tangenten bilden ein neues Dreieck, das dem ersten ähnlich ist. Hiervon ausgehend, kann man nämlich die Fragen beantworten, ob die Reihe der auf diese Weise abzuleitenden Dreiecke unendlich ist, in welchen Fällen sich schliesslich eines der gefundenen Dreiecke auf einen Punkt reducirt, in welchen Fällen die Reihe periodisch wird, wobei reine und unreine Perioden auftreten können, in welcher Weise die Reihe rückwärts fortgesetzt werden kann, u. s. w.

In Verfolg des anderen oben genannten Hauptproblems wird man sich alsbald auf den Fall beschränken, wo die Curven-Familie den Parameter linear enthält; man bekommt dann Sätze über die Brennpunkte einer Schar von algebraischen Curven n^{ter} Klasse, Sätze, welche durch die Einführung des ebenfalls von Laguerre herrührenden Begriffs des „harmonischen Centrums eines Punktsystems in Bezug auf einen andern Punkt" einer eleganten geometrischen Deutung fähig sind. Wird dabei $n = 2$ angenommen, so hat man die Schar der einem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte; der Ort ihrer Brennpunkte ist eine kubische Curve, welche ausser den beiden Kreispunkten noch ihren singulären Brennpunkt enthält, d. h. ihre Tangenten in den beiden Kreispunkten schneiden sich auf der Curve selbst. Enthält die Schar einen Kreis, so hat diese kubische Curve dessen Mittelpunkt zum Doppelpunkt und wird nach Quetelet „focale à noeud" genannt; sie tritt auch bei einigen die confocalen Flächen zweiten Grades betreffenden Aufgaben auf.

Zum Schluss verspricht der Verfasser eine weitere Arbeit, welche die Eigenschaften des harmonischen Centrums der Brennpunkte von Klassencurven ausführlicher behandeln soll.

R. M.

Domsch. Ueber die Darstellung des Imaginären in der Geometrie. Pr. Realgymn. Borna. 24 S. 4°.

Nach einer kurzen und übersichtlichen Darlegung der Ge-

sichtspunkte, nach welchen die complexen Grössen in der Functionentheorie und in der analytischen Geometrie veranschaulicht werden, giebt der Verfasser im Anschluss an die einschlägigen Arbeiten von Lie einen Abriss der Theorie der Gleichungen zwischen zwei complexen Variabeln mit ebenfalls complexen Coefficienten und behandelt demgemäss der Reihe nach imaginäre Punkte, Geraden, Liniencongruenzen, Curven, Doppelverhältnisse, allgemeine Collineation, Correlation und Liniencomplexe. Dabei wird von dem Principe der Uebertragung von Sätzen der ebenen Geometrie in solche des Raumes umfangreicher Gebrauch gemacht. Schg.

G. Tarry. Nouvel essai sur la géométrie imaginaire. Paris. 22 S.

E. Fraschigni. La geometria immaginaria. Bologna. 23 S.

A. Maier. Die in einer Ebene darstellbaren Richtungszahlen. Pr. Realgymn. Karlsruhe. 56 S. 8°.

Unter Richtungszahlen versteht der Verfasser die Zahlen, die man gewöhnlich complexe nennt, die also durch Strecken von bestimmter Länge und bestimmter Richtung repräsentirt werden können. Mittels der in der Statik für die Zusammensetzung von Kräften gebräuchlichen Methoden werden Addition und Subtraction der Richtungszahlen durchgeführt, sodann Producte und Potenzen definirt und die für diese Rechnungsausdrücke geltenden Gesetze abgeleitet. Eine besondere Behandlung erfährt der specielle Fall der imaginären Zahlen. F.

G. Peano. Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. Torino. Bocca. X + 170 S.

Wenn das neue Buch des Herrn Peano durch die Grassmann'schen Ideen angeregt worden ist, so ist es dennoch von

einer solchen Originalität, dass es nimmermehr als eine neue Darstellung der Ausdehnungslehre bezeichnet werden darf. Wir begrüssen seine Veröffentlichung nicht nur deshalb mit Freuden, weil es einen wirklichen Zuwachs der mathematischen Literatur ausmacht, sondern auch weil es zur Verbreitung der Methoden dienen wird, welche in Grassmann's Werken verborgen liegen. Wir versuchen es, im folgenden eine Vorstellung vom Inhalte zu geben.

Die geometrische Rechnung ist ein System von Operationen, die denen der algebraischen Rechnung analog sind, aber an geometrischen Gebilden ausgeführt werden. Nachdem der Verfasser zunächst einige Definitionen und die Elemente der Inhaltsberechnungen erörtert hat, giebt er die Idee der „Formationen" erster, zweiter und dritter Art und der „Masse" einer Formation; darauf zeigt er, wie die Formationen jeder Art unter einander addirt und mit Zahlen multiplicirt werden können, wie man aus zwei beliebigen eine dritte erzeugt, die man fortschreitendes Product oder projicirende Formation von einander nennt.

Eine geometrische Formation kann auf eine einfache charakteristische Form gebracht werden; die Bestimmung dieser Form ist eine Aufgabe, deren Wichtigkeit auf der Hand liegt und die von Herrn Peano für jede Art in den Capiteln II, III und IV seines Werkes gelöst wird.

Zwischen drei auf einer Geraden liegenden Formationen erster Art, zwischen vier in einer Ebene liegenden Formationen zweiter Art und zwischen fünf räumlichen Formationen dritter Art besteht eine Beziehung; es folgt ein Verfahren, um mit Hülfe von Coordinaten die Formationen der verschiedenen Arten einer Geraden, der Ebene und des Raumes zu bestimmen. Nebenbei erörtert der Verfasser das System der Vectoren der Ebene oder des Raumes und erhält dadurch die Grundgleichungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

Die eben skizzirten Untersuchungen bilden die Basis eines neuen Systems der analytischen Geometrie, welches die cartesische in sich fasst. Herr Peano beleuchtet ihre Methoden durch eine grosse Anzahl interessanter Beispiele und geht dann darauf aus, sie der Behandlung der Fragen der infinitesimalen Geometrie

dienstbar zu machen. Zu diesem Zwecke beginnt er mit der genauen Definition der Grenze eines Volumens oder einer Formation und verallgemeinert demnach die gewöhnlichen Regeln zur Grenzberechnung; hierauf dehnt er die Definitionen und die Sätze der Infinitesimalrechnung auf die veränderlichen geometrischen Formationen aus; endlich wendet er diese Ergebnisse auf den Beweis der hauptsächlichsten infinitesimalen Eigenschaften erster Ordnung bei Curven und Oberflächen an.

Die Prüfung der Systeme, die von den Vectoren der Ebene oder des Raumes, oder von den auf einer Geraden, in der Ebene oder im Raume liegenden Formationen einer bestimmten Art gebildet werden, zeigt, dass zwischen ihnen eine auffällige Analogie besteht, und dass diese Systeme (die Herr Peano lineare nennt) gerade alle dadurch charakterisirt werden, dass man für jedes derselben die Gleichheit zwischen zwei Elementen des Systems und ihre Summe, ferner das Product eines Elementes des Systems mit einer ganzen Zahl definiren kann, und schliesslich kennt man ein gewisses Wesen, 0 genannt, dessen Product mit jedem Elemente des Systems gleich 0 ist. Auf diese Systeme kann man die obigen Untersuchungen über die Vectoren und die Formationen anwenden. Die Untersuchungen des Herrn Peano über die Transformationen der linearen Systeme sind einer besonderen Erwähnung wert wegen ihrer Allgemeinheit; ihr Nutzen wird ausserdem durch die hübschen Anwendungen bewiesen, welche der Verfasser davon auf die Geometrie macht.

Als Einleitung zu seinem schönen Buche hat Herr Peano eine Darstellung der Principien der Logik gewählt, um sich ihrer als eines Mittels zur Vereinfachung zu bedienen. Wir können nicht umhin, unsere Befriedigung über diese Neuerung auszusprechen, durch welche dieser so interessante Zweig der exacten Wissenschaften (wie bisher bloss in England und Deutschland) zum Gemeingute der italienischen Lesewelt wird. Herr Peano hat bei seiner Darstellung das Buch des Herrn Schröder „Der Operationskreis des Logikkalküls“ zum Führer genommen; doch hat er den Inhalt desselben zugänglicher gemacht, und zwar durch eine geringere Gedrängtheit, durch gut gewählte Beispiele und

durch Beschränkung auf das Wesentlichste. Für sehr glücklich halten wir die Einführung neuer Symbole zur Bezeichnung von „nichts" und „alles" an Stelle der von Boole vorgeschlagenen und von Herrn Schröder angenommenen Zahlen 0 und 1; dasselbe gilt über die Bezeichnung $(x, y, z, \ldots):\alpha$ zur Darstellung der Klasse derjenigen Gebilde, welche den Bedingungssatz α befriedigen. Zum Schlusse wollen wir bemerken, dass der Verfasser neue Charaktere zur Darstellung der logischen Operationen der Addition und Multiplication gebraucht hat; er bedurfte nämlich der Anwendung der Zeichen $+$ und $\times$ in ihrer gewöhnlichen (arithmetischen) Bedeutung. La. (Lp.)

H. Grassmann. Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und krummen Flächen. II, 1. Pr. Halle a. S. 58 S. 4°.

Die Fortsetzung der Arbeit, über deren ersten Teil in F. d. M. XVIII. 1886. 658 berichtet wurde, bringt die allgemeine Theorie der krummen Flächen in der damals charakterisirten vereinfachten Darstellung. Vorausgeschickt ist in dem für diesen Zweck erforderlichen Umfange ein Abriss der Determinantentheorie in der bekannten, durch Anwendung der äusseren Multiplication vereinfachten Gestalt. Die Gleichung einer Fläche erscheint in der Form

$$x = x(\vartheta, \omega),$$

wobei $x = OP$, O ein fester, P ein auf der Fläche beweglicher Punkt ist, und ϑ, ω zwei variable Zahlgrössen bedeuten. Die Gleichungen $\vartheta =$ const., $\omega =$ const. bestimmen auf der Fläche zwei Curvenscharen, und für das zwischen zwei unendlich nahen Curvenpaaren Ω und Ω_1, θ und θ_1 eingeschlossene „Maschenfeld" des Punktes x ergiebt sich der Ausdruck

$$dO = \left[\frac{dx}{d\vartheta}\,\frac{dx}{d\omega}\right] d\vartheta\, d\omega.$$

Auf dieser Grundlage werden nun zuerst die analytischen Ausdrücke entwickelt für Tangentialebene, Flächennormale und Bogenelement einer auf der Fläche liegenden Curve. Die Krüm-

mung einer Curve in einem Punkte x wird definirt als Bruch, dessen Nenner das an jenen Punkt angrenzende Bogenelement ds, dessen Zähler $d\tau$ die mit Hülfe der Hauptnormalen auf einer Kugel vom Radius 1 hergestellte Abbildung von ds ist. Ersetzt man Bogenelement und Hauptnormale durch Flächenelement und Flächennormale, so erhält man das Krümmungsmass k der Fläche im Punkte x. Dieses Krümmungsmass wird auf sechs verschiedene Arten analytisch ausgedrückt, wobei sich auch die Bedingungen der Abwickelbarkeit zweier Flächen auf einander in sehr einfacher Weise ergeben. Schliesslich werden die Beziehungen des Krümmungsmasses der Fläche zu den Krümmungen ihrer ebenen Schnitte (schiefer, Normal- und Hauptschnitte) erörtert und in einer Reihe von Sätzen niedergelegt. Schg.

E. W. Hyde. Geometric division of non congruent quantities. Annals of Math. IV. 9-18.

Von der geometrischen Division hat Grassmann in der „Ausdehnungslehre von 1844“ nur die allgemeinen Umrisse gegeben. In obiger Arbeit wird diese Theorie eingehender und auch in anderer Richtung behandelt, als in der vom Verf. nicht citirten Ausdehnungslehre von 1862. Es werden nämlich nach einer kurzen Darlegung der Bedeutung von reciproken Werten der Punktproducte die Quotienten zweier Punkte, Linienteile und Flächenteile untersucht. Wie der Quotient zweier Punkte, τ (identisch mit der vom Ref. in seiner „Raumlehre“ II. S. 75 definirten Grösse $\varDelta$), als Factor oder Operator einen Punkt in einen andern verwandelt, so die Grösse τ—1 einen Punkt in eine Strecke, und der Drehungsfactor $(\tau_2-1):(\tau_1-1)=\mathfrak{v}$ (identisch mit i^m, „Raumlehre“ I. S. 49) eine Strecke in eine andere. Mittels dieser Theorie können Curven und ihre Tangenten in besonders einfacher Weise durch Gleichungen ausgedrückt werden. Gelegentlich der Betrachtung von Drehungen im Raume charakterisirt der Verf. treffend die Vorzüge der Ausdehnungslehre vor der Quaternionentheorie. Durch reciproke Betrachtungen ergeben sich die Eigenschaften der Linienquotienten,

durch Erweiterung die der Quotienten von zwei Flächen und von zwei Punktproducten mit verschiedener Dimensionenzahl.

Schg.

C. H. CHAPMAN. On some applications of the units of an n-fold space. American J. X. 225-242.

Um das Multiplicationstheorem der Determinanten von höherer als dritter Ordnung mittels der Quaternionen-Rechnung beweisen zu können, fügt der Verf. den Hamilton'schen Symbolen S und V ein neues Symbol ω_k hinzu, in welchem jene als specielle Fälle enthalten sind. Das System der Hamilton'schen drei Einheiten mit ihrer Beziehung auf den dreidimensionalen Raum wird auf n Einheiten im n-dimensionalen Raum erweitert, und die Beziehungen dieser Einheiten zu einander werden festgestellt. Diese Erweiterung erweist sich über den ursprünglichen Zweck hinaus fruchtbar und giebt dem Verf. Gelegenheit zu weiteren Anwendungen auf die Theorie der Determinanten und der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung. Leider ist der Gedanke jener Erweiterung nicht neu; denn die n Einheiten des Verfassers sind identisch mit denen Grassmann's, und das Symbol ω_k hat genau die Wirkung der äusseren Multiplication. Auch die Anwendungen auf Determinanten sind bekannt. Schg.

C. H. KUMMELL. On some fundamental theorems of mensurations in one, two and three dimensions. Annals of Math. IV. 129-134.

Das Volumen eines Oktaeders ist in rechtwinkligen Coordinaten der Ecken durch die Formel ausgedrückt:

$$V = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_6-x_3, & x_5-x_2, & x_4-x_1 \\ y_6-y_3, & y_5-y_2, & y_4-y_1 \\ z_6-z_3, & z_5-z_2, & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

Hierzu sind analog die Formeln für den Inhalt eines Vierecks und die Länge einer Strecke, welche man aus der obigen durch jedesmalige Verminderung der Determinante um die letzte wagerechte und senkrechte Reihe und bezw. durch Vorsetzung

der Factoren $\frac{1}{2!}$ und $\frac{1}{1!}$ erhält. Durch Zusammenfallen von Ecken kann aus dem Oktaeder ein Tetraeder, aus dem Viereck ein Dreieck werden. Die Gebilde der Reihe: Strecke, Viereck, Oktaeder sind die einzigen, deren Inhalt durch eine einzige Determinante darstellbar ist. Der Verf. hätte die obige Formel auf die mit diesen Gliedern beginnende Reihe der mehrdimensionalen Gebilde ausdehnen können. Schg.

G. Plarr. On the roots of $\varepsilon^2 = -1$. Edinb. Proc. XV. 93-96.

Enthält allgemeine Erörterungen hinsichtlich der Vectorenrechnung und bezieht sich auf einen früheren Aufsatz in den Edinb. Trans. XXVII. 175-202 und besonders auf die darin niedergelegte Ansicht über die Symbole *ii*, *ij*, *ik*, *ji*, u. s. w.

Cly. (Lp.)

J. J. Sylvester, S. Sircom. Solution of question 7740. Ed. Times XLVIII. 23-24.

Ist $px^2 + qx + r = 0$ eine Gleichung in Matrizen von der zweiten Ordnung oder in Quaternionen, so folgt aus Hamilton's Untersuchungen (Lectures on quaternions, S. 631 ff.), dass diese Gleichung im allgemeinen sechs Wurzeln hat; die Anzahl derselben geht auf vier zurück, wenn eine einzige gewisse einfache Gleichung durch die Elemente der Matrizen p, q, r befriedigt wird. Ist diese Bedingung für ein beliebiges System von Matrizen p, q, r erfüllt, so wird sie auch durch drei beliebige homogene lineare Functionen von p, q, r befriedigt. Lp.

J. Hahn. Ueber Aequipollenz und ihre Anwendung. Hoffmann Z. XIX. 1-9.

Verfasser will zum Studium des 1887 erschienenen Buches: „Théorie et applications des équipollences“ von Laisant anregen,

entwickelt dazu die wichtigsten Punkte der in diesem Buche behandelten Theorie und zeigt an einigen Beispielen deren vielseitige Anwendung in der elementaren Geometrie. Lg.

A. Favaro. Intorno ad alcune applicazioni sul metodo delle equipollenze. Ven. Ist. Atti. (6) VI. 205-211.

Bericht über Laisant's Arbeit: Théorie et applications des équipollences (s. F. d. M. XIX. 1887. 693). Schg.

C. A. Laisant, Papelier. Solution des questions 237 et 238. Journ. de Math. spéc. (3) II. 23-24, 66-68.

Es sei OX eine feste Gerade, ferner $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ eine Reihe von Strahlen, die mit OX die Winkel a, $2a$, ..., na einschliessen; $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_p$ eine zweite Reihe von Strahlen unter den Winkeln $a+\frac{1}{2}\pi$, $2a+\frac{1}{2}\pi$, ..., $na+\frac{1}{2}\pi$ gegen OX; $OC_1, OC_2, \ldots, OC_n$ Strecken von der Länge $\cos b, \cos 2b, \ldots, \cos nb$ bezw. auf $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$; endlich $OS_1, OS_2, \ldots, OS_n$ Strecken von der Länge $\sin b, \sin 2b, \ldots, \sin nb$ bezw. auf $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_n$. Man bezeichne nun den Schwerpunkt der Punkte C_i mit C, den der Punkte S_i mit S, den Mittelpunkt von SC mit M. Dann ist

$$SC = \frac{\sin\frac{1}{2}n(a-b)}{n\sin\frac{1}{2}(a-b)}, \quad OM = \frac{\sin\frac{1}{2}n(a+b)}{2n\sin\frac{1}{2}(a+b)};$$

SC schliesst mit OX den Winkel $\frac{1}{2}(n+1)(a-b)$ ein, Winkel MOX ist gleich $\frac{1}{2}(n+1)(a+b)$. Diese von Herrn Laisant gestellte Aufgabe wird von Hrn. Papelier mit Hülfe der Quaternionen gelöst. Lp.

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

M. d'Ocagne. Remarques sur la géométrie infinitésimale des courbes planes, formules fondamentales, application à la détermination de certains rayons de courbure. Journ. de Math. spéc. (3) II. 25-28, 49-51, 73-76, 97-98, 121-123.

Man bezeichne eine Curve durch einen zwischen Klammern gesetzten Buchstaben (A), einen Punkt auf dieser Curve durch A, ein von dem Punkte auf der Curve ausgehendes unendlich kleines Bogenstück durch $d(A)$, den Contingenzwinkel des Bogenelementes durch $\varepsilon(A)$. Zwei Curven (A) und (C) seien gegeben. Zwei unendlich nahe Tangenten CA und CA' von (C) schneiden aus (A) das Bogenstück $d(A)$ heraus und bilden den unendlich kleinen Winkel $\varepsilon(C)$. Schneiden sich die Normalen beider Curven in a, so ist $d(A) = Aa\,.\,\varepsilon(C)$. Ist B der Schnittpunkt der Geraden AC mit einer anderen Curve (B), so folgt ebenso $d(B) = Bb\,.\,\varepsilon(C)$. Mithin

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{Aa}{Bb},$$

eine Formel, die man in die Newton'sche transformiren kann:

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{AT\,.\,AC}{BT\,.\,BC},$$

wenn T den Schnittpunkt der Tangenten der Curven (A) und (B) bedeutet. Hat AB eine feste Richtung (d. h. hat AB als Enveloppe den Punkt im Unendlichen), so ist $AC = BC$ und

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{AT}{BT}.$$

Sind A und B derartig von einander abhängig, dass Winkel AOB constant ist, während O einen festen Punkt bedeutet, so ist a der Schnittpunkt der Normale zu AO in O mit der Normale von (A)

in A; also $d(A) = Aa \,.\, \varepsilon(O)$; ähnlich $d(B) = Bb \,.\, \varepsilon_1(O)$. Aber $\varepsilon(O) = \varepsilon_1(O)$ wegen der Constanz von AOB, mithin

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{Aa}{Bb}.$$

Der unendlich kleine Zuwachs der Sehne AB ist gleich der Summe der Projectionen von $d(A)$ und $d(B)$ auf diese Sehne, daher $dAB = ab \,.\, \varepsilon(C)$. (Ist AB constant, so ist also $ab = 0$.) Ist D der Punkt, in welchem AB eine neue Curve (D) schneidet, so ist auch $dAD = ad \,.\, \varepsilon(C)$, folglich

$$\frac{dAB}{dAD} = \frac{ab}{ad}.$$

Für eine constante Richtung von AB ist daher:

$$\frac{dAB}{dAD} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AH'}{AH},$$

wenn H und H' die Projectionen des Schnittpunktes der Tangenten von (A) und (B), bezw. von (A) und (D) auf AB sind.

Von dem Punkte A der Curve (A) ziehe man die Tangenten AC und AC_1 an die Curven (C) und (C_1), so ist

$$d(A) = Aa \,.\, \varepsilon(C) = Aa_1 \,.\, \varepsilon(C_1),$$

also

$$\frac{\varepsilon(C)}{\varepsilon(C_1)} = \frac{Aa_1}{Aa}.$$

Bilden AC und AC_1 den Winkel φ, so wird endlich

$$d\varphi = d(A)\left(\frac{1}{Aa_1} - \frac{1}{Aa}\right).$$

Von diesen Formeln, die Herr d'Ocagne, wie er bemerkt, schon seit sieben Jahren in einer Reihe von Arbeiten benutzt hat, macht er in der gegenwärtigen Anwendungen auf die von Herrn Laisant behandelten 16 Transformationen (Sur les rayons de courbure des courbes planes, Nouv. Ann. (2) XIII, F. d. M. VI. 1874. 410). Lp.

M. d'Ocagne. Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales. American J. XI. 55-70.

Sei M der erzeugende Punkt einer beliebigen ebenen Curve c.

O und P Punkte ihrer Ebene. Die Parallele PH mit der Normale von c in M schneide die Gerade OM in H, und die Curve n sei der Ort des Punktes H. Diese Curve dient dazu, die charakteristischen Gebilde von c, Tangente, Normale, Krümmung u. s. w., zu ermitteln und zu construiren. Sie geht durch die Fusspunkte der von P auf c gefällten Normalen, hat zu Asymptoten die Normalen durch O und geht durch die Schnittpunkte des Kreises, dessen Durchmesser OP, mit den Tangenten aus O an c. Es wird bald zur inversen Aufgabe, c aus n zu bestimmen, übergegangen, diese erst allgemein gelöst, dann auf die Fälle, wo n Gerade, Kreis u. s. w. ist, angewandt, woraus viele Sätze über Kegelschnitte hervorgehen. Ferner wird statt n eine andere Curve t zugezogen, indem statt der Parallele mit der Normale die Parallele mit der Tangente eintritt. Es zeigt sich aber, dass die mittels t zu lösenden Aufgaben sich auf die mittels n gelösten reduciren. H.

M. d'Ocagne. Détermination du rayon de courbure de la courbe intégrale. Nouv. Ann. (3) VII. 438-442.

Wenn eine Curve K, auf zwei rechtwinklige Axen OX und OY bezogen, die Gleichung hat:

$$y = \varphi(x),$$

so heisst Integralcurve von K eine Curve J, deren Gleichung

$$y = \int \varphi(x)\,dx + C,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Es wird nun hier der Krümmungsradius von J durch Construction hergeleitet, und zuletzt der Fall betrachtet, in welchem K eine gerade Linie, also J eine Parabel ist. Mz.

G. de Longchamps. Une démonstration du théorème fondamental des développées. J. de Math. spéc. (3) II. 109-111.

Der Satz, dass der Bogen der Evolute gleich der Differenz der in den Endpunkten berührenden Normalen der Stammcurve ist, wird vom Verfasser bewiesen, indem er in der Gleichung

der Tangente $y = mx + \theta$ die Grösse θ als Function des Parameters m ansieht. Lp.

E. Cesaro. Développantes du point. Mathesis VIII. 36-38.

Man kann die cartesische Gleichung einer durch ihre natürliche Gleichung $\varrho = f(s)$ gegebenen Curve (s = Bogen, ϱ = Krümmungsradius) durch Benutzung der Beziehungen erhalten

$$ds = \varrho d\theta, \quad dx = \varrho \cos\theta d\theta, \quad dy = \varrho \sin\theta d\theta,$$

wenn θ den Winkel der Tangente mit der x-Axe bedeutet. Bezeichnet man die auf einander folgenden Ableitungen von ϱ nach θ mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots, \varrho_n$, wodurch zugleich die Krümmungsradien der auf einander folgenden Evolventen bekannt sind, setzt ferner

$$A = \varrho_1 - \varrho_3 + \varrho_5 - \cdots, \quad B = \varrho - \varrho_2 + \varrho_4 - \cdots,$$

so findet man nach Bestimmung dieser Reihen

$$x = A\cos\theta + B\sin\theta, \quad y = A\sin\theta - B\cos\theta.$$

Die durch diese Beziehungen bestimmte Curve ist die Evolute der Ordnung unendlich des Grenzpunktes der Krümmungsmittelpunkte der auf einander folgenden Evolventen, der A und B zu Coordinaten hat. Mn. (Lp.)

W. H. Echols. On an extension of Holditch's theorem. Annals of Math. IV. 47-48.

Es handelt sich um die von Elliott (Mess. (2) VII. 150ff.) gegebene Verallgemeinerung eines Satzes von Holditch, worüber man das Referat in diesem Jahrbuch X. 1878. 451f. vergleiche.

T.

G. de Longchamps. Un théorème sur les courbes planes fermées. J. de Math. spéc. (3) II. 83-84.

Wiederholung des Beweises, den Herr Risteen in den Annals of Math. III. 104 (F. d. M. XIX. 1887. 696) für das Theorem von Holditch nach dem Lehrbuche von Williamson gegeben hat. Lp.

E. Cesaro. Sur deux classes remarquables de lignes planes. Nouv. Ann. (3) VII. 171-190.

Es wird eine ebene Curve s durch die Eigenschaft definirt, dass die Strecke vom Krümmungsmittelpunkt der Evolute längs deren Normale bis zum Schnittpunkt mit dem Radiusvector des laufenden Punkts von s durch den Krümmungsmittelpunkt von s in constantem Verhältnis geteilt wird. Sei also $MN = \varrho$ Normale von s in M, N Krümmungsmittelpunkt von s, L von ihrer Evolute, O fester Punkt, Anfang der xy, K Schnittpunkt von OM und LN, n constant, dann ist die Bedingung:

$$(1) \qquad LN : KN = n-1 : n+1.$$

Um O wird ferner ein Kreis mit beliebigem constanten Radius R beschrieben. Die Polare von M bezüglich auf diesen schneide MN in P, dann ergiebt sich auch:

$$(2) \qquad MP : NP = n+1 : n.$$

Sind ferner $\alpha = u\cos\omega$ und $\beta = -u\sin\omega$ die Coordinaten von O bezüglich auf Tangente und Normale von s, so wird

$$u^2 - R^2 = (n+1)\beta\varrho; \quad \beta = c\left(\frac{\varrho}{c}\right)^{\frac{n+1}{n-1}},$$

woraus als Gleichung der definirten Curve hervorgeht:

$$s = \frac{n+1}{n-1}\int\frac{ds}{\sqrt{\frac{R^2}{c^2}\left(\frac{\varrho}{c}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} + (n+1)\left(\frac{\varrho}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

Hier sind R und c Integrationsconstanten. Diese Curve schliesst nun zwei Specialfälle in sich, deren einer, für $R = \infty$, von E. Dubois (in Dijon) Nouv. Corr. Math. VI. 156, von Ribaucour, l. c. p. 224, und von Mannheim, hier Ribaucour'sche Curve genannt, der andere, für $R = 0$, von Haton de la Goupillière unter dem Namen „sinusoidische Spiralen" behandelt sind. Diese allein können auf dem Titel mit den zwei Curvenklassen gemeint sein. Der Verfasser hat somit zwei Theorien unter eine neue allgemeinere Theorie mitbegriffen, in welcher keine Notwendigkeit lag, eine solche Spaltung vorzunehmen, zumal sich die zwei

Curven in keinem ausschliessenden Gegensatze befinden. Das Uebrige sind specielle Consequenzen der Theorie. H.

A. M. Théorème réciproque d'un théorème de M. E. Cesaro et application. Nouv. Ann. (3) VII. 353-356.

Das Gegenwärtige schliesst sich unmittelbar an die im obigen Bericht besprochene Arbeit an und setzt die Untersuchung unter gleicher Annahme fort. Die Polare von M treffe den Radiusvector OM in Q, die Normale NM in E. Dann halbirt die Normale des Ortes von Q die Strecke ME in J, und der Ort von J ist Aequidistante zwischen den Orten von M und Q; seine Tangente halbirt den Winkel QJM, seine Normale ist parallel QM und treffe die Normale der Evolute KL in H. Es ergiebt sich, dass die Strecken LN, NH und die Strecken NM, MJ dasselbe constante Verhältnis haben. Mittels dieser Sätze wird bewiesen, dass auch aus der Eigenschaft (2) umgekehrt die Eigenschaft (1) folgt. Es wird noch Anwendung auf die Ellipse gemacht. H.

C. A. Laisant. Note sur un système de deux courbes planes. S. M. F. Bull. XVI. 172-175.

In derselben Ebene seien zwei beliebige Curven gegeben. Man wähle auf jeder von ihnen einen beliebigen Punkt als Anfangspunkt, trage von ihm aus auf beiden Curven gleiche Bogen ab und verbinde deren Endpunkte X und Y. Lässt man die Länge des abgetragenen Bogens sich stetig ändern, so beschreibt der Mittelpunkt Z von XY eine gewisse Curve. Durch eine einfache Construction wird die Tangente und der Krümmungsmittelpunkt dieser Curve bestimmt. Die Construction lässt sich leicht auf den Fall ausdehnen, dass die abgetragenen Bogen ein beliebiges aber constantes Verhältnis haben, und dass der Punkt Z die Verbindungslinie XY in demselben Verhältnisse teilt.

F.

R. Raimondi. Sulle curve d'inversione. Batt. G. XXVI. 181-184.

Es sei eine Curve gegeben und an dieselbe eine Tangente gezogen. Unter Zuhülfenahme von Quaternionen wird die Gleichung des Kreises, welcher bei der Transformation durch Inversion aus der Tangente entsteht, abgeleitet und gezeigt, dass sein Mittelpunkt auf dem vom Anfangspunkt auf die Tangente gefällten Lot, und zwar in einem Abstande vom Anfangspunkt liegt, der gleich dem halben reciproken Werte des Lotes ist. Durchläuft der Berührungspunkt der Tangente die gegebene Curve, so beschreibt der Mittelpunkt des Kreises eine Curve, die „curva d'inversione" genannt, deren Gleichung für einige besondere Fälle entwickelt wird (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 695).

F.

G. de Longchamps. Sur la transformation orthotangentielle dans le plan et dans l'espace. Prag. Ber. 241-256.

Zieht man sämtliche Tangenten einer gegebenen Curve und errichtet auf ihnen in ihren Durchschnittspunkten mit einer festen Geraden Lote, so umhüllen diese eine Curve, welche durch „orthotangentiale Transformation" aus der ersten entstanden ist (cf. Cesaro, Mathesis. III. 1883. 248 und d'Ocagne, Journ. de Math. spéc. 1885. 33). Unter Benutzung des cartesischen Coordinatensystems werden verschiedene Beziehungen zwischen den beiden Curven ermittelt, die zum grossen Teil schon von d'Ocagne auf anderem Wege gefunden sind. Aus den durch Rechnung erlangten Resultaten ergiebt sich ein Verfahren, um auf einfache Weise zu einem Punkt und dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkt der ersten Curve den entsprechenden Punkt und Krümmungsmittelpunkt der zweiten zu construiren. Ist die erste Curve von der Ordnung m und der Klasse n, so ist die transformirte von der Ordnung $2n+m$ und der Klasse $2n$. Zum Schluss wird die orthotangentiale Transformation auf den Raum ausgedehnt.

F.

R. Hoppe. Dichte der Sehnen von Flächen und eb Curven. Hoppe Arch. (2) VII. 165-179.

Ist $(F)_0$ ein unendlich kleines Stück einer geschlos Fläche F, O der Mittelpunkt und ε der unendlich kleine R einer im Innern von F befindlichen Kugel K, so wird als dop Dichte der Sehnen im Punkte O für verschwindendes ε der druck definirt:

$$2D = \iint d^2F \lim \frac{(F)_0}{2R\varepsilon^2}.$$

Darauf wird die Fläche F nebst dem Punkte O auf ein Sy räumlicher Polarcoordinaten bezogen und D mittels dieser C dinaten ausgedrückt. Ein ähnliches Resultat ergiebt sich eine an die Stelle von F tretende convexe ebene Curve, für äussere Lagen des Punktes O. Das Resultat ändert nicht, wenn man, statt von der Kugel K, von einem Ellip ausgeht. Als Beispiele dienen die Kugelfläche, der Kreis die Tetraederfläche. Schg.

F. Dintzl. Die Inversion nebst Anwendungen. Beschränkung auf die Ebene bearbeitet. Krems. VII 41 S. mit 2 Taf.

B. Theorie der algebraischen Curven.

B. Sporer. Ueber den Ort des Mittelpunktes von Curven mit Mittelpunkt, welche durch eine gegeben Anzahl Punkte gehen. Böklen Mitt. II. 186-196.

Ist eine ebene Curve n^{ter} Ordnung f^n mit Mittelpunkt durc s ihrer Punkte bestimmt, so durchläuft der Mittelpunkt, wen einer dieser Punkte nach allen Richtungen hin sich stetig durc die Ebene bewegt, einen geometrischen Ort, der bei geradem n

die $(s-1)$ festen Punkte und die Mittelpunkte ihrer Verbindungsstrecken, bei ungeradem n hingegen nur die letzteren enthält. Für $n > 3$ zerfällt im allgemeinen keine der Curven f^n.

Js.

G. B. Guccia. Sur l'intersection de deux courbes algébriques en un point singulier. C. R. CVII. 656-658.

Eine algebraische Curve q^{ter} Ordnung f^q mit einem einzigen mehrfachen Punkte $[\varrho]$ gehört im allgemeinen einem linearen Systeme von Curven q^{ter} Ordnung an, dessen Elemente f_ϱ^q sie in ihrem mehrfachen Punkte und seiner unmittelbaren Nähe ersetzen. Sind nun φ^m und ψ^n solche algebraischen Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung mit den mehrfachen Punkten $[\sigma]$ und $[\tau]$, und fallen diese in den Punkt P, so bestimmen die beliebigen Elemente φ_r^m und ψ_s^n der zugehörigen linearen Systeme einen Büschel von Curven $(\chi) = \varphi^m \psi_s^n + \lambda \psi^n \varphi_r^m = 0$ mit einem fest bestimmten mehrfachen Punkte $[\sigma+\tau]$ in P. Durch die mehrfachen Punkte $[\sigma]$, $[\tau]$ und $[\sigma+\tau]$ werden die Geschlechtszahlen $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ und $\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)$ um die Werte E_σ, E_τ, $E_{\sigma+\tau}$ vermindert, zwischen denen, wenn J die Zahl der in P zusammenfallenden Schnittpunkte der Curven φ^m und ψ^n bedeutet, die Beziehung $J = E_{\sigma+\tau} - (E_\sigma + E_\tau)$ besteht. Js.

A. Brill. Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven. München. Ber. 81-94.

G. B. Guccia. Théorème général concernant les courbes algébriques planes. C. R. CVII. 903-904.

Die Gleichung einer algebraischen Curve $[f] = 0$, deren erstes Glied die unabhängigen Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ linear enthält, liefert für irgend vier Gruppen von Parametern λ vier von einander linear unabhängige Curvengleichungen $f_r = 0$, $f_s = 0$, $f_t = 0$, $f_u = 0$. Bezeichnet nun p_f das Geschlecht einer Curve

$[f]=0$, $p_{//}$ das einer Curve $f_r f_s + f_t f_u = 0$ und D die Zal
von den λ abhängigen Schnittpunkte zweier Curven f
so ist $D+2p_{/}-p_{//}=1$. Js.

Weill. Sur une propriété des systèmes de cou
algébriques. S. M. F. Bull. XVI. 155-157.

Beweis des Satzes: „Das Centrum der mittleren Entfernu
der Durchschnittspunkte einer festen Curve vom Grade m
einer variablen Curve von beliebigem Grade, deren Gleic
einen veränderlichen Parameter bis zur k^{ten} Potenz enthält,
schreibt eine Curve vom Geschlecht 0 und vom Grade mk, we
die Asymptoten-Richtungen der festen Curve zu Richtun
k-facher Asymptoten hat." F.

E. C. Valentiner. Bevis for at den Hesseske Cu
i Almindelighed ikke har noget Dobbeltpunkt. Zeu
Tids. (5) VI. 48-49.

Beweis des Satzes, dass die Hesse'sche Curve im al
meinen keinen Doppelpunkt hat. Hätte jede Hesse'sche Cu
einen Doppelpunkt, so würde es für eine solche Curve nur z
Bedingungen ausmachen, wenn der Doppelpunkt in einen ge
benen Punkt, z. B. den Anfangspunkt, fiele. Es wird nun (du
directe Aufstellung der Bedingungen) bewiesen, dass, wenn
für jede Hesse'sche Curve einer Curve n^{ter} Ordnung nur zw
Bedingungen ausmachte, einen Doppelpunkt im Anfangspun
zu haben, dann jede Hesse'sche Curve einer Curve dritter Ordnu
einen Doppelpunkt haben müsste. Da es nun bekannt ist, da
die Hesse'sche Curve einer Curve dritter Ordnung im allg
meinen keinen Doppelpunkt hat, so ist der Satz bewiesen.
V.

H. G. Zeuthen. Sur la détermination d'une courb
algébrique par des points donnés. Math. Ann. XXX
235-251.

Uebersetzung der 1887 in der Tidsskrift for Mathematik erschienenen Abhandlung, über welche im vorigen Bande des Jahrbuchs (S. 700) referirt ist. Scht.

R. Gärtner. Die Polaren der algebraischen Curven. Hoppe Arch. (2) VII. 180-194.

Die Gleichungen der Polaren und die einfachsten Sätze über ihre Beziehungen zu den vielfachen Punkten der Curve werden abgeleitet aus den Relationen, welche zwischen den Segmenten der vom Pol ausgehenden Strahlen bestehen. R. M.

G. Battaglini. Sui punti sestatici di una curva qualunque. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_2. 238-246.

In einer ebenen Curve beliebiger Ordnung befindet sich eine bestimmte Anzahl von Punkten, in welchen sie mit einem Kegelschnitte eine Berührung fünfter Ordnung besitzt; es sind dies jene Punkte, welche Cayley „sextactic“ nennt (in der wohlbekannten Abhandlung, in welcher er ihre Bestimmung lehrt, Phil. Trans. CLV, II Part, 1865). Herr Battaglini hat sich die Aufgabe gestellt, die Cayley'schen Resultate durch Anwendung der Sylvester'schen Reciprocanten zu beweisen. Der erste Teil seiner Untersuchungen befindet sich in dem Aufsatze, welchen wir jetzt mit wenigen Worten besprechen wollen.

Ist $f(X, Y) = 0$ die cartesische Gleichung einer Curve r^{ter} Ordnung, und bezeichnet man durch $y', y'', y''', \dots$ die Ableitungen von Y in Bezug auf X und durch $x', x'', x''', \dots$ die von X in Bezug auf Y, alle aus der gegebenen Gleichung abgeleitet, so werden die in Frage stehenden Punkte bestimmt durch die Gleichung $f(X, Y) = 0$ und eine der folgenden:

$$(1)\qquad y''\Gamma_x = 0, \qquad x''\Gamma_y = 0,$$

wo

$$\Gamma_x = 9y'''^2 y^{\text{V}} - 45y''y'''y^{\text{IV}} + 40y'''^3,$$
$$\Gamma_y = 9x'''^2 x^{\text{V}} - 45x''x'''x^{\text{IV}} + 40x'''^3.$$

Die Inflexionstangenten, doppelt gerechnet, sind augenscheinlich

sextactische Kegelschnitte; sie sind durch die ersten Factoren der Gleichungen (1) angedeutet. Sieht man von diesen ab, so kann man sagen, dass die sextactischen Punkte von den Durchschnitten der Curve $f(X, Y) = 0$ mit einer der Curven $\Gamma_x = 0$, $\Gamma_y = 0$ gebildet werden, deren linke Seiten Reciprocanten sind, weil zwischen ihnen folgende Beziehungen bestehen:

$$\Gamma_x = -y'^2\Gamma_y, \quad \Gamma_y = -x'^2\Gamma_x.$$

Um die Auflösung zu vervollständigen, muss man noch Γ_x oder Γ_y durch die Coefficienten der Gleichung der Curve ausdrücken. Die Rechnung gewinnt an Einfachheit und Eleganz, wenn man diese Gleichung in symbolischer Form gegeben voraussetzt:

$$F = (f_1 s_1 + f_2 s_2 + f_3 s_3)^r = f_s^r = a_s^r = b_s^r = c_s^r = \ldots,$$

wo s_1, s_2, s_3 die homogenen Coordinaten eines Punktes der Ebene sind. Man betrachte nun ferner die drei linearen Formen:

$$A = \alpha_s, \quad B = \beta_s, \quad V = v_s;$$

ferner die Jacobi'sche Determinante Φ von A, F und V, Ψ von B, F und V; endlich die Hesse'sche Determinante H von F und die quadratische Form $F_2 = (abv)^2 a_s^{r-2} b_s^{r-2}$. Wenn man aus diesen Functionen die folgenden zusammensetzt:

$$\begin{aligned}
K &= v_s^2 H - 3FF_2,\\
K' &= (3r-4)\,\Phi\,\text{Jac.}(K, F, V) - (3r-3)K\ \text{Jac.}(\Phi, F, V),\\
K'' &= (5r-7)\,\Phi\,\text{Jac.}(K', F, V) - (5r-5)K'\,\text{Jac.}(\Phi, F, V),\\
K''' &= (7r-10)\,\Phi\,\text{Jac.}(K'', F, V) - (7r-7)K''\,\text{Jac.}(\Phi, F, V),
\end{aligned}$$

so findet folgende Gleichung statt:

$$\Gamma_x = 9K^2K''' - 45KK'K'' + 40K'^3.$$

Die Function Γ_x ist folglich von der Ordnung $\nu = 15r-21$; aber durch die Cayley'schen Untersuchungen weiss man, dass diese Ordnung verringert werden kann. Um diese Reduction auszuführen, leitet der Verfasser neue Ausdrücke für die Functionen K, K', K'', K''' ab, welche jedoch zu verwickelt sind, um in diesem Referat Platz zu finden. Welches Ansehen infolge dessen die Function Γ_x erhält, wird man in einer künftigen, in Aussicht gestellten Arbeit erfahren. La.

E. Bertini. Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 326-333, 413-423.

Der Verfasser knüpft an eine in den Math. Ann. IX veröffentlichte Arbeit Noether's an (F. d. M. VII. 1875. 243), um einige Sätze desselben auf einfachem, aber strengem Wege geometrisch zu beweisen, während Noether selbst den Gegenstand in rein algebraischer Weise (Math. Ann. XXIII. 311; F. d. M. XVI. 1884. 349) wieder aufgenommen hat. Es handelt sich in erster Linie um den Satz, dass jede algebraische Curve mit beliebiger Singularität stets durch eine Cremona'sche Transformation in eine andere Curve verwandelt werden kann, welche nur gewöhnliche Singularitäten besitzt. (Ein gewöhnlicher r-facher Punkt ist ein solcher, dessen r Tangenten alle von einander verschieden sind.) Die Hauptsache ist dabei der Nachweis, dass eine gewisse Reihenfolge quadratischer Transformationen endlich ist; dem Verfasser gelingt dies mit Hülfe der Ungleichheit:

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\tfrac{1}{2}\Sigma s_i(s_i-1)+g-1\geqq 0,$$

welche sich auf eine Curve n^{ter} Ordnung bezieht, die aus g einfachen, von einander verschiedenen Curven zusammengesetzt ist und beliebige s_1-, s_2-, s_3-, ...-fache Punkte besitzt.

Dasselbe Verfahren wiederholter quadratischer Transformationen führt alsdann auf den Satz von der Erhaltung des Geschlechts und zu einer neuen Ableitung der Plücker'schen Formeln.

R. M.

A. Brill. Ueber algebraische Correspondenzen. Math. Ann. XXXI. 374-409.

Die Absicht des Verfassers, die Theorie der algebraischen Correspondenzen auf einer rein algebraischen Grundlage aufzubauen, wird zu einem ersten Teile in dieser Arbeit (der weitere folgen sollen) verwirklicht. Eines der Hauptergebnisse in dieser Richtung ist ein directer und strenger Beweis des von Cayley zuerst aufgestellten, vom Verfasser zuerst (mit geometrischen

Hülfsmitteln) bewiesenen „verallgemeinerten Correspondenzprincips"; doch wird betont, dass die bezügliche Correspondenzformel nur mehr als ein beiläufiges Abzählungsresultat erscheint, während der Hauptwert in der wirklichen Durchführung der erforderlichen Eliminationsprocesse liegt, vermöge deren die definitiven Resultantenbildungen von fremden Factoren befreit hervorgehen.

Eine wesentliche Vereinfachung wird damit erzielt, dass zunächst nur die linke Seite einer „Correspondenzgleichung"

$$\varphi(x,y;\ x',y') = 0,$$

d. i. einer algebraischen Relation zwischen zwei Coordinatenpaaren, für sich untersucht und umgeformt wird, ohne jede Bezugnahme auf die Gleichung einer „Curve"

$$f(x,y) = 0,\quad f(x',y') = 0,$$

auf der später die Correspondenz realisirt werden soll.

Bei festgehaltenem Punkt $P'(x',y')$ durchläuft der Punkt $P(x,y)$ eine „Correspondenzcurve" $\varphi(P')$ und vice versa P' eine solche Curve $\varphi(P)$. Verschwinden, etwa im ersteren Falle, alle partiellen Ableitungen von $\varphi(x,y)$ incl. einer $(\beta-1)^{\text{ten}}$ für ein Wertsystem $x = a$, $y = b$, so sagt man, $\varphi(x,y)$ verschwinde β-fach. Die Curve $\varphi(P')$ geht dann β-fach durch deren „festen" Punkt (a,b).

Indem vor der Hand der einfachste Fall in's Auge gefasst wird, dass die „Coincidenzgleichung"

$$\varphi(x,y;\ x,y) = 0$$

nicht identisch verschwindet, wird vermöge wirklicher Ausführung der resp. partiellen Differentiationen der Hülfssatz nachgewiesen, dass, wofern für ein festes Wertsystem (a, b) die Formen $\varphi(P)$ β'-fach, $\varphi(P')$ β-fach verschwinden, die Form $\varphi(a,b;\ a,b)$ selbst mindestens $(\beta+\beta')$-fach verschwinden muss.

Nunmehr möge die „Coincidenzform" $\varphi(x,y;\ x,y)$ identisch β-fach Null werden. Es ist dann die Zahl β, die „Wertigkeit der Correspondenz", eine charakteristische Invariante der letzteren.

Um nun mit einer solchen Coincidenzform algebraisch operiren zu können, entsteht die Aufgabe, die Correspondenzform $\varphi(x,y;x',y')$ in eine solche Gestalt zu bringen, dass einmal ihr β-faches Ver-

schwinden für $x = x'$, $y = y'$ unmittelbar zur Anschauung gelangt, sodann aber die Dimension der einzelnen Coefficienten hinsichtlich der bezüglichen Variabeln eine möglichst niedrige wird.

Was das Erstere anbelangt, so wird man, wenn man symmetrisch verfahren will, die Correspondenzform φ als eine homogene Function β^{ten} Grades der drei Grössen

$$u = yz' - zy', \quad v = zx' - xz', \quad w = xy' - yx'$$

darzustellen haben:

$$\varphi(x, y; x', y') = w^\beta A_0 + w^{\beta-1}(B_0 u + B_1 v) + \cdots$$
$$+ (K_0 u^\beta + K_1 u^{\beta-1} v + \cdots + K_\beta v^\beta),$$

wo die $A, B, \ldots, K$ bekannte homogene Functionen von x, y, z und x', y', z' von einer je um β niedrigeren Dimension als φ sind.

Diese erste Aufgabe ist noch auf sehr mannigfaltige Art lösbar: so stammt von Clebsch eine Methode her, welche die gemeinte Gestalt von φ durch einfache Invarianten-Operationen herbeiführt.

Soll dagegen die weitere Forderung befriedigt werden, dass der Grad der $A, B, \ldots, K$ hinsichtlich jeder einzelnen Veränderlichen derart sei, dass keines der Glieder, die bei Substitution der wahren Werte für die u, v, w (und nach erfolgter Klammerauflösung) entstehen, von höherem Grad hinsichtlich irgend einer Veränderlichen ist, als die Function φ vor ihrer Umgestaltung, so ist das im wesentlichen nur auf eine einzige Weise möglich.

Das Ergebnis wird durch successive Behandlung der Fälle $\beta = 1, 2, \ldots$ erreicht.

Setzt man in der normirten Correspondenzgleichung innerhalb der Coefficienten $A, B, \ldots, K$ die x, y, z und x', y', z' resp. einander gleich, so liefert der so entstehende „Connex"

$$\varphi(u, v, w; x, y, z) = 0$$

in Verbindung mit der Identität

$$ux + vy + wz = 0$$

β Wertsysteme $u : v : w$, welche die Richtung der Tangenten des β-fachen Punktes angeben, welchen die Curve $\varphi(P')$ in P' besitzt.

Es lässt sich jetzt die Frage nach den Coincidenzstellen zweier (bereits normirt gedachten) Correspondenzgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ vollständig beantworten, indem aus diesen beiden in Verbindung mit $ux + vy + wz = 0$ die u, v, w eliminirt, und erst nachträglich die x, y, z den x', y', z' gleich gesetzt werden. Die Elimination kommt auf eine binäre Resultantenbildung hinaus, und es lassen sich bei geschicktem Verfahren die überflüssigen Factoren abspalten. Es lässt sich der wichtige Satz daraus ablesen, dass zwei Correspondenzgleichungen mit beliebigen Wertigkeiten stets durch solche von der Wertigkeit Null ersetzt werden können, deren Coincidenzcurven dann nach Früherem unmittelbar zugänglich sind. Die einzelnen dabei sich ergebenden Anzahlen mögen hier übergangen werden.

Es erfolgt jetzt die besondere Anwendung auf die Correspondenz zwischen zwei Punkten einer Curve $f(x, y, z) = 0$. Hat man die erstere auf die normirte Form gebracht $\Phi(u, v, w; x, y, z) = 0$, und bedeuten f_1, f_2, f_3 die Ableitungen von f nach x, y, z, so schneidet die Coincidenzcurve $\Phi(f_1, f_2, f_3; \; x, y, z) = 0$ offenbar (ausser festen Punkten) die gegebene Curve $f = 0$ in den Coincidenzstellen der Correspondenz.

Durch ein eigentümliches Reductionsverfahren gelingt es, sogar die Fälle, in denen die Tangenten des β-fachen Punktes der Curve $\varphi(P')$ in P' mit denen von f selbst irgendwie übereinstimmen, auf den einfachsten zurückzuführen, wo die beiderlei Tangenten völlig getrennt sind.

Andererseits wird der Einfluss vielfacher Punkte f, für die also f_1, f_2, f_3 gleichzeitig verschwinden, mit Hülfe früherer Untersuchungen von Noether festgestellt.

So ergiebt sich die Formel für die Anzahl C der Coincidenzen unserer Correspondenz:

$$C = K + K' + 2\beta p - \beta \Sigma N.$$

Hier bedeutet $K(K')$ die Anzahl der mit $P'(P)$ beweglichen Punkte auf f, p das Geschlecht von f, N die Anzahl der in die vielfachen Punkte von f entfallenden Verzweigungspunkte, endlich β die „Wertigkeit der Correspondenz bezüglich f", d. h. die

Multiplicität des Schnittpunktes $x = x'$, $y = y'$ der Curven f und $\varphi(P')$ (oder auch $\varphi(P)$).

Den Schluss bildet die Betrachtung von Correspondenzen mit negativen Wertigkeiten, die entstehen, wenn die Correspondenz nur durch einen Quotienten zweier Correspondenzformen dargestellt werden kann. Es wird gezeigt, wie sich derartige Correspondenzen einstellen, wenn die Coincidenzstellen in rational getrennte Gruppen zerfallen. My.

W. Stahl. Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven. J. für Math. CIV. 38-61.

Eine rationale Curve ist in projectivischem Sinne durch eine Schar (Involution) binärer Formen eindeutig festgelegt. Wie Herr Brill zuerst nachgewiesen hat, kann man die erwähnte Involution durch die sogenannte „Fundamentalinvolution" der conjugirten Formen ersetzen. Wie fruchtbringend dieser Satz ist, kann aus der systematischen Behandlung des Referenten in der Schrift: „Apolarität und rationale Curven" ersehen werden.

Behufs geometrischer Ausbildung der projectivischen Eigenschaften der rationalen Curven resp. der zugehörigen Developpabeln empfiehlt sich, wie der Verfasser im einzelnen nachweist, die Verknüpfung der Fundamentalinvolution mit den von Herrn Jolles zuerst untersuchten „Osculanten" der Curven. Die letzteren sind wiederum rationale Curven, welche durch die binären Polaren des ursprünglichen Formensystems repräsentirt werden.

Als grundlegend erscheint dabei ein Satz, der etwa für das Beispiel einer ebenen rationalen R_5, i. e. des Systems dreier binären Formen fünfter Ordnung, illustrirt werden möge. Man bilde sich die bezüglich zweier beliebigen Werte λ_1, λ_2 genommenen gemischten Polaren der gegebenen Formen. Zu diesen gehört nur eine conjugirte Form mit drei Wurzeln λ_4, λ_5, λ_6. Dann besteht die Fundamentalinvolution der R_5 aus der ∞^2-Schar der Quintupelwerte λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5.

Analog entsteht die ∞^1-Schar von Quadrupeln λ_2, λ_3, λ_4, λ_5,

die zusammen mit einem festgehaltenen Werte λ_1' lauter Quintupel der Fundamentalinvolution erzeugen, durch die Nullwerte der conjugirten Formen einer R_4, nämlich der durch die ersten, nach λ_1 genommenen Polaren (der ursprünglichen Formen) dargestellten.

Ist nun die rationale Curve R_n n^{ter} Ordnung in einem Raume von p Dimensionen gegeben, so existirt für $2p \geqq n-1$ ein zur Curve covariantes Gebilde von $(n-p-1)$ Dimensionen und $(2p-n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung, auf welches sich die Fundamentalinvolution der R_n derart überträgt, dass jeder Punkt des Gebildes nur einer Gruppe angehört.

So ist in dem angeführten Beispiel der ebenen R_5 jedes Quintupel der Fundamentalinvolution der eindeutige Träger des Punktes einer Ebene. Es kommt das auf die Einführung von Fünfeckscoordinaten hinaus.

Im Falle der Raumcurven R_6 gelangt man so zu einer Fläche zweiten Grades als Ort der Ecken aller Tetraeder, welche von stationären Ebenen der zweiten gemischten Osculanten $R_4(\lambda_1, \lambda_2)$ gebildet werden u. s. f. Diese Beziehungen zwischen der Fundamentalinvolution, den gemischten Osculanten und dem Träger der ersteren enthüllen eine Fülle interessanter geometrischer Sätze, bezüglich deren auf die Arbeit selbst zu verweisen ist.

My.

Gross. Ueber die Combinanten binärer Formensysteme, welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind. Math. Ann. XXXII. 136-150.

Diese Note ist ein kurzer Auszug aus der Dissertation des Verfassers, über welche im letzten Jahrgange dieser Fortschritte S. 708 ausführlich berichtet ist. My.

O. Schlesinger. Note zu der Abhandlung: Ueber conjugirte Curven. Math. Ann. XXX. Math. Ann. XXXIII. 315-316.

Der Verfasser teilt mit, dass Herr de Paolis bereits vor ihm (wenn auch mit unzureichendem Beweise) den Satz aufgestellt

habe, dass, wenn eine Curve dritter Ordnung zu einer Curve dritter Klasse conjugirt ist, der letzteren ∞^1 Polarfünfseite, ∞^2 Polarsechsseite etc. von der ersteren umgeschrieben werden können. My.

G. Humbert. Sur les arcs des courbes planes. Nouv. Ann. (3) VII. 5-8.

Auf einfache Weise wird der Satz bewiesen: Die 2ν Berührungspunkte einer Curve ν^{ter} Klasse mit den 2ν Tangenten, die sie mit einem Kreise gemein hat, lassen sich zu zweien so gruppiren, dass sie auf der Curve ν Bogen bestimmen, deren algebraische Summe gleich der algebraischen Summe der Längen der gemeinsamen Tangenten ist.

Wird für die Curve ν^{ter} Klasse im besonderen ein Kegelschnitt genommen, so erhält man den bekannten Satz von Graves.

Mz.

G. D. H. Om Unicursalcurver af tredie Klassen. Zeuthen Tidss. (5) VI. 193-200.

Eine ebene Unicursalcurve n^{ter} Klasse ist in Liniencoordinaten mittels der Gleichungen

$$\xi_i = f_i(m) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gegeben, wo f_i eine ganze rationale Function n^{ten} Grades ist.

Jeder Doppeltangente entsprechen dann zwei Werte des Parameters m. Wenn p und q zwei solche Werte sind, $m_1, m_2, \dots, m_n$ die Parameterwerte, welche den von einem willkürlichen Punkte ausgehenden Tangenten entsprechen, dann hat man

$$(1) \qquad \frac{(p-m_1)(p-m_2)\dots(p-m_n)}{(q-m_1)(q-m_2)\dots(q-m_n)} = c,$$

wo

$$c = \frac{f_1(p)}{f_1(q)} = \frac{f_2(p)}{f_2(q)} = \frac{f_3(p)}{f_3(q)}.$$

Aus der Gleichung (1) werden darauf verschiedene Realitätseigenschaften der Unicursalcurven dritter Klasse hergeleitet.

V.

X. ANTOMARI. Recherches des points doubles dans les courbes unicursales. Nouv. Ann. VII. 356-359.

Die Curve wird als gegeben betrachtet durch den rationalen Ausdruck der Coordinaten x und y in einem Parameter t. Um die Doppelpunkte zu finden, werden beide Gleichungen nach Potenzen von t entwickelt. Dann sind x und y so zu bestimmen, dass die zwei gleich 0 gesetzten ganzen Functionen einen gemeinsamen Factor zweiten Grades, für einen dreifachen Punkt dritten Grades etc. haben. Hierzu einige gelöste Beispiele. H.

DUARTE LEITE. Sobre a representação parametrica das curvas do primeiro genero. Teixeira J. IX. 3-6.

Bekanntlich besitzen die algebraischen Curven n^{ter} Ordnung vom Geschlechte 1 Singularitäten, welche mit $\frac{1}{2}n(n-3)$ Doppelpunkten äquivalent sind, und können daher eindeutig in kubische Curven ohne Doppelpunkt transformirt werden. Die Aufgabe der Parameter-Darstellung dieser Curven kommt also auf die der allgemeinen kubischen Curve zurück. Mit dieser Aufgabe beschäftigt sich der Verf., um zu zeigen, dass in seine Lösung die Weierstrass'schen elliptischen Functionen $\wp(u)$ und $\sigma(u)$ auf natürlichste Weise eingehen. Tx. (Lp.)

W. H. L. RUSSELL. Theorems in analytical geometry. Lond. R. S. Proc. XLIV. 388-392.

Analytische Lösungen folgender Aufgaben: 1) Die Hüllcurve der ersten Polare einer beliebigen Curve zu bestimmen, wenn der Pol eine gegebene Curve dritter Ordnung durchläuft. 2) Die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung zu bestimmen. 3) Die Doppeltangenten einer Curve fünfter Ordnung zu bestimmen. Cly. (Lp.)

J. J. WALKER. On a method in the analysis of curved lines. Part III. Lond. M. S. Proc. XIX. 483-502.

Die in Lond. M. S. Proc. IX. 226 begonnene Arbeit (s. F. d. M. X. 1878. 459; XVII. 1885. 711) wird weiter fortgesetzt, die gewonnenen Resultate werden verallgemeinert und Ausdrücke für die Contravarianten der kubischen Curven gefunden. H.

G. Humbert. Sur les courbes algébriques planes rectifiables. Journ. de Math. (4) IV. 133-152.

Algebraisch rectificirbar heisst eine algebraische ebene Curve, wenn zwischen dem Bogen und den Coordinaten eine algebraische Gleichung besteht. Es wird bewiesen, dass diese Gleichung nur von der Form sein kann:

$$s^2-2\omega s+R=0,$$

wo s der Bogen, R algebraisch in x, y, endlich ω constant ist. Noch näher bestimmt wird sie:

$$(s-\omega)^2 = P^2(f_x'^2+f_y'^2),$$

wo P rational, und $f(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve ist. Ist also $f_x'^2+f_y'^2$ ein Quadrat, in welchem Falle die Curve $f=0$ nach Laguerre eine Richtungscurve heisst, so ist s rational. Hieraus folgert Laguerre, dass die Evolvente und Evolute einer Richtungscurve eine Richtungscurve ist. Nur das erstere zeigt sich richtig. Der letztere Punkt erfordert die Unterscheidung, je nachdem die Curve von jeder Normale nur in einem Punkte oder in mehreren Punkten orthogonal geschnitten wird. Im ersten Falle heisst die Curve einfach, und der Satz ist richtig; im letzteren, wo die Evolvente, algebraisch untrennbar, aus zwei parallelen Zweigen besteht, heisst sie complex, und dann ist die Evolute der Richtungscurve nie eine Richtungscurve. Ist also die Evolute Richtungscurve, so ist die Evolvente einfach. Das Vorstehende ist es, was der gegenwärtige Artikel ausführlicher darlegt als der Artikel in C. R. CIV. 1051, worüber in F. d. M. XIX. 1887. 711 berichtet ist. Es folgen dann noch Beispiele. H.

L. Koenigsberger. Ueber rectificirbare Curven. Math. Ann. XXXII. 589-595.

Herr G. Humbert hat im Journ. de Math. (4) IV. 133 (vgl. das vorige Referat) in der Arbeit „Sur les courbes algébriques planes rectifiables“ den Satz bewiesen, dass der Bogen einer rectificirbaren ebenen algebraischen Curve stets einer quadratischen Gleichung genügt, deren Coefficienten rationale Functionen der Coordinaten sind, und dass ferner notwendige und hinreichende Bedingung hierfür sei, dass der Differentialquotient des Bogens rational durch die Coordinaten ausdrückbar sei. Der Herr Verfasser weist nach, dass diese Eigenschaft nicht mit der speciellen Form des Bogendifferentials zusammenhängt, und stellt eine allgemeinere Definition der rectificirbaren Curven auf.

Ist y eine durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ definirte algebraische Function, und ist

$$S = \int \sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}\, dx = F(x, y, y', \ldots),$$

worin ω eine rationale, F eine algebraische Function bedeutet, so folgt nach einem Satze von Abel:

$$S = R_1(x, y, y', \ldots) + R_2(x, y, y', \ldots) \sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)},$$

wo R_1 und R_2 rationale Functionen bedeuten. Da nun, wegen $f(x, y) = 0$, $y', y'', \ldots$ rational durch x und y ausdrückbar sind, so ist S durch eine quadratische Gleichung mit rationalen Coefficienten ausdrückbar. Bildet man nun $\frac{dS}{dx} = \sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}$, so erhält man im allgemeinen eine Gleichung, durch welche sich $\sqrt{\omega}$ rational darstellt. Ist umgekehrt

$$S = R(x, y, y', \ldots),$$

so ist $\frac{dR}{dx} = \sqrt{\omega}$ rational dargestellt.

Nennt man das Integral $S = \int \sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}\, dx$ algebraisch reducirbar, wenn es sich algebraisch durch $x, y, y', \ldots$ darstellen lässt, so genügt S einer Gleichung

$$(S - c)^2 = r^2(x, y, y', \ldots)\, \omega(x, y, y', \ldots),$$

worin c eine Constante bedeutet.

Aehnliche Sätze könnten auch für höhere Wurzelexponenten aufzustellen sein.

Der Herr Verfasser wendet sich nun zur Betrachtung transcendenter Curven, die er rectificirbar nennt, wenn der Bogen sich als algebraische Function der Coordinaten ausdrücken lässt. Er gelangt für diese zu dem interessanten Resultat:

Jede rectificirbare transcendente Curve ist das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, und ihr Bogen s genügt einer quadratischen Gleichung von der Form

$$(s-c)^2 = \varrho_1^2(x, y, y') : (1+y'^2),$$

worin c eine Constante und ϱ_1 eine rationale Function bedeutet. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der algebraisch rectificirbare Bogen rational sei in x, y, y', ist die, dass $\sqrt{1+y'^2}$ rational in denselben Grössen ausdrückbar ist.

A.

G. Humbert. Sur les courbes cycliques de direction. Journ. de Math. (4) IV. 129-131.

Genauere Fassung einiger in einer vorangegangenen Abhandlung über das Abel'sche Theorem (F. d. M. XIX. 1887. 432) mitgeteilten Sätze.

R. M.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

A. Breuer. Die Normalform der allgemeinen Kegelschnittsgleichung. Ein Beitrag zur analytischen Geometrie. Eisenach. J. Bacmeister. 39 S. gr. 8°.

Definirt man einen Kegelschnitt als geometrischen Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem gegebenen Punkt (Brennpunkt) und einer gegebenen Geraden (Leitlinie) ein gegebenes Verhältnis (Excentricität) haben, und leitet die Gleichung des Kegelschnitts bei beliebiger Lage der Leitlinie und des Brenn-

punktes zum Coordinatensystem ab, so erhält man eine Gleichung zweiten Grades zwischen den Coordinaten x, y, in welcher unter den Coefficienten a, b, c der Glieder x^2, $2xy$, y^2 die Relation $b^2-ac-a-c=1$ besteht. Eine solche Gleichung bezeichnet der Verfasser als Normalform der Kegelschnittsgleichung. Aus ihr kann man umgekehrt die Grösse der Excentricität und die Lage der Leitlinie und des Brennpunktes bestimmen und sodann aus diesen Daten beliebig viele Punkte der Curve in einfacher Weise construiren. Da sich die allgemeine Gleichung zweiten Grades durch Multiplication mit einem leicht zu bestimmenden Factor in die Normalform bringen lässt, so ist damit eine Methode gegeben, um ohne wiederholte Anwendung von Transformationen die Gleichung in das entsprechende geometrische Gebilde umzusetzen. Die Untersuchung wird für die sämtlichen Arten der Kegelschnitte durchgeführt. F.

H. Willig. Behandlung der Kegelschnitte mittels Liniencoordinaten. Pr. Realgymn. Mainz. 48 S. 8°.

Einführung in das Studium der Liniencoordinaten und Einübung derselben an solchen Aufgaben aus der elementaren Theorie der Kegelschnitte, bei welchen ihre Anwendung von Vorteil ist. F.

Kreuder. Abschnitte aus der Lehre über die Kegelschnitte in analytischer Behandlung mittelst Winkelcoordinaten. Pr. Progymn. Euskirchen. 18 S. 4° u. 1 Taf.

Die hier angewandten Winkelcoordinaten werden folgendermassen definirt: Eine feste Strecke O_1O_2 sei gleich s, und von einem Punkte B in der Ebene seien die Linien BO_1, BO_2 gezogen, wodurch die Winkel BO_1O_2 und BO_2O_1 entstehen, deren trigonometrische Tangenten resp. x_1 und x_2 seien. Dann sind x_1 und x_2 die Winkelcoordinaten des Punktes B. Es wird nun das Elementare aus der analytischen Geometrie der Ebene mit diesen Coordinaten behandelt. Eine gerade Linie hat die

Gleichung:

$$sx_1x_2 - a_1x_1 - a_2x_2 = 0,$$

wo a_1 und a_2 die Lote zu O_1O_2 resp. in O_1 und O_2 bezeichnen, und zwar diese Lote gerechnet bis zum Durchschnitt mit der in Rede stehenden geraden Linie. Später wird die Gleichung eines beliebigen Kegelschnitts, der durch O_1 und O_2 geht, in der Form $sx_1x_2 - a_1x_1 - a_2x_2 - k = 0$ aufgestellt. Und dies wird dann weiter ausgeführt. [Vgl. die Arbeiten des Hrn. Ritsert, F. d. M. XV. 1883. 594 u. XVII. 1885. 690, der durch Einführung der Cotangenten als Coordinaten den Grad der Gleichung ungeändert erhält. Lp.] Mz.

Ch. Smith. Solutions of the examples in an elementary treatise on conic sections. London. Macmillan.

Anzeige in Nature XXXVIII. 588.

Sforza. Condizione geometrica per la realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche. Palermo Rend. II. 172-175.

Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte sämtlich reell sind, besteht darin, dass ein gewisser Kegelschnitt, dessen Gleichung von den Invarianten der gegebenen Kegelschnitte abhängt, imaginär ist. Die Realität der vier gemeinschaftlichen Tangenten hängt von dem Imaginärsein eines analog bestimmten Kegelschnitts ab. F.

O. Montesperelli. Costruzioni proiettive delle curve di second'ordine con elementi immaginari. Velletri. VIII u. 131 S. (1887.)

A. Haas. Ueber die Indicatrizen der Kegelschnitte. Böklen Mitt. II. 152-160.

Unter Indicatrix eines Punktes in der Ebene eines gegebenen Kegelschnittes K wird derjenige (beliebig klein gedachte)

Kegelschnitt verstanden, dessen System conjugirter Durchmesser mit derjenigen Strahleninvolution zusammenfällt, die von den durch den Punkt gehenden, in Bezug auf *K* conjugirten Geraden gebildet wird. Diejenigen Punkte, für welche eine der Axen der Indicatrix die nämliche Neigung gegen eine der Hauptaxen von *K* besitzt, bilden eine „Isogone", während der Ort der Punkte, deren Indicatrizen ein constantes Axenverhältnis haben, als „Niveaulinie" bezeichnet wird. Diese beiden Arten von Curven werden für die einzelnen Kegelschnittarten bestimmt; im allgemeinen sind die Isogonen von den Brennpunkten ausgehende Hyperbelbogen, die Niveaulinien Curven vierter Ordnung. Der Abhandlung sind Zeichnungen beigegeben, welche die Resultate veranschaulichen. T.

G. de Longchamps. Sur les normales aux coniques. Mathesis VIII. 110-111.

E. Césaro. Sur la courbure des coniques. Nouv. Ann. (3) VII. 152-159.

Es werden verschiedene Sätze über Krümmung von Kegelschnitten, Evoluten etc. nach einer besonderen Methode (genannt: géométrie intrinsèque) hergeleitet. Mz.

E. Césaro. Remarques sur la théorie des roulettes. Nouv. Ann. (3) VII. 209-230.

Eine grosse Zahl von Sätzen über Rollcurven, hauptsächlich über Kegelschnitte, die sich auf einer Geraden wälzen. Mz.

É. Pomey. Application d'un théorème d'algèbre élémentaire à quelques questions de géométrie analytique. Journ. de Math. spéc. (3) II. 104-109, 131-134.

Der benutzte Satz lautet: Jeder grösste oder kleinste Wert des Bruches

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2}{\alpha' x^2 + 2\beta' xy + \gamma' y^2}$$

ist eine Wurzel λ der Discriminante der binären Form

$$\psi \equiv \frac{1}{\lambda}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) - (\alpha' x^2 + 2\beta' xy + \gamma' y^2).$$

Die Anwendungen erstrecken sich auf die Bestimmung der Entfernung eines Punktes von einer Geraden, der Axen eines Mittelpunktskegelschnitts, der Halbaxenlängen des ebenen Schnittes einer Fläche zweiter Ordnung. Sodann wird auch noch der Satz gegeben: Ist $\theta(x, y, z)$ eine quadratische Form dreier Variabeln, so ist zum Verschwinden der Discriminante der quadratischen Form zweier Variabeln $\theta\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)$ die notwendige und hinreichende Bedingung die, dass diejenige der quadratischen Form $\theta(x, y, z) + 2t(lx+my+nz)$ der vier Variabeln x, y, z, t ebenfalls verschwinde. Lp.

Mourgue. Détermination des foyers d'une conique. Journ. de Math. spéc. (3) II. 4-6.

Aufstellung der Gleichungen für die beiden Hyperbeln H und H', deren Schnittpunkte die gesuchten Brennpunkte sind, durch Identificirung der allgemeinen Gleichung zweiter Ordnung mit der Brennpunktsgleichung

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (lx+my+n)^2.$$ Lp.

C. A. Laisant. Polaires arithmétiques d'une conique. Journ. de Math. spéc. (3) II. 265-269.

Zieht man von einem Punkte P eine variable Secante, deren Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte U und U' sind, so kann man den Ort eines Punktes M auf der Secante aufsuchen, für den $PM = \frac{1}{2}(PU+PU')$ ist, oder für den $\overline{PM}^2 = PU.PU'$ ist. Die beiden (auch sonst schon untersuchten) Oerter nennt Herr Laisant arithmetische und geometrische Polare von P und giebt ihre Haupteigenschaften an. Lp.

Fontaneau. Coniques polaires d'un point et d'une droite. Nouv. Ann. (3) VII. 292-295.

Der Herr Verfasser geht von der Gleichung

$$f(x,y) = 0$$

eines Kegelschnitts C aus und betrachtet einen festen Punkt P, dessen Coordinaten X, Y seien. Dann ist

$$(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (X-x)\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

die Gleichung einer Curve, auf der die Mitten aller Sehnen von C liegen, die durch P gezogen werden können. Betrachtet man jedoch statt cartesischer Coordinaten allgemeinere Punktcoordinaten, so tritt für die unendlich ferne Gerade eine endliche D ein, welche auf allen durch P gehenden Secanten je einen Punkt n bestimmt, zu welchem (mit den Endpunkten a und b der Secante) ein vierter harmonischer Punkt m gehört; und man hat dann an Stelle des Ortes der Secantenmitten den Ort dieses Punktes m. So werden dann mehrere Sätze bewiesen, wie: Zwei Gerade bestimmen durch ihre vier Durchschnitte mit einem Kegelschnitte und durch ihre beiden Pole in Bezug auf diesen Kegelschnitt die sechs Ecken eines Sechsecks, das in einen Kegelschnitt gezeichnet werden kann. Dann folgt der nach dem Princip der Dualität entsprechende Satz und besondere Fälle.

Mz.

V. Retali. Osservazioni analitico-geometriche sulla projezione immaginaria delle curve del second' ordine. Bologna Mem. (4) VII. 601-632. (1886).

V. Retali. Ricerche sopra l'immaginario in geometria. Bologna Mem (4) IX. 259-277.

Wie schon in einer früheren Arbeit (Sulle coniche conjugate vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 560, 569) beschäftigt sich Herr R. auch in den vorliegenden Schriften mit der Theorie der conjugirten Kegelschnitte. Jeder von zwei conjugirten Kegelschnitten ist zu sich selbst polarreciprok hinsichtlich des anderen. Conjugirte Kegelschnitte berühren sich in zwei Punkten, deren Verbindungslinie die Polare der Conjugation ist, während die zugehörigen Tangenten sich im Pole derselben schneiden. Ist $U(x, y, z) = 0$

die Gleichung des Kegelschnittes K^2, so ist zu ihm hinsichtlich x_1, y_1, z_1 der Kegelschnitt

$$U(x,y,z)\; U(x_1,y_1,z_1) - \tfrac{1}{4}\left(x_1\frac{\partial U}{\partial x} + y_1\frac{\partial U}{\partial y} + z_1\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = 0$$

conjugirt. Aus dieser Gleichungsform lassen sich sofort mehrere bekannte Sätze ablesen. So gehört, wenn Q auf dem hinsichtlich P conjugirten Kegelschnitt liegt, P dem hinsichtlich Q conjugirten Kegelschnitte an. (Vgl. z. B. Del Pezzo, Sulle quadriche polari etc., F. d. M. XVII. 1885. 645.) Während der Pol eine Gerade durchläuft, beschreibt der conjugirte Kegelschnitt eine Reihe vom Index 2, die näher untersucht wird. Ferner folgt, dass zwei Diagonalen eines K^2 umbeschriebenen Vierseits die gemeinsamen Punkte der Kegelschnitte enthalten, welche zu K^2 hinsichtlich der Ecken auf der dritten Diagonale conjugirt sind. Alsdann wird die bekannte Gruppe von vier Kegelschnitten untersucht, von denen je zwei hinsichtlich einer Ecke eines allen gemeinsamen Poldreiecks conjugirt sind.

Vorzugsweise beschäftigt sich Herr R. mit dem Ort der Punkte, hinsichtlich deren zu K^2 Kegelschnitte conjugirt sind, welche zwei feste Punkte P, Q harmonisch trennen. Es handelt sich um einen Kegelschnitt, der sowohl P, Q als auch die beiden Punkte harmonisch trennt, die K^2 mit PQ gemein hat. Durchläuft das Paar PQ eine Involution, so beschreibt dieser Kegelschnitt einen Büschel, zu dessen Grundpunkten solche conjugirten Kegelschnitte gehören, welche die Doppelpunkte der vorliegenden Involution enthalten. Die Punkte liegen auf zwei Seiten des Poldreiecks von K^2, von dem zwei Ecken mit einem Paar der Involution zusammenfallen. Dies wird insbesondere auf die Involution der unendlich fernen Kreispunkte und auf die zu K^2 conjugirten gleichseitigen Hyperbeln und Kreise angewandt.

In der zweiten Arbeit sucht Herr R. nachzuweisen, wie nützlich die Theorie der conjugirten Kegelschnitte sich erweist, wenn es sich um Constructionen im Gebiet der imaginären Gebilde in einer reellen Ebene handelt. So können imaginäre Ellipsen definirt werden als Kegelschnitte, die zu reellen hinsichtlich innerer Punkte der letzteren conjugirt sind. So kann

z. B. die Construction der Schnittpunkte zwischen einem reellen Kegelschnitt K^2 und einer imaginären Geraden auf folgende Weise erledigt werden. Es sei $xayb$ die harmonische Darstellung der Geraden, welche zwei conjugirte Strahlen x, y des Kegelschnittes benutzt. Sind X und Y die Pole von x und y hinsichtlich K^2, so wird einer der zu K^2 hinsichtlich X und Y conjugirten Kegelschnitte K^2_X und K^2_Y a (und b) in zwei reellen Punkten treffen. Ist dies K^2_X, so sind die Verbindungslinien der Schnittpunkte mit X die reellen Träger der gesuchten Schnittpunkte. Hat eine imaginäre Gerade ihren reellen Punkt auf K^2, so liegt bekanntlich ihr zweiter Schnittpunkt mit K^2 auf der Axe der Involution von K^2, die zu derjenigen der Geraden perspectivisch ist. Irriger Weise bezeichnet Herr R. eine besondere, das Centrum der Involution enthaltende Gerade als Träger des Schnittpunktes (§ 8). Hat ferner ein imaginärer Punkt einer reellen Tangente die vom Berührungspunkte S ausgehende harmonische Darstellung $SGXH$, so treffen sich im reellen Punkt der zweiten von ihm ausgehenden Tangente die von G und H aus an K^2_X gelegten zweiten Tangenten. Auf viel einfachere Weise lässt sich aber der fragliche Punkt als Centrum der zu SX, GH perspectivischen Tangenten-Involution von K^2 charakterisiren.

Im weiteren Verlauf seiner Arbeit beschäftigt sich Herr R. damit, von einem Punkt einer imaginären Tangente eines reellen K^2 aus die zweite Tangente zu legen, zu einem imaginären Punkte die Polare zu suchen und endlich zu einer Gruppe aus einem reellen und zwei imaginären Punkten die zwei, bezw. drei Elemente der Hesse'schen bezw. kubischen Covariante aufzusuchen. Als Träger des Gebildes wird zuerst ein Kegelschnitt, hernach eine reelle Gerade benutzt. E. K.

B. Sporer. Ueber rechtwinklige und gleichseitige Dreiecke, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben sind. Schlömilch Z. XXXIII. 307-311.

Der Herr Verfasser behandelt zuerst das rechtwinklige, dann das gleichseitige Dreieck und verwendet beide Male den von

ihm früher gegebenen Satz: Beschreibt man um einen Punkt P mit irgend einem Halbmesser einen Kreis, so hat derselbe mit einem Kegelschnitt vier Punkte A, B, C, D gemein, die einen Punkt S zum Schwerpunkt haben, der sich nicht ändert, wenn der Halbmesser des Kreises grösser oder kleiner wird. Indem nun vorausgesetzt wird, dass das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist, und die Schnittpunkte C und D sich vereinigen, werden die auch von Steiner schon gefundenen Sätze über eingezeichnete rechtwinklige Dreiecke gewonnen. Nachher wird vorausgesetzt, dass ABC ein gleichseitiges Dreieck sei, und bewiesen, dass der Ort der Mittelpunkte aller einem Kegelschnitt eingezeichneten gleichseitigen Dreiecke ein Kegelschnitt ist. Jedem solchen Dreieck ist aber ein Kreis umbeschrieben, der den Kegelschnitt ausser in den drei Ecken A, B, C noch in einem Punkte D trifft; und der Schwerpunkt S der vier Punkte A, B, C, D ist für alle solchen Dreiecke gleichfalls auf einem Kegelschnitt veränderlich.

Mz.

Stoll. Ueber einige Sätze J. Steiner's. Schlömilch Z. XXXIII. 78-108.

Zwei ähnlich liegende concentrische Ellipsen mögen die Gleichungen haben

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ und } \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1.$$

Eine Tangente der letzteren schneide die erstere in zwei Punkten mit excentrischen Anomalien φ_1 und φ_2. Alsdann gilt die Differentialgleichung:

$$\frac{\sqrt{4At_2^4+(C^2-4A^2-4)t_2^2+4A}}{1+t_2^2}\,d\varphi_1 = \frac{\sqrt{4At_1^4+(C^2-4A^2-4)t_1^2+4A}}{1+t_1^2}\,d\varphi_2,$$

wobei

$$t_1=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_1,\ t_2=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_2,\ A=\frac{b^2(a^2-a_1^2)}{a^2b_1^2},\ C=2\frac{a_1^2b^2+a^2(b^2-b_1^2)}{a^2b_1^2}$$

ist. Das Resultat gestattet unmittelbar, den Schluss zu ziehen, dass, wenn ein n-Eck der ersten Ellipse ein- und der zweiten umgeschrieben ist, es unendlich viele n-Ecke gleicher Art giebt;

auch folgt der andere bekannte Satz, dass man die Ecken eines n-Ecks so auf der ersten Ellipse fortbewegen kann, dass seine Seiten an Ellipsen fortgleiten, die mit der zweiten ähnlich und ähnlich gelegen sind. Im Anschluss an frühere Entwickelungen stellt dann Herr St. die Beziehungen unter den Constanten auf, welche beim Auftreten von Drei-, Vier- und Achtecken der verlangten Art stattfinden müssen.

Fortwährend die excentrische Anomalie als Parameter benutzend, beweist nun Hr. St., dass ein einer Ellipse eingeschriebener Polygonzug $P_1 P' P'' \dots P^{(n-1)} P_2$ mit festen Endpunkten die grösste Länge dann annimmt, wenn je zwei aufeinanderfolgende Seiten gegen Normale und Tangente in dem gemeinsamen Endpunkte gleich geneigt sind, und also alle Seiten dieselbe zur ersten confocale Ellipse berühren. Namentlich das Letztere hätte sich auf anderem Wege wesentlich einfacher entwickeln lassen. Im Anschluss daran giebt Herr St. den Satz, dass ein n-Eck, welches einer Ellipse ein- und einer confocalen umgeschrieben ist, unter allen der ersteren eingeschriebenen n-Ecken den grössten, unter allen der letzteren umgeschriebenen n-Ecken den kleinsten Umfang besitzt. Das Erstere ist nach den vorhergehenden Entwickelungen zuzugeben, und es hätte eines besonderen Beweises nicht bedurft, um einzusehen, dass die unendlich vielen den Bedingungen genügenden n-Ecke alle den gleichen Umfang besitzen. Die Begründung des zweiten Teiles der Behauptung hingegen hätte wohl ausführlicher sein müssen. Zum Schluss werden Vierecke von der betrachteten Art in's Auge gefasst.

E. K.

J. C. Kluyver. Over de invariante betrekking tusschen twee kegelsneden in en om denzelfden veelhoek beschreven. Nieuw Arch. XV. 37-56.

Nach einem bekannten Satz von Poncelet kann, wenn in einen Kegelschnitt K_0 und zugleich um einen Kegelschnitt K_1 ein Vieleck zu zeichnen ist, eine unbegrenzte Anzahl von Vielecken von gleicher Seitenzahl in K_0 und um K_1 beschrieben werden.

Auf analytischem Wege werden die Beziehungen zwischen den Kegelschnitten und Vielecken näher entwickelt und sodann auf besondere Fälle angewandt. So ergiebt sich in einfacher Weise die Beziehung zwischen zwei Kreisen, in und um welche eine Anzahl Dreiecke oder auch n-Ecke beschrieben werden kann. Weiter wird die Beziehung zwischen den Invarianten, welche sich hierbei ergeben, und den elliptischen Functionen aufgesucht, wobei Unterschied gemacht werden muss zwischen den Fällen, wo n gerade oder ungerade ist. In beiden entstehen schöne Reihen, welche für besondere Werte von n weiter entwickelt werden. G.

Faure. Sur un théorème de Chasles. Nouv. Ann. (3) VII. 31-37.

Sind drei Kegelschnitte A, A', A'' einem Viereck umbeschrieben, und hat man ausserdem einen Kegelschnitt U, so construire man einen Kegelschnitt B, der durch die vier Durchschnittspunkte von U und A geht. Dann liegen die Durchschnittspunkte von B und A' und die von U und A'' auf demselben Kegelschnitt.

Dies wird einfach analytisch bewiesen, und daran werden zahlreiche Zusätze und Folgerungen geknüpft. Mz.

M. d'Ocagne. Quelques propriétés de l'ellipse, déviation, écart normal. Nouv. Ann. (3) VII. 268-282.

Sind $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ die Coordinaten eines Punktes M der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ und $a\cos\varphi$, $a\sin\varphi$ die Coordinaten des entsprechenden Punktes M' des Kreises $x^2+y^2=a^2$, so wird der Winkel, den die Kreistangente in M' mit der Ellipsentangente in M bildet, Deviation genannt; ferner heisst der Winkel, den die Ellipsennormale in M mit dem Ellipsenradius OM bildet „écart normal“ (etwa: Normalenabweichung). Diese beiden Winkel mit ihren mannigfachen Beziehungen zur Ellipse bilden den Gegenstand dieser Arbeit. Mz.

E. Reusch. Die conjugirten Halbmesser der Ellipse. Böklen Mitt. II. 141-143.

Gleitet eine Strecke mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels, so beschreiben zwei Punkte M und m, die auf der Strecke symmetrisch zu deren Mitte liegen, zwei Ellipsenquadranten, welche denselben Mittelpunkt (O) und dieselben Axen haben, aber um einen Winkel von 90° gegen einander gedreht sind. Lässt man die eine der Ellipsen (m) die Drehung um diesen Winkel ausführen, so fällt sie mit der Fortsetzung des andern Ellipsenquadranten zusammen, und kommt hierbei der dem Punkte M entsprechende Punkt m in die Lage μ, so sind OM und $O\mu$ conjugirte Halbmesser der Ellipse (M). Auf Grund dieser Betrachung werden die bekannten Eigenschaften der conjugirten Halbmesser leicht gefunden.

F.

C. M. Piuma. Soluzione di un problema proposto dal Sig. Lucas. Batt. G. XXVI. 189-196.

Es ist dies die Fortsetzung einer früheren Arbeit (F. d. M. XVI. 1884. 639). Durch jeden Punkt M einer Ellipse gehen bekanntlich vier Kreise, die die Ellipse osculiren, nämlich einer, der im Punkte M osculirt, und ausserdem noch drei andere, von denen jeder die Ellipse in einem von M (im allgemeinen) verschiedenen Punkte osculirt. Sind A, B, C diese Punkte für die drei Kreise, so hat das Dreieck ABC das Centrum der Ellipse zum Schwerpunkt. Umgekehrt: Hat man ein Dreieck ABC, das der Ellipse eingeschrieben ist und das Ellipsencentrum zum Schwerpunkt hat, und construirt die Krümmungskreise an die Ellipse in den Punkten A, B, C, so gehen diese drei Kreise durch einen und denselben Punkt der Ellipse. Durch diesen Punkt geht auch der dem Dreieck ABC umgeschriebene Kreis.

So werden noch mancherlei Sätze, die hier nicht alle angegeben werden können, analytisch hergeleitet. Mz.

Stoll. Herleitung der Mittelpunktscoordinaten und des Halbmessers eines Kreises aus seiner Gleichung in trimetrischen Punktcoordinaten. Schlömilch Z. XXXIII. 245-251.

Enthält die Lösung der in der Ueberschrift genannten Aufgabe, die Anwendung des Resultates auf einige specielle Fälle, die Lösung der umgekehrten Aufgabe, aus den Coordinaten des Mittelpunkts und dem Radius die Normalform der Kreisgleichung in trimetrischen Coordinaten zu finden, und schliesslich eine Methode, um „ohne Zuziehung geometrischer Betrachtungen die Potenz eines beliebigen Punktes in Bezug auf einen Kreis aus seiner Gleichung allein abzuleiten“. F.

A. J. A. Prange. Over de oplossing van het vraagstuk: de middelpunten en stralen te vinden der cirkels, die aan drie gegeven cirkels raken. Nieuw Arch. XV. 165-187.

Auf analytischem Wege wird in diesem Aufsatz die Aufgabe behandelt, die Mittelpunkte und Radien der Kreise zu finden, welche drei gegebene Kreise berühren. Zuerst stellt Verfasser einige Betrachtungen über die Auflösungen anderer niederländischer Mathematiker an, Elsevier, Ulman und Badon Ghyben, und zeigt, in wiefern dieselben nicht genügen. Als Vorteile seiner rein analytischen Auflösung führt der Verfasser folgende Punkte an: 1. Die Coördinaten der gesuchten Mittelpunkte werden erhalten aus Gleichungen ersten Grades; 2. die Radien der gesuchten Kreise ergeben sich unzweideutig aus Gleichungen zweiten Grades; 3. die gefundenen Werte gelten auch für den besondern Fall, dass die Radien gleich sind. Durch ausführliche Berechnungen in Determinantenform werden die genannten Gleichungen abgeleitet und ihre Auflösungen erhalten.

Schliesslich untersucht Verfasser die Bedeutung der Wurzeln und bespricht einige besondere Fälle. Doch wird aus der langen Rechnung keine vereinfachte Construction abgeleitet. G.

J. McMahon. On a property of an imaginary line passing through one of the circular points at infinity. Annals of Math. IV. 91.

Die Gerade $y = ix$ bildet mit sich selbst jeden beliebigen Winkel; wenn sich ein constanter Winkel um seinen Scheitel dreht, so erzeugen seine Schenkel zwei Strahlenbüschel in involutorischer Lage, die Geraden $y = \pm ix$ sind die Doppelstrahlen der Involution. R. M.

F. Amodeo. On the chords of a parabola and generally of a conic. Annals of Math. IV. 92.

Die von Graves mitgeteilten Eigenschaften der durch den Brennpunkt der Parabel gehenden Sehnen (F. d. M. XIX. 1887. 726) gelten in entsprechender Weise für jede Sehne, das zugehörige Tangenten-Parallelogramm und die parallele Sehne; der Satz von der Einhüllenden bleibt auch erhalten bei einem beliebigen Kegelschnitt, wenn man an Stelle der unendlich fernen Geraden die Tangente eines dritten Kegelschnittpunktes setzt.
R. M.

J. Wolstenholme, R. F. Davis. Solution of question 9241. Ed. Times XLVIII. 86-87.

S sei der Brennpunkt, P ein beliebiger Punkt einer gegebenen Parabel. Mit S als Brennpunkt und P als Scheitel beschreibe man eine zweite Parabel. Diese trifft die erste in einem reellen Punkte Q. Dann ist PQ Normale in P zur ersten Parabel. Der Ort des Poles von PQ in Bezug auf die zweite Parabel ist die Curve dritter Ordnung $y^2(x-4a) = 4a^3$ ($4a$ = Parameter der ersten). Lp.

C. Bergmans. Théorèmes sur la parabole. Mathesis VIII. 63-68.

G. de Longchamps, E. Fesquet. Solution d'une question. Journ. de Math. spéc. (3) II. 19-22.

Gegeben sei ein rechter Winkel yOx, auf Ox ein fester Punkt A ($OA = a$), auf Oy ein fester Punkt B ($OB = b$). Durch die Punkte A und B legt man ein System zweier zu einander senkrechten Axen ωA, ωB und construirt eine gleichseitige Hyperbel, welche durch O geht und ωA, ωB zu Symmetrie-Axen besitzt. Dann gehen durch jeden Punkt der Ebene zwei von diesen Hyperbeln. Die Gleichung ihrer Enveloppe ist

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)(ax+by)+(bx+ay)^2 = 0.$$

Die Oerter der Scheitel, der Brennpunkte, der Schnittpunkte der Directrix mit der Axe, der Projectionen des Ursprungs auf die Asymptoten werden durch ein System zweier Kreise gebildet.

Lp.

R. Tucker. Note on a rectangular hyperbola. Ed. Times XLIX. 116-117.

Bemerkungen über Eigenschaften, welche mit der Dreiecksgeometrie zusammenhängen.

Lp.

Ch. B. Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique en 1888. Nouv. Ann. (3) VII. 305-314. Composition de Mathématiques (6 juin 1888). Journ. de Math. spéc. (3) II. 160-164.

Ein ebenes Viereck $OACB$ ist gegeben, und ausserdem hat man zwei Scharen von Parabeln; die einen berühren AC in A und haben OA zum Durchmesser, die andern berühren BC in B und haben OB zum Durchmesser. Man verlangt den Ort des Berührungspunktes M einer Parabel der ersten Schar mit einer Parabel der zweiten Schar. Dieser Ort ist ein Kegelschnitt. Darauf wird angegeben, wo C anzunehmen ist, während O, A, B unverändert bleiben, damit dieser Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel werde. Es wird dann der Fall weiter behandelt, in welchem das Viereck $OACB$ ein Parallelogramm ist; dann dreht sich die gemeinschaftliche Tangente der Parabeln in M um den Schwerpunkt K von ABC. Endlich wird der Ort des

Schnittpunktes dieser Tangente mit der anderen gemeinschaftlichen Tangente beider Parabeln bestimmt. Mz.

Roux. Solution géométrique de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1888. Nouv. Ann. (3) VII. 384-391.

Diese Arbeit steht in unmittelbarem Zusammenhange mit der vorhergehenden. Derselbe Gegenstand wie dort wird rein geometrisch behandelt. Mz.

H. Ferval. Solution de la question proposée au concours d'agrégation en 1887. Nouv. Ann. (3) VII. 236-244.

Jeder Punkt P, von welchem an einen Kegelschnitt S ein Tangentenpaar geht, das harmonisch zu demjenigen conjugirt ist, das von P an einen anderen Kegelschnitt S' geht, liegt bekanntlich auf einem dritten Kegelschnitt Σ, und Σ geht durch die Berührungspunkte $a, b, c, d, a', b', c', d'$ der vier den Kegelschnitten S und S' gemeinsamen Tangenten. Nun werde aber S' so bestimmt, dass Σ ein Kreis wird; dann giebt es vier Kreise, von denen jeder durch zwei Brennpunkte von S und durch zwei Brennpunkte von S' geht. Die Mittelpunkte eines jeden dieser vier Kreise sind reell; von den Kreisen selbst sind nur drei reell. Wenn a und a' die Berührungspunkte von S resp. S' mit einer der vier gemeinsamen Tangenten sind und a' die Projection des Centrums von S auf die gemeinsame Tangente ist, dann müssen sich die Normalen an S' in den Punkten b', c', d' in einem und demselben Punkte M treffen; derselbe bleibt unveränderlich, während der Kreis Σ sich so ändert, dass er immer durch die Punkte a und a' geht.

Dies wird nach analytischer Methode bewiesen, wobei Punkt- und Liniencoordinaten gleichzeitig zur Anwendung kommen. Mz.

Levavasseur. Agrégation des sciences Mathématiques (Concours de 1887). Journ. de Math. spéc. (3) II. 36-39, 61-6[illegible]

Analytische Beweise und Auflösungen der im vorangehenden Berichte angeführten Sätze und Aufgaben. Lp.

Ch. B. Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au concours général de 1888. Nouv. Ann. (3) VII. 231-236.

Es sei C die Curve, auf der alle Punkte liegen, von welchen an die Ellipse E mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Tangenten gehen, die den Winkel ω mit einander bilden; dann ist die Gleichung von C:

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2=k^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

wo $k^2=\frac{4a^2b^2}{\operatorname{tang}^2\omega}$. Ist nun D eine gegebene Gerade, so giebt es drei Kegelschnitte, welche die Curve C in vier Punkten und ausserdem noch D berühren. Trifft die Gerade D die Curve C in α_1, α_2, α_3, α_4, so kann man durch zwei dieser Punkte α_1, α_2 eine Schar von Kreisen legen. Jeder solcher Kreis trifft C noch in zwei Punkten m und m', und die Enveloppe aller solchen Linien mm' ist ein Kegelschnitt. Berührt die Gerade D die Ellipse E, und legt man durch die vier Punkte α_1, α_2, α_3, α_4, in denen C von D getroffen wird, an E diejenigen Tangenten, die nicht mit D coincidiren, so ist der Ort der Ecken des von diesen vier Tangenten gebildeten Vierseits die Curve, deren Gleichung:

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2=k'^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

wo

$$k'^2=\frac{4a^2b^2}{\operatorname{tang}^2\omega}.$$

Mz.

E. Barisien. Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1887. Nouv. Ann. (3) VII. 244-248.

Durch einen Punkt ω der Ebene, dessen Coordinaten für ein rechtwinkliges Axensystem Oxy die Grössen a und b sind, werden Strahlen gezogen. Eine Parabel berühre die Coordinatenaxen in den Punkten, in welchen eine solche durch a gelegte Gerade die Axen trifft, dann ist die Gleichung dieser Parabel:

$$\text{(I)}\quad (y+mx)^2+2(y-mx)(ma-b)+(ma-b)^2=0,$$

während $y-b=m(x-a)$ die Gleichung der durch a gelegten Geraden ist. Die Axe dieser Parabel (I) hat die Gleichung:

$$\text{(II)}\qquad y+mx+(ma-b)\frac{1-m^2}{1+m^2}=0.$$

Die Gleichung der Directrix ist $my-x=0$. Durch Elimination von m aus dieser und der vorigen Gleichung erhält man:

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)(ax-by),$$

d. i. eine Curve vierten Grades mit dreifachem Punkt in O, als Ort der Durchschnitte von Axe und Directrix aller in Gleichung (I) bei veränderlichem Parameter m enthaltenen Parabeln. Vertauscht man in Gleichung (II) m mit $-\frac{1}{m}$, so hat man die Axe der zum Parameter $-\frac{1}{m}$ gehörenden Parabel, und der Ort der Durchschnitte je zweier solchen Axen ist der Kreis mit der Gleichung:

$$x^2+y^2=ax+by.$$

Endlich werden noch die Coordinaten des Brennpunktes einer solchen Parabel bestimmt. Mz.

Ancien élève de Math. spéc. Quelques remarques géométriques à propos de la question précédente. Nouv. Ann. (3) VII. 248-252.

Diese Arbeit steht in unmittelbarem Zusammenhange mit der vorigen. Man hat wieder eine Schar von Parabeln:

$$(y+mx)^2+2(y-mx)(ma-b)+(ma-b)^2=0,$$

wo m variabler Parameter ist. Es werden aber hier durch rein geometrische Betrachtung zahlreiche Sätze gewonnen; so unter anderem: Die Enveloppe der Axen aller dieser Parabeln ist eine Hypocykloide mit drei Spitzen, u. s. w. Mz.

E. Amigues, F. Michel. Solution d'une question. Journ. de Math. spéc. (3) II. 17-19, 93.

Um ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck beschreibt man den Kreis und eine gleichseitige Hyperbel. Beide Curven haben alsdann ausser den drei Ecken des Dreiecks noch einen Punkt gemeinsam. In diesem letzteren zieht man die Tangente an den Kreis. Der Ort des Schnittpunktes dieser Tangente mit den durch den Scheitel des rechten Winkels gehenden Parallelen zu den Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel ist eine unicursale Curve fünfter Ordnung; ihre Gleichung in Bezug auf die Katheten des gegebenen Dreiecks als Axen lautet:

$$(x+y)(x^2+y^2)(4xy-x^2-y^2) = 8ax^2y^2.$$

Für den Ort des Schnittpunktes der Hyperbeltangente mit denselben beiden Parallelen findet man die Gleichung:

$$(x^2+y^2)^2 = 4axy(x+y).$$

Lp.

A. Abelin. Questions d'examen. Journ. de Math. spéc. (3) II. 42-43.

Lösung der Aufgabe, den Ort für den Mittelpunkt eines Kegelschnittes von constantem Inhalte zu finden, der drei gegebene Geraden berührt. Der gesuchte Ort ist eine Curve dritter Ordnung. Lp.

J. Wolstenholme. Solution of question 8279. Ed. Times XLVIII. 54-56.

Eine gemeinschaftliche Tangente zweier Kegelschnitte S, S' berührt sie in A, A', und durch einen festen Punkt H auf dieser gemeinschaftlichen Tangente wird eine beliebige Gerade gezogen, welche die beiden Kegelschnitte bezw. in P, Q und P', Q' schneidet. Dann liegen die Schnittpunkte von AP, AQ mit $A'P'$, $A'Q'$ auf einem festen Kegelschnitte, der durch die vier Schnittpunkte von S und S' geht. Lp.

Asparagus, R. Lachlan. Solution of question 8020. Ed. Times XLIX. 82-84.

Einem Dreiecke *ABC* ist ein Kegelschnitt umbeschrieben, dessen einer Brennpunkt auf *BC* liegt. Dann hüllt die zugehörige Directrix einen Kegelschnitt ein, in Bezug auf welchen *A* der Pol von *BC* ist. Wenn der Winkel *A* ein rechter ist, so ist die Hüllcurve die Parabel, deren Brennpunkt *A*, deren Leitlinie *BC* ist. Herr Lachlan entwickelt auch noch einige Verallgemeinerungen dieses Satzes. Lp.

D. Andere specielle Curven.

O. Schlesinger. Ueber die Verwertung der ϑ-Functionen für die Curven dritter Ordnung nebst einer Anwendung auf die zu einer Curve dritter Ordnung apolaren Curven. Math. Ann. XXXI. 183-219.

In einer früheren Arbeit (Math. Ann. XXX. 455 ff., cf. F. d. M. XIX. 1887. 710 f.) ist es dem Herrn Verfasser gelungen, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufzustellen, dass eine Curve dritter Ordnung C^3 zu einer Curve dritter Klasse K^3 conjugirt sei; dieselbe besteht darin, dass der ersteren unendlich viele Polarfünfecke der letzteren eingeschrieben sind. In dem vorliegenden Aufsatz handelt es sich um die allgemeinere Aufgabe: auf der gegebenen C^3 alle Gruppen von je p Punkten zu bestimmen, welche Polar-p-Ecke einer oder mehrerer zu der C^3 apolaren Klassencurven bilden. Diese Aufgabe wird in voller Allgemeinheit gelöst und damit die geometrische Beziehung aufgedeckt, welche dem bisher nur algebraisch definirten Begriffe der Apolarität (in diesem Falle) entspricht. Dies gelingt durch Herbeiziehung der Parameterdarstellung der C^3, und zwar geschieht dieselbe in einer Weise, welche der Behandlungsweise der unicursalen Curve genau nachgebildet ist; ebenso wie für diese jede Punktgruppe auf ihr durch eine ganze rationale Func-

tion vertreten wird, werden auch für die Curve vom Geschlecht Eins irgend welche Punktgruppen auf ihr durch ϑ-Producte repräsentirt, wenn man die homogenen Coordinaten einer solchen Curve gewissen ϑ-Producten proportional setzt.

Auf Grund eines für den vorliegenden Zweck fundamentalen Satzes über Gruppen (lineare Aggregate) von ϑ-Producten und nach Erörterung der Verteilung von ϑ-Producten mit demselben Index ϱ auf der C^3 erhält der Verfasser folgenden wichtigen Satz: Sind $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_g = 0$ independente zu C^3 apolare Curven n^{ter} Klasse, und ist $r \equiv (g+1)p - 3gn > 0$, so giebt es auf C^3 im allgemeinen (und mindestens) für jeden Wert des Index ϱ eine r-gliedrige Gruppe von ϑ-Functionen n^{ter} Ordnung, deren Punkte Polar-p-Ecke repräsentiren; ist $r = 0$, so giebt es im allgemeinen $g+1$ Polar-p-Ecke sämtlicher Curven φ. Von den vielen Folgerungen, die sich aus diesem Satze ziehen lassen, wird zunächst eine Anzahl von Sätzen hervorgehoben, die sich für den Fall $g = 1$, $n = 3$ ergeben, deren jeder eine geometrische Interpretation des Conjugirtseins einer C^3 und einer K^3 liefert, und sodann, indem $g = 1$ gesetzt, aber n beliebig gelassen wird, die oben erwähnte allgemeine Aufgabe durch folgende Sätze gelöst: Eine Curve $2\nu^{\text{ter}}$ Klasse $K^{2\nu}$ ist zu einer C^3 dann und nur dann apolar, wenn C^3 zwei Polar-3ν-Ecke von $K^{2\nu}$ enthält; ihre 6ν Ecken bilden ein vollständiges Schnittpunktsystem. Eine Curve $(2\nu+1)^{\text{ter}}$ Klasse $K^{2\nu+1}$ ist zu einer C^3 dann und nur dann apolar, wenn der C^3 einfach unendlich viele Polar-$(3\nu+2)$-Ecke von $K^{2\nu+1}$ eingeschrieben werden können; alsdann geht durch jeden Punkt der C^3 eine Curve $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren weitere Schnittpunkte eines der Polar-$(3\nu+2)$-Ecke formiren; jeder Punkt β der C^3 lässt sich ferner auf zwei Arten zu je einem Polar-$(3\nu+2)$-Eck von $K^{2\nu+1}$ ergänzen, und die beiden Restpunkte der so erhaltenen zwei Systeme von je $(3\nu+2)$ Punkten liegen mit β in gerader Linie. Schliesslich werden als Beispiele für die Anwendung des obigen Satzes noch einige Fälle hervorgehoben, in denen $g > 1$ ist, d. h. mehrere apolare Curven in Betracht kommen, z. B.: Ist die Schar $(K_1^4 K_2^4)$ zu C^3 apolar, so giebt es auf C^3 drei gemeinschaftliche Polarachtecke der

Schar, und die drei Restpunkte dieser drei Systeme von je acht Punkten liegen auf einer Geraden.

Die erlangten Resultate bleiben auch für unicursale Curven gültig, und es wird in einem Schlussparagraphen gezeigt, wie man dieselben in ganz analoger Weise auch in diesem Falle herzuleiten hat. T.

J. J. Walker. On the diameters of a plane cubic. Lond. Phil. Trans. CLXXIX. 151-203.

Der Zweck der Abhandlung ist die Entwickelung der Beziehungen, die zwischen einer kubischen Curve u und der Schar von Linien in ihrer Ebene bestehen, welche in Bezug auf dieselbe die Polaren der auf irgend einer Transversale L liegenden Punkte sind. Diese Linienschar wird zu dem Systeme Newton'scher Durchmesser der kubischen Curve, wenn die Punkte oder die Ebene parallel zu derjenigen Ebene projicirt werden, welche das Projectionscentrum und die Linie L enthält.

Häufig wird in der Abhandlung Bezug genommen auf die Hüllcurve der fraglichen Linien, den Kegelschnitt:

$$l^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)^2\right\}+\cdots$$
$$\cdots+2mn\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right\}+\cdots=0$$

($u=0$ die kubische Curve, $lx+my+nz=0$ die Linie L), für welchen aus Analogie mit dem Pole einer Linie in der Theorie der Kegelschnitte der Name „Poloide" der kubischen Curve u und der Linie L in Vorschlag gebracht wird, und insbesondere „Centroide", wenn die Linie L im Unendlichen liegt.

Cly. (Lp.)

G. Torelli. Su qualche proprietà delle curve piane del terz'ordine fornite di un punto doppio. Annali del R. Ist. Tecn. e Naut. di Napoli.

In dieser Note wendet der Verfasser einige Resultate, welche er in seiner Arbeit „Sul sistema di più forme binarie

cubiche" (Nap. Rend. 1885, F. d. M. XVII. 87) gewonnen hat, auf die Erforschung der rationalen ebenen Curven dritter Ordnung an. So findet er: „Wenn ein der rationalen Curve dritter Ordnung eingeschriebenes $2n$-Eck, während es immer der Curve eingeschrieben bleibt, sich so umgestaltet, dass $2n-1$ von seinen Seiten sich um ihre übrigen Treffpunkte mit der Curve drehen, so dreht sich auch die $2n^{te}$ um ihren übrigen Schnittpunkt mit der Curve". Dieser Satz entspricht dem auf S. 590 der „Vorlesungen über Geometrie" von A. Clebsch und kann leicht vermittelst der Parameter-Darstellung der Curve bestätigt werden, die S. 586 des angeführten Werkes steht. La. (Lp.)

G. Torelli. Su qualche proprietà delle curve piane del terz' ordine fornite di un punto doppio. Batt. G. XXVI. 172-177.

G. Torelli. Un teorema sulle curve del 3^0 ordine. Batt. G. XXVI. 327-328.

In einer früheren Note (Nap. Rend. XXIV. 258-261, F. d. M. XVII. 87) hat der Verfasser Identitäten unter den Covarianten eines Systems mehrerer binären kubischen Formen nachgewiesen. Aus diesen Formeln leitet er nun einige Eigentümlichkeiten der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt her, darunter den (schon von d'Ovidio aufgestellten) Satz: „Lässt man eine gerade Linie um einen Punkt in der Ebene einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt rotiren, so bilden die Ternen der Strahlen, welche man erhält, indem man die drei Schnittpunkte der Geraden und der Curve vom Doppelpunkt aus projicirt, eine einfache kubische Involution", und die folgende Verallgemeinerung des Desargues'schen auf Kegelschnitte bezüglichen Theorems: „Wenn $2n-1$ Seiten eines $2n$-Ecks, das einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt einbeschrieben ist, sich derart drehen, dass ihre dritten, keine Eckpunkte bildenden, Schnittpunkte mit der Curve fest bleiben, so dreht sich auch die letzte Seite um ihren dritten Schnittpunkt mit der Curve".

Dass der letztere Satz auch für Curven dritter Ordnung

ohne Doppelpunkt gilt, wird in der zweiten der oben angeführten Arbeiten gezeigt. F.

F. Dingeldey. Ueber die Transformation der Gleichung der ebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf die Normalform. Math. Ann. XXXI. 177-182.

Der Herr Verfasser stellt sich die Aufgabe, die Gleichung der ebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf folgende Normalform zu bringen:

$$f \equiv a(x_1^3 + x_2^3) + 6lx_1x_2x_3 = 0.$$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ sind dann die Doppelpunkttangenten; $x_3 = 0$ die Wendegerade. Das Problem wird nach einer von Herrn Gundelfinger (Math. Ann. IV. 561) empfohlenen Methode mit Hülfe der von Herrn Cayley (American J. IV) aufgestellten Concomitanten der Hesse'schen Normalform:

$$ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3 + blx_1x_2x_3 = 0$$

gelöst. W. St.

L. Raffy. Sur la rectification des cubiques planes unicursales. C. R. CVII. 944-946.

Die ebenen Curven dritten Grades werden nach dem Geschlechte des hyperelliptischen Integrals, welches den Bogen ausdrückt, eingeteilt und die Singularitäten genannt, welche dasselbe bedingen. Zum Geschlecht 2 gehören allein diejenigen, welche einen Rückkehrpunkt im Endlichen, ferner die, welche eine unendlich entfernte Tangente, und die, welche eine Doppelasymptote haben. Zum Geschlecht 1, wo das Integral elliptisch ist, allein diejenigen, welche eine der vier folgenden Singularitäten ohne die übrigen haben: 1. zwei Wendepunkte mit isotroper Tangente im Endlichen; 2. Rückkehrpunkt im Endlichen und unendlich ferne Tangente; 3. parabolischen Wende- oder Rückkehrpunkt im Unendlichen; 4. Durchgang durch die Cykliken. Zum Geschlecht 0 allein: 1. die Curve

$$(x + l)y^2 - 27lx^2 = 0;$$

2. die schiefen oder geraden semikubischen Parabeln; 3. die

schiefen oder geraden Cissoiden; 4. die Curve

$$(y+l)y^2-3lx^2 = 0.$$

H.

A. R. JOHNSON. Solution of question 9059. Ed. Times XLVIII. 82-84.

Bei der Curve dritter Ordnung

$$(x^2+y^2)(lx+my+n) = (l'x+m'y+n')^3$$

ist das Product der Abstände der Ursprungs der Coordinaten von den Fusspunkten der neun Normalen aus einem beliebigen Punkte an die Curve dem Kubus des Abstandes dieses Punktes vom Ursprunge proportional. Verallgemeinerung dieses Satzes auf die Curve $(x^2+y^2)w = uv$, wenn $u=0$, $v=0$, $w=0$ die Gleichungen dreier Kegelschnitte sind. Lp.

H. ROPERT, BALITRAND, CH. MARTIN. Solution de la question 174. Journ. de Math. spéc. (3) II. 141-143.

Ein Kreis sei auf zwei durch seinen Mittelpunkt gehende rechtwinklige Axen OX, OY bezogen; auf OX nehme man einen festen Punkt P an, ziehe durch ihn die bewegliche Secante PAB (A und B die Schnittpunkte mit dem Kreis). Dann ist der Ort des Höhenschnitts für das Dreieck OAB eine unicursale Curve dritter Ordnung mit der Gleichung

$$(x^2+y^2)(dx+R^2)-2d^2x^2 = 0$$

($OP = d$, Radius des Kreises $= R$ gesetzt). Diese Curve wird näher untersucht. Lp.

K. ZAHRADNIK. Eigenschaften gewisser Punktetripel auf der Cissoide. Hoppe Arch. (2) VI. 392-414.

Der Verfasser hat in demselben Archiv schon mehrere Aufsätze über die Cissoiden veröffentlicht; die hier vorliegenden Rechnungen geben einige ganz interessante Beispiele zu den rationalen (Cremona'schen) Transformationen.

Von einem beliebigen Punkt P können an die Cissoide drei

Tangenten gelegt werden; die merkwürdigen Punkte des dadurch bestimmten Dreiecks der Berührungspunkte stehen in eindeutiger Beziehung zu *P*. Der Schwerpunkt *S* hat zu *P* eine Kreisverwandtschaft, der Mittelpunkt *M* des umbeschriebenen Kreises hat zu *P* eine allgemeine quadratische Verwandtschaft, zwischen *S* und *M* besteht also eine Beziehung vierten Grades. Wenn sich *P* bewegt, kann man die Enveloppen sowohl des umbeschriebenen Kreises als auch der Euler'schen Geraden angeben. Besonderes Interesse hat der Fall, wo *P* die Cissoide selbst beschreibt.

Ein zweites zu ähnlichen Untersuchungen geeignetes Punktetripel erhält man, wenn man von einem Cissoidenpunkte aus die drei möglichen Normalen der Curve bestimmt. R. M.

W. E. Heal. On certain singularities of the Hessians of the cubic and the quartic. Annals of Math. IV. 37-46.

Ist ein Punkt ein singulärer Punkt einer Curve, so entsteht die Frage nach der Natur seiner Singularität auf der zugehörigen Hesse'schen Curve. Diese Frage wird in eingehendster Weise für die Curven dritter und diejenigen vierter Ordnung beantwortet. Zu diesem Zwecke wird der betrachtete Punkt zum Coordinatenanfangspunkt gemacht und auch für die Curve vierter Ordnung die Gleichung der Hesse'schen Curve explicite hingeschrieben, wie sie sich für die Curve dritter Ordnung in Salmon's Higher Plane Curves findet. T.

G. Frobenius. Ueber die Jacobi'schen Covarianten der Systeme von Berührungskegelschnitten einer Curve vierter Ordnung. J. für Math. CIII. 139-183.

Die 378 Paare der 28 Doppeltangenten einer ebenen C_4 ordnen sich bekanntlich in 63 Gruppen *G* von je sechs und geben dadurch zu den 63 Systemen von Berührungskegelschnitten Anlass. Bildet man für irgend eines der sechs Paare einer Gruppe *G* das vollständige Viereck der Berührungspunkte, so liegen nach Steiner die 3.6 Ecken der zugehörigen Cardinal-

dreiecke je auf einer Curve dritter Ordnung G_3, deren es also ebenfalls 63 giebt. Die linken Seiten der Gleichungen dieser G_3 sind irrationale Covarianten der Curve, und die vorliegende Arbeit stellt nicht nur diese Covariantenformen wirklich auf, sondern lässt auch die Beziehungen zwischen ihnen wie zu den bezüglichen Doppeltangenten und Berührungskegelschnitten invarianten-theoretisch deutlich erkennen; sie ist insofern eine Fortsetzung einer im IC. Bande desselben Journals erschienenen Abhandlung des Verfassers. Der zu Grunde gelegte Rationalitätsbereich ist wiederum der eines Aronhold'schen Doppeltangentenseptupels: freilich wäre es wünschenswert, auch die entsprechenden Entwickelungen unter Adjunction aller 28 Doppeltangenten zu besitzen. Eines der merkwürdigsten Einzelergebnisse der vorliegenden Entwickelungen ist folgendes: Nennt man zwei Steiner'sche Gruppen G syzygetisch oder asyzygetisch, je nachdem ihre Charakteristiken eine gerade oder ungerade Anzahl von Indices gemeinsam haben, so berühren die sechs Doppeltangenten, welche zwei asyzygetischen Gruppen G stets gemeinschaftlich sind, einen Kegelschnitt. Ihre 18 Berührungspunkte mit der C_4 und dem Kegelschnitt liegen auf einer Curve dritten Grades. Dieselbe geht auch durch die neun Schnittpunkte der beiden Curven G_3, welche zu den beiden Gruppen G gehören.

Es folgt dieser Satz aus einer eleganten Relation zwischen Covarianten G_3. Als systematischer Fortschritt erscheint noch, dass in den Zusammenhang der 36 Arten, die es nach Hesse giebt, um die 28 Doppeltangenten der C_4 zu den Verbindungslinien von acht Raumpunkten in Beziehung zu setzen, ein tieferer Einblick gewährt wird, sowie die Aufdeckung der Verwandtschaft zwischen den Functionen G_3 zu den Wurzelfunctionen und deren Differentialen.

Was die Bezeichnung der G_3 als Jacobi'sche Covarianten angeht, so erklärt sich dieselbe dadurch, dass eine G_3 nichts anderes ist als die Jacobi'sche Curve eines Kegelschnittnetzes, nämlich eben des Netzes, dem die sechs Doppeltangentenpaare einer Steiner'schen Gruppe G angehören, und welches dadurch völlig bestimmt ist.

Bezüglich des ausgedehnten Formelmechanismus, de wesentlich auf Kronecker'sche Sätze über Subdetermi symmetrischer Systeme stützt, muss auf die Arbeit selb wiesen werden.

Es steht zu hoffen, das bei weiterer Verfolgung des zeigten Weges die Theorie der irrationalen In- und Covar derjenigen der rationalen mit der Zeit ebenbürtig zur Seite kann. My

---

Ernst Meyer. Die rationalen ebenen Curven 4ter nung und die binäre Form 6ter Ordnung. Diss. K berg.

Die Arbeit steht in engem Zusammenhange mit dene Herren Gross und Friedrich (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 700, 1887. 708), und ist einem systematischen Studium der rianten Eigenschaften einer ebenen rationalen C_4 auf Grund Satzes gewidmet, dass die drei repräsentirenden binären Fo vierter Ordnung als zweite Ableitungen einer bestimmten sechster Ordnung angesehen werden können. Im besond werden auf dieser Grundlage die Gleichungen für die Si laritäten der Curve in einfacher Gestalt abgeleitet und die dingungen für höhere Singularitäten ermittelt. My.

Fr. Meyer. Zur algebraischen Erzeugung sämtlic auch der zerfallenden ebenen rationalen Curven v ter Ordnung. Math. Ann. XXXI. 96-133.

Der Herr Verfasser benutzt in diesem Aufsatze diese Principien, deren er sich in einer früheren Arbeit (Math. XXIX) zur Erzeugung der rationalen Raumcurve 4ter Ordn bedient hat (F. d. M. XIX. 1887. 812).

Ist die ebene R_4 definirt durch die Gleichungen:

$$\varrho x_i = a_{i0} + a_{i1}\lambda + \cdots + a_{i4}\lambda^4 = f_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und will man einen zu dieser Curve perspectiven Strahlenbüsc ν'^{ter} Ordnung construiren, so hat man drei Functionen ν'^{ter} Ordn

$\varphi_i(\mu)$ eines Parameters μ zu bestimmen, welche der Identität genügen:

$$f_1(\overset{4}{\lambda})\varphi_1(\overset{\nu'}{\mu}) + f_2(\overset{4}{\lambda})\varphi_2(\overset{\nu'}{\mu}) + f_3(\overset{4}{\lambda})\varphi_3(\overset{\nu'}{\mu}) \equiv (\lambda-\mu)\,\Phi(\overset{3}{\lambda}, \overset{\nu'-1}{\mu}).$$

Dann ist der Strahlenbüschel definirt durch die Gleichungen:

$$\sigma u_i = \varphi_i(\overset{\nu'}{\lambda}).$$

Es wird nun zunächst gezeigt, dass diese Aufgabe in allgemeinster Weise leicht gelöst werden kann, sobald sie für $\nu' = 2$ gelöst ist.

Letzteres geschieht in folgender Weise: Es giebt bekanntlich zwei linear-unabhängige, zu den Formen $f_i(\lambda)$ conjugirte Formen ν_{λ^4} 4ter Ordnung. Polarisirt man diese Formen nach μ, λ_1, λ_1', λ_1'', so stellen dieselben, gleich Null gesetzt, die Beziehungen zwischen 4 Parametern μ, λ_1, λ_1', λ_1'' dar, welche den auf einer Geraden liegenden Punkten der R_4 zugehören.

Ferner betrachtet der Herr Verfasser die Gordan'sche Grundform:

$$F(\lambda, \lambda_1, \mu) = |f_i(\lambda), f_i(\lambda_1), f_i(\mu)|.$$

Diese hat die Factoren $(\lambda-\mu)$ und $(\lambda_1-\mu)$. Wird der letztere herausgehoben und x_i statt $f_i(\lambda)$ eingesetzt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{\lambda_1-\mu}F(x_i, \lambda_1, \mu) = Q_{\lambda_1^3}(\overset{1}{x_i}, \overset{3}{\mu}) = Q_{\lambda_1^3},$$

wobei die rechte Seite eine Form dritter Ordnung in λ_1 ist.

$Q_{\lambda_1^3} = 0$ liefert durch ihre Wurzeln λ_1, λ_1', λ_1'' grade die drei Punkte von R_4, welche durch die Verbindungsgerade des Punktes μ von R_4 mit dem beliebigen Punkte x_i der Ebene ausgeschnitten wird. Hieraus folgt, dass die dritte Ueberschiebung von $Q_{\lambda_1^3}$ und $\nu_{\lambda_1^3\omega}$ für $\omega = \mu$ verschwindet. Oder:

$$(Q_{\lambda_1^3}, \nu_{\lambda_1^3\omega})^3 = (\omega-\mu)R(\overset{1}{x_i}, \overset{2}{\mu});$$

in $R(x_i^1, \lambda^2) = 0$ sind dann die beiden zu R_4 perspectiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung gegeben. Es ist:

$$R(\overset{1}{f_i}(\lambda); \overset{2}{\mu}, \overset{1}{\nu}) \equiv (\lambda-\mu)R'(\lambda^3; \overset{1}{\mu}, \overset{1}{\nu}).$$

Es wird nun die Form R explicite dargestellt und für R' folgender Ausdruck gefunden:

$$\tau R'(\overset{1}{\lambda^2}, \overset{1}{\mu}, \overset{1}{\nu}) = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \mu\nu \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \mu \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \nu \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 1 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Hierbei sind $\alpha_0, \ldots, \alpha_4$ sowie $\beta_0, \ldots, \beta_4$ die Coefficienten der beiden zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Formen.

Der Herr Verfasser zeigt ferner, dass diese Bestimmung von $R(\overset{1}{x_i}, \overset{3}{\lambda})$ nicht mehr gültig ist für singuläre R_4, welche einen dreifachen Punkt haben oder zerfallen und welche charakterisirt sind durch die Bedingungsgleichung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung, wie hervorgehoben wird, sagt aus, dass die zu den $f_i(\lambda)$ conjugirten Formen die ersten Polaren einer Form fünfter Ordnung sind. Die Strahlenbüschel zweiter Ordnung reduciren sich dann auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung.

Es wird ferner gezeigt, dass es eine selbständige ausnahmslos gültige Darstellung der erzeugenden Curven dritter Klasse giebt.

Im Anhange wird eine systematische Untersuchung der uneigentlichen R_4 gegeben. W. St.

G. Kerschensteiner. Ueber die Kriterien für die Singularitäten rationaler Curven vierter Ordnung. Nürnberg. Ballhorn. 65 S. mit 4 Taf.

E. Reusch. Normale und Krümmungshalbmesser des Cassinischen Ovals. Böklen Mitt. II. 136-139.

Eine sehr einfache Construction der Tangente und Normale in einem beliebigen Punkte der Curve wird auf elementare Art, aber unter Hinzuziehung unendlich kleiner Grössen, hergeleitet. In ähnlicher Weise wird der Krümmungsradius berechnet und der gefundene Ausdruck construirt. F.

Sur les coniques inscrites aux quartiques bicirculaires. Journ. de Math. spéc. (3) II. 180-182, 220-222.

Die Untersuchung des nicht genannten Verfassers beschränkt sich auf die Kegelschnitte, welche der Curve Q:

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2 = k(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2),$$

oder in abgekürzter Bezeichnung $C^2 = kE$ einbeschrieben sind. Ist $S=0$ die Gleichung eines solchen Kegelschnitts, so berührt S die Curve Q viermal, wenn man die Gleichung von Q auf die Form $G^2 = S\sigma$ bringen kann, wo $G=0$ und $\sigma=0$ die Gleichungen zweier anderen Kegelschnitte sind. Das wird nun in verschiedenen Formen durchgeführt. Lp.

E. Catalan. Extrait d'une lettre. Journ. de Math. spéc. (3) II. 116-119.

Bemerkungen über die Kardioide und die Trisectrix von Maclaurin. Lp.

G. de Longchamps. Sur une trisectrice remarquable. Mathesis VIII. 5-10.

Untersuchung der Curve, welche aus der dreispitzigen Hypocykloide durch die Methode der reciproken Polaren hervorgeht. Sie hat die Polargleichung $\varrho\cos 3\omega + R = 0$; ihr Flächeninhalt wird mit Hülfe der elementaren Functionen, ihre Länge durch die elliptischen erhalten. Mn. (Lp.)

R. H. Graves. A method of finding the evolute of the four-cusped hypocycloid. Annals of Math. IV. 36.

Eine sehr einfache Herleitung des bekannten Resultats die Evolute dieser Hypocykloide, welche von einer mit ihre punkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels sich be den Strecke umhüllt wird, eine ebensolche Curve ist und diejenige, deren rechter Winkel aus jenem durch Drehu 45° hervorgeht, und deren Strecke doppelt so gross ist wie
T

V. Jamet. Sur le genre des courbes planes triangul
S. M. F. Bull. XVI. 132-135.

Diese Curven sind in homogenen Coordinaten definirt die Gleichung:

$$X^h + Y^h + Z^h = 0,$$

die durch die Substitution

$$\frac{X}{Z} = \frac{r}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$
$$\frac{Y}{Z} = \frac{r}{a}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$$

in die Form übergeht:

$$r^{-h} = -\frac{a^{-h}}{2}\cos(-h\vartheta),$$

oder für $-\frac{a^{-h}}{2} = 1$, $h = -k$, in $r^k = \cos(k\vartheta)$. Es wird gezeigt, dass jeder solchen Curve Punkt für Punkt eine an Curve der gleichen Gattung ohne vielfache Punkte entspr deren Exponent h gleich ist dem Zähler des Exponenten gegebenen Curve. Bm.

E. Cesaro. Sur la potentielle triangulaire. Nouv.
(3) VII. 257-268.

Der Herr Verfasser betrachtet ein Dreieck $A_1A_2A_3$ und finirt die barycentrischen Coordinaten μ_1, μ_2, μ_3 eines Punkte in der Ebene als die Verhältnisse der Dreiecke resp. PA_2 PA_3A_1, PA_1A_2 zum Dreieck $A_1A_2A_3$. Sind μ_1, μ_2, μ_3 von ein Parameter u abhängig, so durchläuft P eine gewisse Cur Diese Curve wird „potentielle triangulaire“ genannt, wenn

barycentrischen Coordinaten den n^{ten} Potenzen der entsprechenden Seiten proportional sind. Von einer solchen Curve werden mehrere Sätze bewiesen. Mz.

V. Jamet. Sur deux systèmes de courbes orthogonales. C. R. CVI. 830-833.

Es werden die orthogonalen Trajectorien der ebenen Curven gesucht, deren Gleichung ist

$$\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r'}=\frac{2}{a},$$

wo r, r' die Entfernungen des laufenden Punkts von zwei festen Punkten, α, β, a Constanten sind. Für $\alpha=-\beta=1$ wird gefunden:

$$2rr'=b(r+r')[4c^2-(r-r')^2],$$

durch Vorzeichenwechsel von r oder r' hieraus das Resultat für den Fall $\alpha=\beta=1$, wo c die halbe Entfernung der festen Punkte bezeichnet. Die Parameter der zwei orthogonalen Scharen sind a und b. Für die Behandlung des allgemeinen Problems wird am Schlusse ein Wink gegeben. H.

Himstedt. Ueber diejenigen Curven, welche der Polargleichung $r=a\sin\lambda\theta$ entsprechen. Pr. Progymn. Löbau (Westpr.) 10 S. 4°.

Untersuchungen über Gestalt, Ordnung, Doppelpunkte, Quadratur und Rectification solcher Curven, für welche λ rational ist. R. M.

A. Michalitschke. Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale. Prag. Selbstverlag. 79 S. 8° u. 1 Taf.

Nach dem Vorworte ist dieses Buch für Anfänger in der Differential- und Integralrechnung bestimmt. Die im Titel genannten Spiralen werden der Reihe nach in sehr fasslicher und eingehender Weise besprochen. Bei jeder findet man besonders

behandelt: Gleichung und Discussion, Construction, Differentialgleichungen, Berührungsgrössen, Krümmung, Rectification und Quadratur. Bei der logarithmischen Spirale ist ausserdem die Evolute und Evolvente in Betracht gezogen; ferner noch mehrere Curven, die an der logarithmischen Spirale auf verschiedene Art erzeugt werden, so die Fusspunktencurve, die Brennlinie, u. a. m. Der Anfänger kann jedenfalls recht viel Nützliches aus der kleinen Schrift entnehmen; auch tragen gut entworfene Figuren zum Verständnis bei. **Mz.**

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

J. Knoblauch. Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Leipzig. Teubner. VIII u. 267 S. gr. 8°.

Entsprechend den Gesichtspunkten, welche den Herrn Verfasser in seinen flächentheoretischen Untersuchungen (siehe die folgenden Referate) geleitet haben, ist es sein Hauptbestreben, in diesem Lehrbuche den Zusammenhang der Flächentheorie mit der Theorie der binären Differentialformen darzulegen und zu verwerten. Hinsichtlich der Formeln, welche von den partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung abhängen, hat er möglichste Vollständigkeit angestrebt, um sie für specielle Untersuchungen fertig und brauchbar zu machen.

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung sind ebenso wie bei Gauss gewählt, diejenigen zweiter Ordnung sind dagegen dieselben, welche Herr Hoppe in seinen Principien der Flächentheorie eingehend verwendet hat.

Dem Herrn Verfasser eigentümlich ist die Einführung der

Fundamentalgrössen dritter Ordnung P, Q, R, S, welche er gewinnt durch Aufsuchung der Richtungen, in welchen die Normalschnitte mit ihrem Krümmungskreise eine vierpunktige Berührung haben. Diese Richtungen sind bestimmt durch eine Differentialgleichung von der Form

$$H = Pdu^3 + 3Q du^2 dv + 3R du dv^2 + S dv^3 = 0.$$

Der Inhalt ist in folgende fünf Abschnitte gebracht: 1) Untersuchung einer Fläche in der Nähe eines gegebenen Punktes. 2) Besondere Curven und Coordinatensysteme auf einer Fläche. 3) Transformation binärer Differentialformen. 4) Specielle Flächen, welche mit einer gegebenen zusammenhängen. 5) Allgemeine Theorie der Curven auf gegebener Fläche.

Auffallend war dem Referenten, dass der Ausdruck für das Flächenelement keine Stelle gefunden hat, wenigstens sicher nicht in den ersten Paragraphen, und dass demgemäss auch solche Probleme, bei denen es auf diesen Ausdruck ankommt, keine Erwähnung gefunden haben, wie z. B. das Problem der äquivalenten Abbildung.

Im ganzen ist das Buch als eine wertvolle Bereicherung der Literatur über die Flächentheorie zu begrüssen. Die Darstellung verbindet begriffliche Strenge mit einer klaren und ansprechenden Sprache. A.

J. Knoblauch. Ueber Fundamentalgrössen in der Flächentheorie. J. für Math. CIII. 25-39.

Nachdem der Herr Verfasser die Gauss'schen Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung betrachtet und auf gewisse Nachteile in der Form der letzteren hingewiesen hat, weshalb dieselben besser ersetzt werden durch die in Herrn Hoppe's Principien der Flächentheorie angewandten, welche zuerst von Herrn Brioschi (Annali di Matem. (2) I. 1. 1867) benutzt zu sein scheinen, bespricht er den Zusammenhang der Untersuchungen der Flächentheorie mit der simultanen Transformation der dabei auftretenden quadratischen Differentialausdrücke, ein Zusammenhang, auf den namentlich Hr. Weingarten hingewiesen hat.

Es fragt sich nun, in welcher Weise man die Flächentheorie erweitern könnte, indem man die Untersuchung auf solche Eigenschaften der Flächen ausdehnt, in welchen höhere als die zweiten partiellen Ableitungen der Parameter auftreten, also zunächst solche dritter Ordnung. Es wird sich also darum handeln, gewisse Grössen als Fundamentalgrössen dritter Ordnung einzuführen. Nach einer Kritik der verschiedenen Auffassungen, welche hierbei massgebend sein könnten, entscheidet sich der Herr Verfasser für vier Fundamentalgrössen dritter Ordnung, welche in gewissen kubischen Differentialformen auftreten, zu denen man durch die Betrachtung derjenigen Normalschnitte geführt wird, welche von ihren Krümmungskreisen vierpunktig berührt (superosculirt) werden. Diese Normalschnitte sind zuerst von de la Gournerie (Liouville J. XX. 1855. 145) untersucht worden, doch beziehen sich seine Entwickelungen nur auf die specielle Form, dass z als Function von x und y aufgefasst wird. Der Herr Verfasser betrachtet die Sache vom allgemeineren Standpunkte der Flächentheorie und kommt zur Aufstellung der kubischen Differentialform

$$ds^2 . d\frac{1}{\varrho} = P du^3 + 3Q du^2 dv + 3R du dv^2 + S dv^3 = H,$$

deren vier Coefficienten P, Q, R, S als Fundamentalgrössen dritter Ordnung eingeführt und entwickelt werden. Das Verschwinden von H bestimmt die drei Richtungen der betreffenden Normalschnitte.

Es schliessen sich hieran noch einige weitere Untersuchungen, namentlich die nach der Bedeutung der quadratischen Covariante von H für die Flächentheorie. A.

J. Knoblauch. Ueber die Bedingung der Isometrie der Krümmungscurven. J. für Math. CIII. 40-43.

Herr Weingarten hat die Bedingung dafür, dass eine Fläche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann, in der Form einer Integrabilitätsbedingung dargestellt. Auch die Bedeutung der betreffenden linearen Differen-

tialform ist von Herrn Weingarten untersucht; doch kommen hierbei Grössen vor, welche von dem gewählten Axensystem abhängen. Der Herr Verfasser hat diese der Sache fremde Complication beseitigt. Er benutzt bei seiner Entwickelung die von ihm eingeführten Fundamentalgrössen dritter Ordnung. Es ergiebt sich aus seinen Betrachtungen auch das Resultat, dass ausser den Rotationsflächen die Flächen constanter mittlerer Krümmung die einzigen Weingarten'schen Flächen sind, für welche die Krümmungslinien isometrisch sind. A.

G. Pirondini. Sulle curve osculatrici. Batt. G. XXVI. 257-302, 380.

Die Gleichungen einer Raumcurve können in der Form

$$\varrho = \varrho(s),\ r = r(s)$$

geschrieben werden, wobei ϱ den Krümmungsradius, r den Torsionsradius, s den Bogen bedeutet. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die Bedingungen eines Contactes n^{ter} Ordnung zwischen zwei Raumcurven (L und L_1) in besonders einfacher Weise ausdrücken. Der Verfasser benutzt dieses Resultat, um in zahlreichen Fällen das Maximum der Ordnungszahl für den Contact zwischen einer bestimmten (L) und einer beliebigen Raumcurve (L_1) festzustellen. So werden z. B. betrachtet: Schraubenlinien, Geodätische der Kegelfläche und Curven mit constanter Krümmung oder Torsion. Es werden darauf die Bedingungen untersucht, unter welchen eine Curve von vorgegebener Art eine beliebige Raumcurve osculiren kann. Diese Untersuchung erstreckt sich auf die geodätischen Curven der Fläche eines Rotationskegels, auf Schraubenlinien, sphärische und, durch Specialisirung, ebene Curven. Von den letzteren werden besonders die Kegelschnitte betrachtet, wobei schliesslich als specielles Beispiel einer Curve L_1 die logarithmische Spirale gewählt und eine Anzahl von Sätzen über den Contact derselben mit einem Kegelschnitt abgeleitet wird. Auch sonst ergeben sich mit verhältnismässig einfachen Mitteln zahlreiche Sätze über Osculationscurven. Ein

späterer Zusatz beschäftigt sich mit der Vereinfachung und Richtigstellung einiger Formeln. Schg.

Lelieuvre. Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique. Darboux Bull. (2) XII. 126-128.

Es wird der Satz hergeleitet: Die Coordinaten eines Punktes einer Fläche ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 bezüglich auf die asymptotischen Linien, deren Parameter ϱ, ϱ_1 sind, befriedigen die drei Gleichungen:

$$d\vartheta_1 = \left(\nu_2 \frac{\partial \nu_3}{\partial \varrho} - \nu_3 \frac{\partial \nu_2}{\partial \varrho}\right) d\varrho - \left(\nu_2 \frac{\partial \nu_3}{\partial \varrho_1} - \nu_3 \frac{\partial \nu_2}{\partial \varrho_1}\right) d\varrho_1$$

(die andern durch cyklische Vertauschung der Indices von ϑ, ν zu bilden), wo ν_1, ν_2, ν_3 drei Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \varrho \partial \varrho_1} = K\nu$$

und K eine Function von ϱ und ϱ_1 ist; und umgekehrt. Dies Resultat gilt auch, wenn die ϑ tangentielle Coordinaten sind. In Anwendung davon auf die sphärische Darstellung (Centralprojection) der asymptotischen Linien wird als notwendige und hinreichende Bedingung einer solchen die Gleichung gefunden:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{A\dfrac{\partial C}{\partial \varrho} - B\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_1}}{B^2 - AC}\right) = \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{C\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_1} - B\dfrac{\partial C}{\partial \varrho}}{B^2 - AC}\right),$$

wo A, B, C die Coefficienten im Ausdruck des sphärischen Linienelements

$$d\sigma^2 = A d\varrho^2 - 2B d\varrho d\varrho_1 + C d\varrho_1^2$$

bezeichnen. Auf kleinster Fläche bilden die Linien ϱ, ϱ_1 ein isothermes System, desgleichen ihre sphärische Abbildung, eine Eigenschaft, die den kleinsten Flächen ausschliesslich zukommt. Sucht man die Flächen, deren asymptotische Linien sich auf der Kugel als grösste Kreise abbilden, so findet man Regelflächen. H.

L. Bianchi. Sulle forme differenziali quadratiche indefinite. Rom. Acc. L. Rend. IV_2. 278. Rom. Acc. L. Mem. (4) V. 539-603.

Der Inhalt der vorliegenden Abhandlung bildet die Uebertragung der in früheren Arbeiten (Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten, Annali di Mat. (2) XIII. 177-232, F. d. M. XVII. 1885. 729-733; Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante, Rom. Acc. L. Mem. (4) IV. 221-256, F. d. M. XIX. 1887. 767) erhaltenen Resultate auf diejenigen Räume von constantem Krümmungsmasse, deren Linienelement durch eine indefinite quadratische Differentialform dargestellt wird.

In § I werden die zwei folgenden Probleme gelöst, welche eine spätere Anwendung finden:

1. Die Functionen $F(z, t)$, $\Phi(z, t)$ derart zu bestimmen, dass die Integrirbarkeitsbedingung des Systems:

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} = F(z, t), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial x} = \Phi(z, t)$$

in Bezug auf t, bezw. z die Form:

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi(z),$$

bezw.

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \psi(t)$$

erhalte.

2. Die Functionen $F(z, t)$, $\Phi(z, t)$ derart zu bestimmen, dass die Integrirbarkeitsbedingung des Systems:

$$\frac{\partial (z+t)}{\partial x} = F(z, t), \qquad \frac{\partial (z-t)}{\partial y} = \Phi(z, t)$$

in Bezug auf t, bezw. z die Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi(z), \text{ bezw. } \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \psi(t)$$

erhalte.

Ist z. B. das erste Problem gelöst, und kennt man eine Lösung z der Gleichung (2), so kann man durch Integration des Systems (1) eine Lösung t der Gleichung (3) ermitteln, welche eine willkürliche Constante enthält; und dasselbe gilt für das zweite Problem. Bezeichnen insbesondere φ und ψ eine und dieselbe Function, so ergeben sich dadurch aus einer Lösung von (2) unendlich viele Lösungen derselben Gleichung.

In §§ II-VIII wird ein Raum von verschwindendem Krümmungsmasse zu Grunde gelegt. Als Linienelement eines solchen Raumes kann man die Form $dx^2+dy^2-dz^2$ annehmen; und man sagt, eine Ebene des Raumes sei von der ersten oder von der zweiten „Art", je nachdem sie von dem im Unendlichen liegenden Kegelschnitte des Kegels:

$$x^2+y^2-z^2=0$$

in imaginären oder in reellen Punkten geschnitten wird. Eine Fläche, oder ein Teil einer Fläche, heisst von der ersten (zweiten) Art, wenn alle Tangentenebenen von der ersten (zweiten) Art sind.

Wird das Linienelement auf die Form $a\,du^2+b\,dv^2+c\,dw^2$ gebracht, so muss eine von den Grössen a, b, c negativ, die zwei übrigen positiv sein. Setzt man:

$$a=H_1^2,\quad b=H_2^2,\quad c=-H_3^2,$$

also:

$$(\alpha)\qquad ds^2=H_1^2\,du^2+H_2^2\,dv^2-H_3^2\,dw^2,$$

so genügen H_1, H_2, H_3 den folgenden Gleichungen, welche sich offenbar aus den bekannten Lamé'schen Formeln durch Ersetzung von H_3 durch iH_3 ergeben:

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial v\,\partial w}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial w}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial w\,\partial u}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial u}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial w},$$

$$\frac{\partial^2 H_3}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial v}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)-\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u}=0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right)+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v}=0.$$

Setzt man zweitens:

$$a=H_1^2,\qquad b=-H_2^2,\qquad c=H_3^2,$$

also:

$$(\beta)\qquad ds^2=H_1^2\,du^2-H_2^2\,dv^2+H_3^2\,dw^2,$$

so kommen statt der drei letzten Gleichungen die folgenden vor:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w}=0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right)-\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v}=0.$$

Wenn die Flächen w = const. eines orthogonalen Tripels Parallelflächen sind, so nimmt das Linienelement des auf dieses Tripel bezogenen Raumes die Form (α) oder (β) an, je nachdem die Flächen w = const. von der ersten oder von der zweiten Art sind; und H_3 ist constant.

Es folgen dann einige Untersuchungen über Krümmungslinien, asymptotische Linien, Evoluten u. s. w. im betrachteten Raume.

§ III ist der Theorie der Minimalflächen gewidmet; ihre Gleichung ist:

$$(1-q^2)r+2pqs+(1-p^2)t=0.$$

In § IV wird das Plateau'sche Problem für Flächen von der ersten Art behandelt; und es ergiebt sich, dass dieses Problem auf die conforme Abbildung eines gegebenen ebenen Gebietes auf ein gegebenes pseudosphärisches Gebiet hinauskommt. In dem wichtigen Falle, mit welchem Herr Schwarz sich in seiner Arbeit: „Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen“ (Berl. Ber. 1872) beschäftigt hat, bietet sich die Frage dar, wann eine Minimalfläche in ein Polygonnetz eingeteilt werden kann. Das geschieht, wie der Verfasser im Vorworte angiebt, nur dann, wenn die Abbildung der Begrenzung auf die als Vorstellungsfläche der Werte der complexen Veränderlichen betrachtete Pseudosphäre die Hälfte des erzeugenden Polygons einer Fuchs'sche Gruppe ist; und die Flächen, welche eine solche Einteilung zulassen, können als „Fuchs'sche Flächen“ passend bezeichnet werden (siehe des Verfassers: Sulle superficie Fuchsiane, Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_2. 161-165, Bericht in diesem Bande S. 416). Es folgen einige Beispiele.

Als Krümmung einer Fläche wird (§ V) die Grösse: $K = \mp \frac{1}{r_1 r_2}$ angenommen, wobei das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem die Fläche von der ersten oder von der zweiten Art ist. Bezeichnen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ die Krümmungslinien, so finden für Flächen von constanter Krümmung folgende Formeln statt:

a) Flächen von der ersten Art, $K = 1$:
Linienelement:

$$ds^2 = \cos^2\theta du^2 + \sin^2\theta dv^2;$$

Hauptkrümmungsradien:

$$r_1 = -\operatorname{tg}\theta, \quad r_2 = \operatorname{cotg}\theta;$$

Gleichung der Fläche:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \sin\theta\cos\theta = 0. \tag{4}$$

b) Flächen von der zweiten Art, $K = 1$:

$$ds^2 = \operatorname{csh}^2\theta du^2 - \operatorname{sh}^2\theta dv^2,$$

$$r_1 = \operatorname{th}\theta, \quad r_2 = \operatorname{cth}\theta,$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{sh}\theta\operatorname{csh}\theta = 0. \tag{5}$$

c) Flächen von der ersten Art, $K = -1$:

$$ds^2 = \operatorname{csh}^2\theta du^2 + \operatorname{sh}^2\theta dv^2,$$

$$r_1 = \operatorname{th}\theta, \quad r_2 = \operatorname{cth}\theta,$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} - \operatorname{sh}\theta\operatorname{csh}\theta = 0. \tag{6}$$

d) Flächen von der zweiten Art, $K = -1$:

$$ds^2 = \cos^2\theta du^2 - \sin^2\theta dv^2,$$

$$r_1 = -\operatorname{tg}\theta, \quad r_2 = \operatorname{cotg}\theta,$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} - \sin\theta\cos\theta = 0. \tag{7}$$

Setzt man $x = \frac{v-u}{2\sqrt{2}}$, $y = \frac{v+u}{2\sqrt{2}}$, so nehmen (4) und (5) die Form:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x \partial y} = \sin 2\theta, \text{ bezw. } \frac{\partial^2\theta}{\partial x \partial y} = \operatorname{sh} 2\theta \tag{8}$$

an. Durch Anwendung des zweiten Problems in § I auf (8) erhält man aus der ursprünglichen Fläche Σ unendlich viele Flächen Σ', und der Uebergang von Σ zu Σ' bildet eine Bäcklund'sche Transformation (siehe darüber die anfangs angeführten Arbeiten des Verfassers), welche sich aber nie auf eine complementare Transformation reducirt. Man kann dagegen das erste Problem in § I auf (6), (7) unmittelbar anwenden; und die Bäcklund'sche Transformation, welche dadurch bewerkstelligt wird, kann möglicherweise in eine complementare Transformation übergehen.

Die Paragraphen VI bis VIII beschäftigen sich mit der Bestimmung der Weingarten'schen Tripel, und derjenigen Tripel, welche je ein System von Flächen mit constanter, aber von Fläche zu Fläche veränderlicher Krümmung enthalten (vergl. über diese § VI der oben citirten Abhandlung in Rom. Acc. L. Mem. sowie: Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di superficie pseudosferiche, Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 19-22, F. d. M. XVIII. 1886. 726-727). Es mögen hier die Formeln für den letzten Fall mitgeteilt werden; sie sind verschieden je nach der Beschaffenheit der Flächen Σ von constanter Krümmung, welche ein System des orthogonalen Tripels bilden.

a) Die Flächen Σ sind von der ersten Art, und ihre Krümmung ist positiv, $K=\frac{1}{R^2}$.

Linienelement des Raumes:

$$ds^2=\cos^2\theta\,du^2+\sin^2\theta\,dv^2-R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2dw^2.$$

Formeln zur Bestimmung der Functionen $\theta(u,v,w)$, $R(w)$:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{R^2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\sin\theta}{R}\right)-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cos\theta}{R}\right)+\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v\partial w}+\operatorname{tg}\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}-\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}=0.$$

b) Die Flächen Σ sind von der zweiten Art, und ihre Krümmung ist positiv, $K = \frac{1}{R^2}$.

Linienelement:

$$ds^2 = \operatorname{csh}^2\theta\, du^2 - \operatorname{sh}^2\theta\, dv^2 + R^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 dw^2.$$

Formeln zur Bestimmung von θ, R:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \frac{\operatorname{sh}\theta \operatorname{csh}\theta}{R^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{csh}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{sh}\theta}{R}\right) - \frac{1}{\operatorname{sh}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{csh}\theta}{R}\right) - \frac{1}{\operatorname{csh}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\frac{\partial \theta}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 \theta}{\partial u \partial v \partial w} - \operatorname{th}\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\frac{\partial \theta}{\partial v} - \operatorname{cth}\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\frac{\partial \theta}{\partial u} = 0.$$

c) Die Flächen Σ sind von der ersten Art, und ihre Krümmung ist negativ, $K = -\frac{1}{R^2}$.

Linienelement:

$$ds^2 = \operatorname{csh}^2\theta\, du^2 + \operatorname{sh}^2\theta\, dv^2 - R^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 dw^2.$$

Formeln zur Bestimmung von θ, R:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\operatorname{sh}\theta \operatorname{csh}\theta}{R^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{csh}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{sh}\theta}{R}\right) + \frac{1}{\operatorname{sh}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{csh}\theta}{R}\right) + \frac{1}{\operatorname{csh}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\frac{\partial \theta}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 \theta}{\partial u \partial v \partial w} - \operatorname{th}\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}\frac{\partial \theta}{\partial v} - \operatorname{cth}\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\frac{\partial \theta}{\partial u} = 0.$$

d) Die Flächen Σ sind von der zweiten Art, und ihre Krümmung ist negativ, $K = -\frac{1}{R^2}$.

Linienelement:

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 - \sin^2\theta\, dv^2 + R^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 dw^2.$$

Formeln zur Bestimmung von θ, R:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{R^2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\sin\theta}{R}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cos\theta}{R}\right)-\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial u\partial v\partial w}+\operatorname{tg}\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}-\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}=0.$$

Diese Formeln vereinfachen sich beträchtlich, wenn R, wie in §§ VI, VII, constant ist. Dann können z. B. die Formeln zur Bestimmung von θ, R für den Fall a) auf die folgende Form gebracht werden, wo $F(w)$ eine willkürliche Function von w bedeutet:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{R^2}=0,$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=F(w).$$

Endlich werden in § IX die obigen Untersuchungen auf den Fall eines Raumes von constantem Krümmungsmasse K ausgedehnt, dessen Linienelement unter der Form:

$$\varphi=\frac{dx^2+dy^2-dz^2}{\left(x^2+y^2+z^2+\frac{K}{4}\right)^2}$$

angenommen werden kann. Der letzte Paragraph (§ X) enthält eine Zusammenfassung der wichtigsten Formeln und einige darauf bezügliche Bemerkungen. Vi.

J. Weingarten. Ueber eine Eigenschaft der Flächen, bei denen der eine Hauptkrümmungsradius eine Function des andern ist. J. für Math. CIII. 184.

Eine kurze Note, in welcher ein neuer Beweis für die Bemerkung des Herrn Lie mitgeteilt wird, wonach für die in der Ueberschrift bezeichneten Flächen die Krümmungslinien durch Quadraturen ermittelt werden können. A.

G. Darboux. Sur la représentation sphérique des faces. Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. 79-96.

In zwei Noten, welche der Herr Verfasser in den Ja 1868 und 1869 in den C. R. LXVII und LXVIII (F. d. M 550) veröffentlicht hat, ist nachgewiesen, wie man alle diejen Flächen finden kann, deren Krümmungslinien auf die Gauss'i Kugel sich als confocale sphärische Kegelschnitte abbilden.

In der vorliegenden Abhandlung wird die Aufgabe d erweitert, dass statt des Systems jener confocalen Kegelsch irgend ein Orthogonalsystem auftritt, welches aus jenem d die allgemeinste Inversion entsteht.

An den Beweis dieses Satzes knüpfen sich zahlreiche merkungen analytischen und geometrischen Charakters. A

— — — —

G. Pirondini. Teorema relativo alle linee di curvatu delle superficie e sue applicazioni. Annali di Mat. XVI. 61-84.

Die Arbeit hat folgendes Problem zum Gegenstande: Es auf der Gauss'schen Kugel S ein Orthogonalsystem gegebe Man soll diejenigen Flächen S_1 bestimmen, welche jenes Orthog nalsystem zur sphärischen Darstellung der Krümmungslinien habe

Man wählt auf der Kugel die Curven jenes Orthogona systems zu Parameterlinien und setzt das Quadrat des Linien elementes $ds^2 = E du^2 + G dv^2$; man bezeichnet ferner die Rich tungswinkel der Normale, der Linien $v =$ const. und $u =$ cons durch $a\, b\, c$, $a'\, b'\, c'$, $a''\, b''\, c''$. Bestimmt man dann eine Functio H durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} = \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \ln \sqrt{E} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \ln \sqrt{G},$$

und sind endlich x, y, z die Coordinaten des Kugelpunktes, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des entsprechenden Punktes der gesuchten Fläche, so gilt die Gleichung

$$x_1 = x + H \cos a - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial H}{\partial u} \cos a' - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial H}{\partial v} \cos a''$$

und die analogen.

Zunächst wird diese Betrachtung auf ein Beispiel angewandt. Alsdann zeigt der Herr Verfasser, dass sich eine Klasse von Integralen dieser Differentialgleichung sehr leicht folgendermassen finden lässt:

Die von Joachimsthal aufgestellte, notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die auf einer Fläche befindlichen orthogonalen Parameterlinien Krümmungslinien seien, lautet:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ergiebt sich aber

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}.$$

Berechnet man aus diesen drei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

so kommt

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \ln \sqrt{E} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \ln \sqrt{G}$$

und die analogen, d. h. jede der drei Coordinaten erfüllt die oben für H entwickelte Differentialgleichung. Da nun auf der Kugel jede Linie Krümmungslinie ist, so braucht man nur irgend ein System orthogonaler Linien als Parameterlinien zu nehmen und die Coordinaten x, y, z eines Kugelpunktes durch die entsprechenden Parameterlinien auszudrücken, dann erhält man ein Integral der Differentialgleichung für H von der Form

$$H = Ax + By + Cz,$$

wo A, B, C Constanten bedeuten. Alsdann sind

$$x_1 = x + (Ax + By + Cz) \cos a$$
$$- \frac{1}{\sqrt{E}} \left(A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial u} + C \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cos a'$$
$$- \frac{1}{\sqrt{G}} \left(A \frac{\partial x}{\partial v} + B \frac{\partial y}{\partial v} + C \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cos a''$$

und die analogen Ausdrücke für y_1, z_1 die Coordinaten des entsprechenden Punktes einer Fläche, welche die Linien v = const., u = const. zu Krümmungslinien haben, deren Abbildungen auf der Gauss'schen Kugel das gegebene Orthogonalsystem bilden.

Von dieser Methode werden nun mehrere interessante Anwendungen durchgeführt, und es wird auch gezeigt, wie sich bei beliebigen nicht orthogonalen Parametern solche Flächen finden lassen, deren Krümmungslinien zu sphärischen Bildern die Parameterlinien v = const. und ihre rechtwinkligen Trajectorien haben. Den Schluss bildet die Betrachtung gewisser Minimalflächen, auf welche man durch Anwendung der Methode geführt wird.

A.

A. Cayley. On the surfaces with plane or spherical curves of curvature. American J. XI. 71-98.

Der Herr Verfasser beabsichtigt, die Resultate der Arbeiten der Herren Bonnet und Serret über Flächen mit ebenen und mit sphärischen Krümmungslinien, mit einigen Zusätzen versehen, in kurzer Form zu entwickeln. Es liegt nur der erste Teil der Abhandlung vor, die Fortsetzung soll später folgen. A.

E. Scholz. Ueber die Differentialgleichung der Krümmungslinien bei einigen krummen Oberflächen. Pr. Gymn. Burg. 20 S. 4°.

Um Flächen zu finden, deren Krümmungslinien sich in endlicher Form darstellen lassen, unterwirft der Herr Verfasser die Differentialgleichung der Krümmungslinien einfachen Umformungen durch Einführung neuer Variablen, z. B. $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; auch wählt er für die Differentialgleichung der Projection der Krümmungslinien auf die xy-Ebene gegebene integrirbare Formen und stellt dann die partielle Differentialgleichung der zugehörigen Fläche selbst auf, giebt auch in einigen Fällen particuläre Integrale der betreffenden Partialgleichungen an. Doch

scheint der Verfasser nicht über bereits bekannte Fälle hinausgekommen zu sein. A.

A. Petot. Sur les surfaces qui ont pour lignes de courbure d'un système des hélices tracées sur des cylindres quelconques. C. R. CVI. 1517-1520.

Wird eine Fläche charakterisirt durch eine Eigenschaft ihrer Krümmungslinien, so ist derjenige Fall besonders zu behandeln, in welchem der analytische Ausdruck dieser Eigenschaft nur die Rotationen p, q, r, p_1, q_1, r_1 des Trieders, gebildet aus der Normale und den Hauptkrümmungsrichtungstangenten, enthält. Man braucht nämlich alsdann nur auf der Kugel Orthogonalsysteme zu suchen, welche die betreffende Eigenschaft haben, und darauf die Flächen zu ermitteln, welche für ihre Krümmungslinien diese sphärische Darstellung zulassen. Ein Beispiel dazu bieten die bereits vor längerer Zeit von Bonnet u. a. untersuchten Flächen mit einem System ebener Krümmungslinien.

Ebenso ist es in dem folgenden Falle. Sind u und v Krümmungsparameter und R und T die Radien der Krümmung und Torsion der Linie v, so ist

$$\frac{R}{T} = \frac{r\frac{\partial q}{\partial u} - q\frac{\partial r}{\partial u}}{(r^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es hat also $\frac{R}{T}$ auf allen Flächen mit derselben sphärischen Darstellung denselben Wert.

Sind nun insbesondere die sämtlichen Krümmungslinien eines Systems Helices, d. h. Kürzeste auf Cylinderflächen, so gilt dasselbe von allen Flächen mit derselben sphärischen Darstellung. Die sphärische Indicatrix einer Helix ist aber ein kleiner Kugelkreis, dessen Ebene normal zu den Erzeugenden der Cylinderfläche steht.

Diese Betrachtungen führen den Herrn Verfasser zur Aufstellung derjenigen partiellen Differentialgleichung, von deren Integration die Aufsuchung der betrachteten Flächen abhängt.

Dieselbe ist zunächst von zweiter Ordnung, lässt sich ab
die Laplace'sche Gleichung zurückführen, sobald man eine
gleichung integrirt hat, und zwar dieselbe, auf welche die Aufsu
der rechtwinkligen Trajectorie der Helices führt. Hat ma
solche Fläche gefunden, so lassen sich daraus alle ges
Flächen ableiten. A

V. ROUQUET. Des surfaces dont toutes les ligne courbure sont planes. Deuxième partie. Toulouse (8) X. 161-192.

Ueber den ersten Teil der Arbeit, der in Toul. Mé
IX. 232-268 veröffentlicht ist, ist F. d. M. XIX. 1887. 76
gehend berichtet. In dem vorliegenden zweiten Teile w
sich die Untersuchung speciell zu den Minimalflächen, für w
der Herr Verfasser nach Herrn Ribaucour's Vorschlag den N
„Elassoide" annimmt, und zwar soll die von εἶδος abgel
Endung daran erinnern, dass die Flächen nicht notwendig
malflächen sind. Herr Bonnet hat gezeigt, dass, wenn in
solchen Fläche ein System der Krümmungslinien eben ist,
selbe mit dem andern Systeme der Fall ist, dass sie also
stets nach den im ersten Teile entwickelten Methoden beha
werden können. Das sphärische Bild der Krümmungslinien
also durch zwei orthogonale Kreisscharen gebildet. Die a
meine Gleichung der mit den Parametern u und v variire
Tangentenebene dieser Flächen kann in die Form geb
werden

$$x(\cosh u\cos k-\cos v)+y\sin k\sinh u+z\sin k\sin v$$
$$=a\,[(u\sinh u-\cosh u)+\cos k(v\sin v+\text{co}$$

wo

$$\cosh u=\tfrac{1}{2}(e^{u}+e^{-u}),\ \sinh u=\tfrac{1}{2}(e^{u}-e^{-u})$$

bedeutet.

Der Herr Verfasser untersucht nun diese Flächen noch e
genauer, betrachtet dann die Umdrehungsflächen, welche zu
selben gehören, ferner gewisse von Enneper untersuchte *Elasso*
welche vom neunten Grade und der sechsten Klasse sind,
welche sich auf gewisse einfach charakterisirte Umdrehu

flächen abbilden lassen. Alsdann wird die Gestalt der ebenen Krümmungslinien selbst einer eingehenderen Betrachtung unterworfen; diese Curven werden von Herrn Laisant als „Cykloiden von Kegelschnitten“ bezeichnet. Ihre geometrische Definition ist folgende: Man ziehe nach einem Punkte *P* eines Kegelschnittes den Radiusvector *OP* und fälle auf die Focalaxe A_1OA die Senkrechte *PQ*, verlängere *PQ* über *Q* hinaus bis *R*, so dass *PR* proportional dem Sector *AOP* ist; dann ist der Ort des Punktes *R* eine Cykloide des Kegelschnittes. Ist der Kegelschnitt ein Kreis, so erhält man die gewöhnlichen Cykloiden. Die Cykloiden werden je nach der Art des Kegelschnittes elliptische, hyperbolische und parabolische genannt; die letzteren sind algebraisch; und zwar Curven dritten Grades mit einem Doppelpunkte und einer unendlich entfernten Wendetangente.

Die Krümmungslinien der Enneper'schen Elassoide sind parabolische Cykloiden. Es werden dann noch für die Enneper'schen Flächen die asymptotischen Linien bestimmt, für welche sich gewisse Helices ergeben. Weitere Untersuchungen beziehen sich auf die Nulllinien, auf isotrope Linien und auf solche Flächen mit ebenen Krümmungslinien, zwischen deren Hauptkrümmungsradien eine lineare Relation besteht. Durch die Durchsichtigkeit der ganzen Untersuchung und die Einfachheit und Anschaulichkeit der Resultate ist die Arbeit in hohem Grade ausgezeichnet. A.

R. v. Lilienthal. Bemerkung über diejenigen Flächen, bei denen die Differenz der Hauptkrümmungen constant ist. Acta Math. XI. 391-394.

Entsprechend einem früher von Herrn Weingarten aufgestellten Satze spricht der Herr Verfasser folgendes Resultat aus:

Die dem Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1 entsprechenden Krümmungsmittelpunktsflächen sämtlicher Flächen, bei denen $\varrho_1-\varrho_2$ constant ist, sind auf die Rotationsfläche der Tractrix abwickelbar und besitzen somit constantes negatives Krümmungsmass. A.

R. v. LILIENTHAL. Ueber die Krümmung der Cu scharen. Math. Ann. XXXII. 545-565.

Eine Fläche kann angesehen werden als eine einfache s Mannigfaltigkeit von Curven. Das allgemeinste Krümm problem wird sich demnach auf zweifache Mannigfaltigk von Curven beziehen, welche man Curvenscharen nennen Die Kummer'sche Theorie der Strahlensysteme, Lamé's Th der krummlinigen Coordinaten und gewisse neuere Untersuchu von Herrn A. Voss (Math. Annalen XVI. und XVII.) fallen das gedachte Problem.

Die Betrachtungen des Herrn Verfassers haben zwei Gesi punkte zur Grundlage, die man als Analoga für die Krümm einer Curve und die einer Fläche auffassen kann.

An Stelle eines Curvenpunktes, oder wohl besser Cur elementes, tritt der Querschnitt eines Curvenbündels, an St der Tangente der Tangentenbündel, worauf man meist die griffe aus der Theorie der geradlinigen Strahlensysteme an den kann. An die Stelle der benachbarten Curventangente der benachbarte Tangentenbündel, worauf jedoch in der Ar nicht weiter eingegangen wird.

Die Theorie der Krümmung einer Fläche kann aufgefa werden als Theorie der Krümmungsaxen der auf einer Flä durch einen Punkt gehenden Curven oder, anders gesagt, orthogonalen Trajectorien eines Normalensystems. Dieser griff findet sein Analogon in den orthogonalen Trajectorien e Curvenschar.

In seinen analytischen Entwickelungen bezieht sich der H Verfasser auf seine „Untersuchungen zur allgemeinen Theo der krummen Oberflächen" etc., Bonn 1886 (F. d. M. XVII 736). Die rechnungsmässige Grundlage ist die folgende. Si die rechtwinkligen Coordinaten u, v, w als Functionen drei reellen, von einander unabhängigen Parameter p, q, r dargestel so wird durch die constanten Parameterwerte p, q bei variire dem r eine Curve (p, q) definirt. Alle Curven, welche zu de Parameterwerten $p+dp$, $q+dq$ bei beliebigen unendlich kleine

dp und *dq* gehören, bilden einen Curvenbündel. Auf der Curve (p, q) wird ein beliebiger regulärer Punkt u, v, w betrachtet, dessen Tangente die Richtungscosinus ξ, η, ζ hat; die Normalebene der Curve im Punkte schneidet aus dem Curvenbündel einen „Querschnitt" aus. Ein solcher Querschnitt ist also ein unendlich kleines ebenes Flächenstück, welches im allgemeinen nicht in eine Strecke ausartet; jede Curve des Bündels geht durch einen Punkt des Querschnittes und hat in ihm eine Tangente. Die Gesamtheit derselben bildet einen Tangentenbündel im Punkte uvw. Eine nicht zur Schar gehörige Curve wird im allgemeinen in jedem ihrer Punkte von einer Curve der Schar unter irgend einem Winkel geschnitten. Sie heisst eine Trajectorie der Schar und zwar eine orthogonale, wenn jener Winkel ein Rechter ist.

Es handelt sich nun um die Aufstellung der Differentialformen, von denen die Untersuchung dieser Tangentenbündel abhängt, wobei der Fall, dass letzteres einem Normalensystem angehört, besondere Beachtung findet. Auf das Detail der Untersuchung kann ohne einen ausgedehnten Formelapparat nicht eingegangen werden. Die gegebenen Andeutungen mögen genügen, die Richtung zu charakterisiren, in der sich die Untersuchung bewegt. A.

H. Molins. Sur quelques nouvelles propriétés du lieu des centres de courbure des courbes gauches. Toulouse Mém. (8) X. 400-409.

Im Anschluss an eine frühere Arbeit, welche der Herr Verfasser in Liouville J. (1) VIII veröffentlicht hat, und deren Resultate hier noch einmal kurz entwickelt werden, betrachtet er in der vorliegenden Arbeit, welche noch weiter fortgeführt werden soll, den Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Raumcurve. Er entwickelt Formeln: 1) für den Contingenzwinkel und den Krümmungsradius dieses Ortes; 2) für ihren Torsionswinkel und Torsionsradius; 3) für die Lage der Schmiegungsebene, bestimmt durch den Winkel, welchen sie mit der Schmiegungsebene des Ortes der Mittelpunkte der osculirenden Kugeln bildet. Hierbei ergiebt sich der Satz: Eine Raumcurve und der

Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte stehen in dem Zusammenhange, dass die Cosinus der beiden Winkel, welche die Tangente der einen mit der Schmiegungsebene der andern bilden, sich verhalten wie die Contingenzwinkel. Endlich folgt noch der Satz: Das Product jener Cosinus ist gleich dem Cosinus des Winkels, welchen die beiden Schmiegungsebenen bilden. A.

C. W. Baur. Krümmungslinien auf Kegelflächen. Böklen Mitt. II. 177-180.

Krümmungslinien einer Kegelfläche sind die erzeugenden Geraden und die Durchschnitte der Fläche mit den um den Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kugeln.

Obwohl dies aus den einfachsten Ueberlegungen folgt, hat der Herr Verfasser doch für nötig gehalten, es im Zusammenhange mit den allgemeineren Fällen analytisch zu erweisen.

A.

R. Liouville. Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbure constante. American J. X. 283-292.

Da jede Fläche mit constanter Krümmung sich auf eine Kugel abwickeln lässt, wobei die geodätischen Linien in grösste Kreise übergehen, und da diese Kugel sich durch Centralprojection von ihrem Mittelpunkte aus auf eine Ebene abbilden lässt, wobei die grössten Kreise sich in Gerade projiciren, so lässt sich jede Fläche mit constanter Krümmung so in die Ebene abbilden, dass die geodätischen Linien der Fläche in Gerade übergehen.

Es lässt sich auch umgekehrt zeigen, dass jede Differentialgleichung zweiter Ordnung, durch welche das System der Geraden einer Ebene dargestellt werden kann, zugleich die Differentialgleichung der Krümmungslinien einer Fläche mit constanter Krümmung ist.

Der Herr Verfasser folgert hieraus, dass die Aufsuchung der geodätischen Linien bei solchen Flächen auf die Untersuchung

einer Differentialgleichung hinauskommt, deren Integral die Constanten nur in linearer Form enthält.

Auf dieser Grundlage untersucht nun der Herr Verfasser die Eigenschaften der betreffenden Differentialgleichung und stellt die Operationen fest, welche zur Lösung des Problems erforderlich sind. A.

Paraf. Sur deux théorèmes de Jacobi relatifs aux lignes géodésiques. C. R. CVI. 1139-1141.

O. Bonnet. Observations relatives à la communication précédente. C. R. CVI. 1141.

Es handelt sich um die beiden bekannten Theoreme. 1) Auf einer positiv gekrümmten Fläche ist der Bogen *AB* einer geodätischen Linie nur dann kürzeste Verbindung der beiden Endpunkte, wenn die unendlich nahe, durch *A* gelegte geodätische Linie den geodätischen Bogen *AB* nicht zwischen *A* und *B* schneidet. 2) Auf einer negativ gekrümmten Fläche ist jeder Bogen *AB* einer geodätischen Linie kürzeste Verbindung seiner Endpunkte. Der Beweis wird mittels der Methoden der Variationsrechnung geführt. Hieran schliesst sich eine Bemerkung des Herrn O. Bonnet, in der er darauf aufmerksam macht, dass er selbst diese Sätze vor mehr als 30 Jahren ebenfalls bewiesen und dazu noch einige Sätze gefügt habe, welche Jacobi nicht gegeben hatte, u. a. den bemerkenswerten Satz: Wenn auf einer (positiv gekrümmten) Fläche das Krümmungsmass stets grösser ist als $\frac{1}{a^2}$, so ist ein geodätischer Bogen nicht kürzeste Verbindung seiner Endpunkte, sobald seine Länge $\geqq \pi a$ ist.

Referent möchte in Hinsicht auf die Literatur des Problems auch auf die Arbeit des Herrn v. Mangoldt im J. für Math. XCI (F. d. M. XIII. 1881. 579) hinweisen. A.

C. Fibbi. Sulle superficie che contengono un sistema di geodetiche a torsione costante. Pisa Ann. V. 79-164.

Ist u, v ein orthogonales Coordinatensystem auf einer Fläche S, und setzt man:

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad G = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

$$D = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad D' = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad D'' = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

wo X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale bedeuten, so genügen die Functionen E, G, D, D', D'' den Codazzi'schen Formeln:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{D}{E}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{D''}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{D'^2 - DD''}{\sqrt{EG}} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right).$$

Von diesen Formeln ausgehend, gelangt der Verfasser zunächst zu folgendem wichtigen Satze:

Enthält eine Fläche S ein System von geodätischen Linien $v = \text{const.}$ mit (für jede Linie) constanter Torsion $\frac{1}{T}$ (wo $T = f(v)$ ist), so gelten für dieselbe die Formeln:

$$ds^2 = du^2 + T^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2, \quad D = 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad D' = \frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$D'' = T^2 \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\frac{1}{T^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2\frac{\partial\varphi}{\partial u}},$$

wo die Function φ von u, v die folgende partielle Differentialgleichung befriedigt:

$$(\text{a}) \quad \frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2T^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\frac{1}{T^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}}{2\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right\};$$

und jeder derartigen Function φ entspricht umgekehrt eine

Fläche, welche ein System von geodätischen Linien mit constanter Torsion enthält.

Zieht man nun aus irgend einem Punkte P der Fläche S eine Strecke von der Länge k, welche in der Schmiegungsebene der durch P gehenden geodätischen Linie mit constanter Torsion liegt und mit der Tangente dieser Linie einen Winkel θ bildet, und ist k eine constante Grösse, θ eine Function von u, v, so übt man dadurch auf S eine Transformation aus, welche der Analogie wegen als eine „Bäcklund'sche Transformation" bezeichnet werden darf. Der Ort der Grenzpunkte der Strecke k ist eine neue Fläche S_1, welche durch die Gleichungen:

$$x_1 = x + k\left(\cos\theta \frac{\partial x}{\partial u} + X\sin\theta\right),\quad y_1 = \cdots,\quad z_1 = \cdots$$

bestimmt ist. Setzt man $k = T\cos\sigma$ (wo σ natürlich eine Function von v ist), und ist θ ein Integral der Differentialgleichung:

$$d\theta - \left\{\sin\theta\left(\frac{1-\sin\sigma}{T\cos\sigma}\right) - 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\}du$$

$$-\left\{T\cot g\sigma\left[\sin\theta\left(\frac{\frac{1}{T^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}}{2\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) - \cos\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right]\right.$$

$$\left.- \frac{1+\sin\sigma}{\sin\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\}dv = 0,$$

so sind $v =$ const. auf der Fläche S_1 geodätische Linien mit der (für jede Linie) constanten Torsion $\frac{1}{T} = f(v)$, $u =$ const. ihre orthogonalen Trajectorien, und die Function φ verwandelt sich in $\Phi = -\varphi - \theta$, welche eine neue Lösung der Gleichung (a) bildet.

Ist T eine constante Grösse, etwa $T = 1$, so mag die Fläche S als eine „asymptotische Fläche" bezeichnet werden, da sie, wie Herr Bianchi bewiesen hat, als der Ort der asymptotischen Linien eines einem Weingarten'schen Tripel angehörenden Systems von pseudosphärischen Flächen angesehen werden darf. Die Function φ, welche einer asymptotischen Fläche entspricht, genügt

nach dem Vorhergehenden der Gleichung:

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}=\frac{\partial [\varphi]}{\partial u},$$

wo:

$$[\varphi]=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2\frac{\partial \varphi}{\partial u}}$$

ist.

Ist C_2 eine Curve mit constanter Torsion, welche in einem Punkte von einer Curve C_1 derart geschnitten wird, dass die Tangente zu C_1 mit der Binormale zu C_2 zusammenfällt, so existirt eine einzige asymptotische Fläche, welche C_2 als geodätische Linie und C_1 als orthogonale Trajectorie derselben enthält.

Der Ausdruck:

$$[\varphi]^2+\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2$$

ist in Bezug auf die Bäcklund'sche Transformation invariant.

Stellen wir uns nun vor, die Fläche S reducire sich auf eine einzige Curve mit der Torsion 1, und bezeichnen wir mit u die Bogenlänge, mit ϱ den Flexionsradius, mit α, β, γ; ξ, η, ζ die Richtungscosinus der Tangente, bezw. Hauptnormale. Wendet man auf diese Curve eine Bäcklund'sche Transformation an, wo $k=\cos\sigma=$ const. und θ das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{\partial \theta}{\partial u}=\sin\theta\,\frac{1-\sin\sigma}{\cos\sigma}$$

ist, so ergiebt sich für jeden Wert der willkürlichen Constante eine Curve C_2 mit der constanten Torsion 1, deren Coordinaten:

$$x_2=x+\cos\sigma\{\alpha\cos\theta+\xi\sin\theta\},\quad y_2=\cdots,\quad z_2=\cdots$$

sind; und die Curven C_2 erzeugen eine Fläche S_1, deren Linienelement durch:

$$ds^2=\left\{1+\left(\frac{\cos\sigma}{\varrho}-\sin\theta\right)^2-\sin^2\sigma\sin^2\theta\right\}du^2$$
$$+2\cos\sigma\left(\frac{\cos\sigma}{\varrho}-\sin\theta\right)du\,d\theta+\cos^2\sigma\,d\theta^2$$

dargestellt wird. Ist v die willkürliche Constante, und $\theta = \theta(u,v)$, so erhält das Linienelement die einfachere Form:

$$ds^2 = du^2 + 2\sin\sigma\cos\sigma\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}du\,dv + \cos^2\sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 dv^2;$$

hier sind die Curven u = const. Kreislinien, welche von den Curven v = const. unter dem veränderlichen Winkel

$$\arccos(\sin\sigma\sin\theta)$$

geschnitten werden. Ist insbesondere $\sigma = 0$, so sind die Curven u = const. Kreislinien mit dem Radius 1, die Curven v = const. ihre orthogonalen Trajectorien; die Fläche S_1 ist asymptotisch und darf als eine „asymptotisch-cyklische Fläche“ bezeichnet werden. Für diese Flächen hat das Integral der Gleichung (a) die Form:

$$\varphi = -\theta - \tfrac{1}{2}\int\frac{du}{\varrho},$$

und θ befriedigt die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = \sin\theta.$$

φ kann auch durch die Gleichung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \sin(\varphi + F) + \frac{dF}{du}$$

definirt werden, wo F eine willkürliche Function von u ist; dann ist $\dfrac{1}{2\dfrac{dF}{du}}$ der Flexionsradius ϱ der Curve C, welche der Ort der Mittelpunkte der Kreislinien ist.

Eine Verallgemeinerung der soeben definirten Flächen bilden die „asymptotisch-hypercyklischen Flächen“, nämlich diejenigen Flächen, welche ein System von Linien u = const. mit der constanten Flexion 1 enthalten. Die zugehörige Function φ befriedigt die Gleichung:

$$[\varphi]^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2.$$

Die Bäcklund'sche Transformation führt eine asymptotisch-hypercyklische Fläche in eine Fläche von derselben Beschaffenheit über. Reducirt sich insbesondere die erstere auf eine asymptotisch-cyklische Fläche, so geschieht dasselbe bei der zweiten.

Diejenige Transformation, in welche die Bäcklund'sche Transformation für $\sigma = 0$ übergeht, darf passend als „complementare Transformation" bezeichnet werden. Auf die Ergebnisse dieser Transformation gehen wir hier nicht ein.

Was den Zusammenhang der vorliegenden Untersuchungen mit der Theorie der Weingarten'schen Tripel betrifft, so ergiebt sich der folgende Satz: Eine beliebige asymptotische Fläche S_1 gehört unendlich vielen Weingarten'schen Tripeln an. Ein solches Tripel ist vollständig bestimmt, wenn neben S_1 eine andere asymptotische Fläche S_2 gegeben ist, welche eine orthogonale Trajectorie der geodätischen Linien von constanter Torsion mit S_1 gemeinschaftlich hat.

Von den zahlreichen Druckfehlern wollen wir nur folgende hervorheben. Im ersten Gliede des Ausdruckes für

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{T_1}\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\right)$$

S. 90, 97 und 108 muss $\frac{\partial x}{\partial u}$ statt $\frac{\partial x}{\partial v}$ geschrieben werden.

Vi.

A. Puchta. Analytische Darstellung der kürzesten Linien auf allen abwickelbaren Flächen. Wien. Ber XCVII. 1269-1298.

Eine sehr ausführliche Behandlung eines bekannten Problems nach bekannten Methoden. A.

A. Voss. Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden. München. Ber. 95-102.

G. Pirondini. Sopra alcune superficie e curve. Batt. G XXVI. 352-362.

Es handelt sich um solche Flächen, welche von einer unveränderlichen ebenen Curve beschrieben werden, wenn die Ebene auf einem beliebigen Kegel rollt, ohne zu gleiten, und um gewisse Curven auf denselben.

Bildet der Radiusvector $R = OP$ eines Punktes P einer Fläche S mit der Flächennormale den Winkel ϑ, und besitzt die Fläche die Eigenschaft, dass $\cos\vartheta = \varphi(R)$ ist, also Function von R allein, so bilden die Curven, für welche R, also auch ϑ constant ist, die Durchschnitte der Fläche S mit einem System concentrischer um O beschriebener Kugeln und sind Krümmungslinien der Fläche S, wie aus dem bekannten Joachimsthal'schen Satze leicht folgt. Das andere System der Krümmungslinien besteht aus lauter congruenten ebenen Curven, und die Fläche entsteht, indem man eine dieser ebenen Curven sich so bewegen lässt, dass ihre Ebene ohne Gleitung auf einem Kegel rollt, dessen Scheitel in O liegt, wobei jeder einzelne Punkt dieser ebenen Curve eine der sphärischen Krümmungslinien beschreibt. Als Polargleichung dieser ebenen Curve ergiebt sich, wenn u den Richtungswinkel bedeutet:

$$(1) \qquad u = \int \frac{\varphi(R)\,dR}{R\sqrt{1-\varphi(R)^2}}.$$

Ist statt des $\cos\vartheta$ der Abstand $\varDelta$ der Tangentialebene, oder der der Hauptnormale δ als Function von R gleich $\varphi(R)$ gegeben, so bleibt die Sache wesentlich dieselbe; die Polargleichung der ebenen Curve nimmt aber eine der beiden folgenden Formen an:

$$(2) \qquad u = \int \frac{\varphi(R)\,dR}{R\sqrt{R^2-\varphi(R)^2}}$$

oder

$$(3) \qquad u = \int \frac{\sqrt{R^2-\varphi(R)^2}}{R\varphi(R)}\,dR.$$

Betrachtet man andrerseits eine Raumcurve, bei welcher die Projection des Vectors $OP = R$ auf die Tangente gleich einer gegebenen Function $\varphi(R)$ ist, und legt man durch die Raumcurve einen Kegel, dessen Scheitel in O liegt, so ändert die Raum-

curve, wenn man den Kegelmantel auf einen andern Kegelmantel aufwickelt, mit Erhaltung des Scheitels O, oder wenn man sie in die Ebene ausbreitet, zwar ihre Gestalt; sie bewahrt aber die angeführte Relation, und die Polargleichung der auf diese Weise in die Ebene abgewickelten Raumcurve ist wiederum die Gleichung (3).

Ist nicht die Projection des Vectors auf die Tangente, sondern der Cosinus des Winkels θ zwischen Vector und Tangente, oder die Projection des Vectors auf die Hauptnormale gleich $\varphi(R)$ gegeben, so bleibt die Betrachtung im wesentlichen dieselbe; nur erhält man als Polargleichung der betreffenden ebenen Curve die Gleichungen

$$(4)\ u = \int \frac{\sqrt{1-\varphi(R)^2}}{R\varphi(R)} dR \text{ oder } (2)\ u = \int \frac{\varphi(R)dR}{R\sqrt{R^2-\varphi(R)^2}}$$

$$\text{oder } (1)\ u = \int \frac{\varphi(R)dR}{R\sqrt{1-\varphi(R)^2}},$$

so dass die drei zuerst aufgestellten Gleichungen in der zweiten Betrachtung wieder auftreten.

Indem der Herr Verfasser nun statt der ursprünglich betrachteten Curve die Rückkehrkante ihrer abwickelbaren Evolutenfläche und die Evolventen der Curve in die Betrachtung zieht, giebt er seinen Resultaten noch andere Formen. Hier scheint aber dem Referenten ein Punkt der Aufklärung oder gar der Berichtigung zu bedürfen; denn es ist nicht berücksichtigt, dass der Vector R, der stets in den betrachteten Relationen auftritt, sich immer nur auf die ursprüngliche Curve bezieht, nicht auf die damit zusammenhängenden anderen Curven. Hierdurch scheint auch das Schlussresultat, in welchem ein Zusammenhang zwischen den Betrachtungen der Flächen und der Raumcurven hergestellt werden soll, indem sich als geodätische und asymptotische Linien der betrachteten Flächen die betrachteten Linien ergeben sollen, nicht stichhaltig zu sein. A.

G. Pirondini. Sur les surfaces de révolution. Nouv. Ann. (3) VII 486-502.

Die Arbeit beginnt mit der Berichtigung eines Irrtums, welcher sich in einer Arbeit des Herrn Aoust (Liouv. J. 1846) bezüglich der loxodromischen Linien findet, und behandelt dann in den ersten fünf Abschnitten die Theorie der Loxodromien nebst einigen Erweiterungen. Zuerst werden die Bedingungen dafür gesucht, dass die Loxodromien gewisse Gleichungsformen erfüllen, und hierbei ergiebt sich, dass, wenn die Gleichung zwischen den Parametern linear sein soll, die Parameter selbst isometrische (isotherme) Abbildungsparameter sein müssen. Referent möchte bemerken, dass es sich wohl entschieden mehr empfiehlt, bei der Betrachtung der Loxodromien von Abbildungsparametern auszugehen, wobei sich ohne weiteres ergiebt, dass die Gleichungen der Loxodromien linear werden. (Man vergl. auch F. August, Ueber Rotationsflächen mit loxodromischer Verwandtschaft, Schlömilch Z. XXXIII. 154ff., Ref. unten S. 783).

Indem der Herr Verfasser nun zu beliebigen Flächen übergeht, definirt er eine Loxodromie als eine Linie, welche das System der Krümmungslinien unter constantem Winkel schneidet. Natürlich kann die Gleichung einer solchen Loxodromie im allgemeinen nur dann linear in den Krümmungsparametern sein, wenn die Krümmungslinien isotherm sind. Eben deshalb erscheint dem Referenten diese Erweiterung des Begriffes unzweckmässig. Es würde genügen, die betrachteten Linien als Trajectorien der Krümmungslinien zu bezeichnen. Nun erst kommt der Herr Verfasser darauf zu sprechen, dass es nicht sowohl darauf ankommt, ob die Parameterlinien Krümmungslinien sind, sondern vielmehr darauf, ob sie isotherm sind, und dass, wenn u, v Abbildungsparameter sind, eine lineare Gleichung zwischen u und v eine Linie charakterisirt, welche die Isothermen unter constantem Winkel schneidet, — also eine Trajectorie der Isothermen, wie Referent sie in der oben citirten Arbeit bezeichnet hat. Um ein Beispiel zu erhalten, welches sich nicht auf eine Umdrehungsfläche beziehen soll, sucht der Herr Verfasser nun diejenigen geradlinigen Flächen auf, bei welchen die erzeugenden Geraden eine Schar von Isothermen bilden. Er weist nach, dass, wenn die Parameterlinie $v =$ const. eine erzeugende Gerade, die Para-

meterlinie u = const. eine dazu senkrechte Linie der Fläche darstellt, die Bedingung, dass diese Parameter isotherm seien, nur erfüllbar ist, wenn das Quadrat des Linienelementes ds^2 sich folgendermassen darstellen lässt:

$$ds^2 = du^2 + (1 + au + b^2u^2)dv^2,$$

wo a und b Constanten sind. Die betreffende geradlinige Fläche ist aber, wie aus dieser Gleichung hervorgeht, auf gewisse Rotationsflächen abwickelbar, so dass man eigentlich nicht aus dem Bereich der Rotationsflächen hinausgekommen ist, sie ist aber andrerseits auf eine geradlinige Schraubenfläche abwickelbar. Interessant ist die Lösung des Problems, solche Flächen zu finden, auf welchen die Loxodromien constante geodätische Krümmung haben.

Der zweite Teil der Arbeit, der mit dem sechsten Abschnitte beginnt, behandelt die kürzesten Linien auf Rotationsflächen, und es wird namentlich das Problem gelöst, solche Rotationsflächen zu suchen, auf denen sich die sämtlichen geodätischen Linien durch lineare Gleichungen zwischen den Parametern darstellen lassen. A.

G. Pirondini. Sulle linee a doppia curvatura. Batt G. XXVI. 104-132.

Es werden bemerkenswerte Eigenschaften der Curven unter folgenden drei Bedingungen hergeleitet. Hat die Schmiegungsebene constante Entfernung von einem festen Punkte, so ist die Curve Kürzeste auf der konischen Fläche, welche ihr von diesem Punkte aus gezogener Radiusvector erzeugt. Ist die Normalebene in diesem Falle, so ist die Curve auf derselben konischen Fläche geodätische Evolvente der orthogonalen Trajectorie der erzeugenden Geraden. Ferner wird dann der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Curve erhalten, indem man die Spitze der konischen Fläche auf die Hauptnormalen der Curve projicirt. Ist es endlich die rectificirende Ebene, so ist die Curve Kürzeste auf der Abwickelbaren, deren Gratlinie Kürzeste auf beliebiger konischer Fläche mit dem festen Punkte als Spitze ist. Die genannten

Sätze sind umkehrbar. Es folgen nun noch viele Sätze, deren Bedingungen weniger einfach sind. H.

F. August. Ueber Rotationsflächen mit loxodromischer Verwandtschaft. Schlömilch Z. XXXIII. 154-166.

Die Basis der Untersuchung beschränkt sich nicht auf Rotationsflächen: Loxodromien werden auf beliebigen Flächen die Curven genannt, welche eine Schar von Isothermen, die sich conform auf der Ebene als parallele Gerade abbilden, unter constantem Winkel (dem Curswinkel) schneiden. Entsprechen sich nun überhaupt Isothermen auf zwei Flächen, so sind deren Abbildungen collinear. Sind sie insbesondere, bezüglich auf isotherme Parameter, loxodrom, so wird die collineare Verwandtschaft der ebenen Abbildung zu einer „affinen“, die Parameter der einen Fläche stellen sich linear in denen der andern dar. Davon ist es wieder ein besonderer Fall, wenn jeder Parameter der einen nur von einem Parameter der andern abhängt. Bedingung desselben ist, dass die Cotangenten der Curswinkel ein constantes Verhältnis $1:k$ haben; k wird dann der Modul genannt. Auf Rotationsflächen werden die Parallelkreise und Meridiane zu Parameterlinien, der Rotationswinkel u und $v = \int \frac{ds}{y}$, wo s den Bogen, y die Ordinate des Meridians bezeichnet, zu Parametern genommen. Die Bedingung loxodromischer Verwandtschaft reducirt sich leicht auf $u_1 = u$, $v_1 = kv$. Hiermit lässt sich die weitere Forderung vereinigen, dass entsprechende Trajectorien von einem auf der Axe liegenden Centrum aus perspectivisch sind. Die Relation der Flächen ist dann:

$$r_1 = ce^{\pm\int d\varphi\sqrt{k^2-1+k^2\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}.$$

Rückt das Centrum ins Unendliche, so wird $s_1 = ks$. Statt der perspectivischen Projection wird ferner die gemeinsame Normalprojection auf die Axe gefordert, dann die Bedingung gestellt, dass entsprechende Meridianelemente einen constanten Winkel mit einander bilden, ferner dass die Rotationsflächen parallel

sind; zuletzt wird eine Rotationsfläche gesucht, welche mit ihrer Evolutenfläche einfach loxodromisch verwandt ist. Die hiermit bezeichneten Probleme werden gelöst und interessante Sätze darüber aufgestellt. H.

G. Koenigs. Sur la distribution des volumes engendrés par un contour fermé, tournant autour de toutes les droites de l'espace. C. R. CVI. 927-929.

G. Koenigs. Sur les volumes engendrés par un contour fermé dans un mouvement quelconque. C. R. CVI. 1512-1514.

G. Koenigs. Sur le volume engendré par un contour lié invariablement au trièdre d'une courbe et, en particulier, sur une propriété des courbes de M. Bertrand. C. R. CVII 474-476.

Die erste Arbeit zerlegt das von einer geschlossenen Curve Θ bei Rotation um eine Gerade $\varDelta$, bestimmt durch die Gleichungen

$$cy-bz+p=0;\ az-cx+q=0;\ bx-ay+r=0,$$

erzeugte Volumen in der Form:

$$(4)\qquad V_\varDelta=\vartheta M_\varDelta;\ M_\varDelta=\frac{Ap+Bq+Cr+La+Mb+Nc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

wo

$$A=\tfrac{1}{2}\int(ydz-zdy),\qquad L=\tfrac{1}{2}\int(y^2+z^2)dx,$$

$$B=\tfrac{1}{2}\int(zdx-xdz),\qquad M=\tfrac{1}{2}\int(z^2+x^2)dy,$$

$$C=\tfrac{1}{2}\int(xdy-ydx),\qquad N=\tfrac{1}{2}\int(x^2+y^2)dz$$

und ϑ den Rotationswinkel bezeichnet. Durch A, B, C wird die Flächenaxe bestimmt, auf ihr die Strecke R gleich dem Flächenmoment, dessen Projectionen A, B, C sind, abgeschnitten. Der Ausdruck (4) bietet nun die Form, in der sich beliebig viele Rotationen zusammensetzen lassen; es bezeichnen dann R, etc. die Resultanten. Nimmt man die Centralaxe (nach Poinsot) zur

z-Axe, so hat Gleichung (4) die Form:

$$V_\Delta = \vartheta(R\varpi \sin\alpha + G\cos\alpha),$$

wo α der Winkel zwischen der Flächenaxe und der Rotationsaxe, ϖ die kürzeste Entfernung zwischen der Central- und Rotationsaxe und G das bei der Rotation 1 um die Centralaxe erzeugte Volumen ist. Hieran schliessen sich specielle Folgerungen.

Die zweite Arbeit führt die erste erst zum beabsichtigten Schlusse. Es wird eine Rotation mit einer Verschiebung längs der Axe verbunden, wobei die Form (4) bestehen bleibt, dann eine beliebige unendlich kleine Verrückung hinzugefügt. Es zeigt sich, dass die resultirenden sechs Grössen in (4) bei endlicher Verrückung durch Quadratur hervorgehen, mithin das durch beliebige Bewegung erzeugte Volumen linear in sechs Grössen dargestellt wird, so dass zwischen sieben solchen Volumenteilen immer eine lineare Relation besteht. Hierbei folgt die Bemerkung, dass, wenn die bewegte Curve constante Krümmung hat, das erzeugte Volumen $\pi R^2 \alpha$ ist, wo α die Indicatrix der Binormale (im Sinne von Serret) bezeichnet.

Die dritte Arbeit wendet die in den zwei ersten entwickelte Theorie auf die Bewegung von Θ an, wo dieses, fest verbunden mit dem Trieder der Tangente, Haupt- und Binormale einer Curve s, an dessen Bewegung längs der Curve teilnimmt. Hier geht Gleichung (4) über in

$$V = As - L\tau + N\mathfrak{s},$$

wo τ und $\mathfrak{s}$ die Indicatrices der Tangente und Binormale von s sind. Im Falle, wo V proportional s ist, wird Θ eine Bertrand'sche Curve. Ferner wird die Theorie erweitert auf variable Θ, wiewohl nicht allgemein ausgeführt. Ist Θ eine ebene Curve, A ihr Flächeninhalt, r die Entfernung des Schwerpunkts von A von der „Charakteristik" seiner Ebene, $d\vartheta$ der Winkel zwischen dieser und ihrer Consecutiven, so ist $V = \int Ar\,d\vartheta$, insbesondere wenn Θ der Krümmungskreis von s ist, $V = \pi \int \frac{R^2}{T}\,ds$, R und T Krümmungs- und Torsionsradius. H.

G. Koenigs. **Détermination sous forme explicite de toute surface réglée rapportée à ses lignes asymptotiques et, en particulier, de toutes les surfaces réglées à lignes asymptotiques algébriques.** C. R. CVI. 51-54.

Die drei Gleichungen der Regelfläche

$$x_i = g_i(\lambda) + h_i(\lambda)\mu, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

die für constantes λ die Erzeugende darstellen, sollen so bestimmt werden, dass sie für constantes μ die andere asymptotische Linie ausdrücken. Es ergeben sich zunächst je zwei Gleichungen der Form:

$$sh_i'' + bh_i' + qh_i - g_i = 0,$$
$$sg_i'' + bg_i' + dg_i + ph_i = 0,$$

und nach Elimination von g_i eine lineare Gleichung vierter Ordnung für h, geschrieben:

$$h^{\mathrm{IV}} + 4P_1 h''' + 6P_2 h'' + 4P_3 h' + P_4 h = 0.$$

Aus den vier Identificirungsformeln werden die Gleichungen der Regelfläche, bezogen auf ihre asymptotischen Linien, gefunden:

$$\varrho x_i = h_i\mu + \frac{u'}{30V}h_i'' + \left[2P_1\frac{u'}{30V} - \left(\frac{u'}{30V}\right)'\right]h_i'$$
$$+ \left[(3P_2 - 2P_1' - 2P_1^2)\frac{u'}{30V} - P_1\left(\frac{u'}{30V}\right)' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{u'}{30V}\right)'' - u\right]h_i.$$

Hier bezeichnet V die von Halphen entdeckte Differentialinvariante, u eine willkürliche Function von λ, und statt s ist gesetzt $u' : (30V)$. Ist $V = 0$, mithin die Formel unbrauchbar, so wird statt ihrer:

$$\varrho x_i = h_i\mu + sh_i'' + (2P_1 s - s')h_i' + [(3P_2 - 2P_1^2 - 2P_1')s - P_1 s'$$
$$+ \tfrac{1}{2}s'' + \alpha]h_i = 0.$$

Es wird schliesslich bemerkt, dass aus dieser Formel die allgemeine Lösung der Aufgabe hervorgeht: eine Curve (g) zu finden, die einer gegebenen Curve (h) Punkt für Punkt derart entspricht, dass die Schmiegungsebene von (h) in einem Punkte M durch den entsprechenden Punkt M' von (g), und die von (g) in M' durch M geht. Die Lösung erfordert keine Integration.

H.

E. Vicaire. Sur les propriétés communes à toutes les courbes qui remplissent une certaine condition de minimum ou de maximum. C. R. CVI. 456-459.

Bezeichnet s die Bahn eines Lichtstrahls in einem heterogenen Medium, so reduciren sich die Bedingungen, welche die Dauer der Bewegung, ausgedrückt durch $\int f(x,y,z)ds$, zu einem Minimum machen, auf die zwei Gleichungen:

$$\lambda f'_x+\mu f'_y+\nu f'_z = \frac{f}{\varrho}, \qquad \varrho\cos\alpha = \frac{f}{p},$$

wo ϱ den Krümmungsradius, $\lambda\,\mu\,\nu$ die Richtungscosinus der Hauptnormale von s, α den Winkel zwischen ihr und der Normale der Fläche $f=0$ bezeichnen und $p=\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+f_z'^2}$ ist. Die erste Gleichung bedeutet, dass die Schmiegungsebene von s die Normale der Niveauflächen von f enthält; die zweite, dass die Projection des Krümmungsradius auf diese Normale für alle durch denselben Punkt gehenden Curven dieselbe ist. Hiervon lassen sich zahlreiche Anwendungen auf Fragen der Geometrie, Statik und Dynamik machen, geometrische auf die Curve, welche die kleinste Rotationsfläche erzeugt, solche, deren Schwerpunkt am höchsten oder niedrigsten bei constanter Länge liegt, u. s. w. In der Dynamik ergiebt sich der Satz: Der Krümmungsradius einer Brachistochrone ist in jedem Punkte gleich dem der Bahn, welcher er folgen würde, wenn er von diesem Punkte an sich frei bewegte. Auch wird dadurch die Frage gelöst: Für welche Function f ist $\int f ds$ ein Minimum oder Maximum? Hier nimmt der Verfasser die Niveauflächen $\varphi=0$ und deren Differentialparameter q als durch die s bekannt an und setzt

$$q\varrho\cos\alpha = \frac{1}{\psi(\varphi)};$$

dann ergiebt sich:

$$f(x,y,z) = Ce^{\int\psi(\varphi)\,d\varphi}.$$

H.

Ch. Bioche. Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces gauches. Toul. Ann. II. A. 1-7.

Ein Punkt auf gegebener Regelfläche wird bestimmt durch die Strecke r auf der erzeugenden Geraden und den Bogen der Strictionslinie s bis zu ihr. Die Gleichung der zweiten asymptotischen Linie ist:

$$(1)\qquad 2K\sin\vartheta\frac{dr}{ds}+K^2(\Omega-K\sin\vartheta\cos\vartheta)r^2+\sin\vartheta\frac{dK}{ds}r+\Omega=0,$$

wo Ω die Krümmung der Strictionslinie, ϑ den Winkel zwischen ihr und r, und K den Distributionsparameter, sämtlich Functionen von s, bezeichnen. Sind die Erzeugenden parallel einer festen Ebene (der Richtebene), so ist der Coefficient von r^2 Null. Ist ausserdem K constant, so wird Gleichung (1):

$$2\frac{dr}{ds}+\cos\vartheta=0.$$

Für die orthogonalen Trajectorien der Erzeugenden ist

$$\frac{dr}{ds}+\cos\vartheta=0,$$

daher halbirt die asymptotische Linie die Strecken r der letztern. Das Folgende betrifft die Regelflächen (S) unter beiden Annahmen. Ihre Gleichung ist:

$$y\cos(Kz)-x\sin(Kz)=F(z);$$

die Gleichung der asymptotischen Linie:

$$\frac{y-F(z)\cos(Kz)}{\sin z}=\frac{x-F(z)\sin(Kz)}{\cos z}=\frac{1}{2}\int F(z)K\,dz-\frac{F'(z)}{2K}.$$

Es werden die Fälle untersucht, wo eine asymptotische Linie zweiter Schar gerade ist, dann wo eine derselben die Erzeugenden unter constantem Winkel schneidet; ferner ohne die Annahme einer Richtebene der Fall, wo die Strictionslinie selbst asymptotisch ist, besonders für constantes K, für ein K gleich der Torsion der Strictionslinie und für eine gerade Strictionslinie.

H.

Ch. Bioche. Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement les génératrices d'une surface réglée. Darboux Bull. (2) XII. 290-292.

Damit ein Curvensystem die Erzeugenden einer Regelfläche homographisch teile, muss das System einer Riccati'schen Gleichung genügen, in welche drei willkürliche Functionen eintreten. Es lassen sich daher derartige Curvensysteme bestimmen, die überdies noch besondere Bedingungen erfüllen. Solche Bestimmungen werden in der vorliegenden Arbeit ausgeführt. Beispielsweise giebt der Verfasser an, dass, wenn auf einer Fläche ein System von geodätischen Linien existirt, das die Erzeugenden homographisch teilt, die Fläche auf eine Fläche zweiten Grades abwickelbar ist. Scht.

É. Combescure. Sur le déplacement tangentiel de deux surfaces rigides. Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. 49-78.

Eine starre Fläche (Σ) wird auf ein festes rechtwinkliges Axensystem bezogen, die Coordinaten aber werden als Functionen zweier unabhängigen Parameter α und β aufgefasst. Eine zweite in sich starre Fläche (S) wird durch rechtwinklige Coordinaten mit einem beweglichen Axensystem verknüpft, und auch diese Coordinaten werden als Functionen von α und β betrachtet. Die Richtungscosinus der Winkel, welche die beweglichen Axen mit den festen einschliessen, werden gleichfalls als Functionen dieser beiden Grössen angesehen. Indem nun das System der beweglichen Axen so gestellt wird, dass die beiden Flächen (Σ) und (S) sich berühren, werden für die Bewegung folgende Bedingungen festgehalten: 1) Die Curve c_α der beweglichen Fläche, welche der alleinigen Veränderung von α entspricht, bleibt in steter Berührung mit der Curve C_α der festen Fläche, welche wie C_α durch den Berührungspunkt beider Flächen geht; 2) dieselbe Bedingung gilt für die Curven c_β und C_β; 3) die entsprechenden Elemente von c_α und C_α stehen für den Berührungspunkt in einem gegebenen Verhältnis $G(\alpha\beta)$; dasselbe gilt für die Curvenelemente von c_β und C_β, und dies Verhältnis wird durch eine Function $G_1(\alpha,\beta)$ dargestellt. Sind nun $d\sigma_\alpha$ und ds_α die beiden Curvenelemente von C_α und c_α, welche einer Veränderung von α um $d\alpha$ entsprechen, so wird, wenn M der eine

Endpunkt der Curvenelemente ist, in welchem sich die Flächen berühren, der andere Endpunkt m von ds_a, wenn a um da zunimmt, sich auf den zweiten festen Endpunkt M' von $d\sigma_a$, den folgenden Berührungspunkt, legen unter der Bedingung $\frac{d\sigma_a}{ds_a}=G$. Es findet also ein elementares Gleiten von ds_a auf $d\sigma_a$ statt, welches sich in der Form darstellt $ds_a - d\sigma_a = \left(\frac{1}{G} - 1\right) d\sigma_a$. Das Entsprechende gilt für die Curven (β). Unter solchen Bedingungen werden die Bewegungsgleichungen für die Fläche (S) aufgestellt, und es wird in eine Analyse derselben für den Fall eingetreten, dass $G = 1$ und $G_1 = 1$ ist. In diesem besonderen Fall sind beide Flächen in dem Gauss'schen Sinne aufeinander abwickelbar. Für die Analyse gewinnen eine besondere Bedeutung die drei Grössen, welche Darboux in seinem Werk „Sur la théorie générale des surfaces" etc. bei der Behandlung desselben Problems S. 71 und S. 72 mit Erfolg eingeführt hat.

Schn.

Genty. Note de géométrie. Nouv. Ann. (3) VII. 350-352.

Es wird folgender Satz bewiesen: Die Endpunkte A_1, A_2 einer Geraden von constanter Länge bewegen sich je auf einer gegebenen Fläche (S_1) und (S_2) dergestalt, dass die Normale an (S_1) in A_1 und die Normale an (S_2) in A_2 in einem Punkte N sich treffen. Dann muss die in A errichtete Normale des Ortes, der von einem auf $A_1 A_2$ gelegenen Punkte A beschrieben wird, auch durch N gehen. Der Beweis wird durch Formeln der analytischen Flächentheorie geliefert.

Mz.

R. A. Roberts. On the volume generated by a congruency of lines. London M. S. Proc. XIX. 207-215.

Es wird der allgemeine Integralausdruck für das genannte Volumen aufgestellt und für eine Reihe verschiedenartiger Begrenzungen desselben specialisirt. Dabei ergiebt sich eine Formel, welche als Verallgemeinerung des Abel'schen Satzes über Doppelintegrale angesehen werden kann.

Schg.

W. Stammer. Allgemeine Theorie der Umhüllungsflächen und einige damit zusammenhängende Eigenschaften der Flächen zweiten Grades. Festschrift. Realgymn. Düsseldorf. 187-203.

Der Verfasser vermeidet den Begriff des Durchschnitts unendlich naher Flächen und definirt daher die Umhüllungsflächen als Ort der Berührungslinien resp. (bei zwei Parametern) der Berührungspunkte, und berücksichtigt 1) besonders den Fall scheinbarer Umhüllung, wo nämlich die gefundene Fläche zwar sämtliche Flächen der Schar berührt, wo aber die gefundenen Berührungspunkte nicht die gesamte Umhüllungsfläche, sondern nur eine Curve auf ihr ausfüllen. 2) Der specielle Fall beweglicher Ebenen führt, wie bekannt, auf die Darstellung einer Fläche durch Ebenen-Coordinaten; der Verfasser schliesst daran einige metrische Eigenschaften über die Abstände der Tangential-Ebenen eines Ellipsoids von festen Punkten. R. M.

A. Razzaboni. Sopra certe famiglie di superficie di rivoluzione applicabili. Bologna Rend. 1887-88. 19-21.

Herr Bianchi (Sulle superficie applicabili, Pisa Ann. II. 1879) hat bewiesen, dass die Projectionen einer Tractrix auf allen durch ihre Asymptote z gehenden Ebenen die Meridianlinien von auf einander abwickelbaren Umdrehungsflächen (mit der gemeinschaftlichen Axe z) bilden. Nun kommt, wie Herr Razzaboni bemerkt, dieselbe Eigenschaft allen Linien zu, deren Gleichung:

$$z = \int \sqrt{\frac{c}{r^2} + c'}\, dr$$

ist, wo c, c' zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Diese Gleichung stellt insbesondere eine logarithmische Linie dar, wenn $c' = 0$, und eine Tractrix, wenn $c' = -1$. Vi.

E. Nannei. Le superficie ipercicliche. Nap. Rend. (2) II. 119-121.

E. Fergola, G. Battaglini. Rapporto. Daselbst. 118.

E. Nannei. Le superficie ipercicliche. Batt. G. XXVI. 201-233.

Eine „hypercyklische Fläche" ist nach Herrn Bianchi (siehe F. d. M. XVII. 1885. 732) eine Fläche, welche ein System von Krümmungslinien mit constanter Flexion (erster Krümmung) besitzt. Herr Nannei bezeichnet als „hypercyklische Flächen mit veränderlicher Flexion" diejenigen Flächen, welche ein System von Krümmungslinien mit constanter, aber von Linie zu Linie veränderlicher Flexion besitzen, und spricht in Napoli Rend. manche wichtige Eigenschaften dieser Flächen ohne Beweis aus. Es mögen hier die hauptsächlichsten angeführt werden.

Die Bestimmung der hypercyklischen Flächen hängt von der Integration eines Systems von vier partiellen Differentialgleichungen mit vier unbekannten Functionen ab, die man aber durch Einführung einer passenden Hülfsfunction auf drei reduciren kann.

Ist eine Linie des Systems mit constanter Flexion ein Kreis, so sind sämtliche Linien desselben von gleicher Beschaffenheit.

Wird eine beliebige Curve v_0 mit constanter Flexion $\frac{1}{R}$ von einer beliebigen Curve u_0 rechtwinklig geschnitten, so existirt eine einzige hypercyklische Fläche, welche v_0 und u_0 als ihre Krümmungslinien enthält, und deren (veränderliche) Flexion durch die beliebig vorgegebene Function $\varphi(v)$ $\left(\text{mit der Beschränkung } \varphi(v_0) = \frac{1}{R}\right)$ dargestellt wird.

Die complementare und die Bäcklund'sche Transformation (siehe F. d. M. a. a. O.) sind nur auf hypercyklische Flächen mit constanter Flexion anwendbar.

Was die hypercyklischen Flächen mit constanter Flexion (oder die hypercyklischen Flächen schlechtweg) betrifft, so gelten folgende Sätze:

Die hypercyklischen Flächen mit constanter (positiver oder negativer) Totalkrümmung sind Helikoiden. — Es giebt keine hypercyklische Fläche mit constanter mittlerer Krümmung. — Es giebt keine doppelt-hypercyklische Fläche, d. h. keine Fläche, deren beide Systeme von Krümmungslinien aus Linien mit für

jedes System constanter Flexion bestehen. — Jede hypercyklische Fläche bestimmt eindeutig ein Weingarten'sches Tripel (mit constanter Flexion, nach Bianchi's Bezeichnungsweise; siehe F. d. M. a. a. O.), welchem sie angehört.

Die Abhandlung in Batt. G. ist der ausführlichen Entwickelung der obigen Untersuchungen und der Aufstellung der sich auf die hypercyklischen Flächen beziehenden Formeln gewidmet. Wir entnehmen aus derselben nur das Gleichungssystem, welches eine hypercyklische Fläche bestimmt; es ist das folgende:

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial v}=0,$$

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial u}=0,$$

$$\frac{1}{r_1 r_2}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\},$$

$$\frac{1}{r_2^2}+\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2=\varphi^2(v).$$

Hier haben die zu bestimmenden Functionen r_1, r_2, E, G die gewöhnliche Bedeutung; $u=\text{const.}$ und $v=\text{const.}$ sind die zwei Krümmungsliniensysteme, von denen das zweite aus Linien mit constanter, von Linie zu Linie aber im allgemeinen veränderlicher Flexion $\varphi(v)$ besteht. — Bezeichnet ω den Winkel der Hauptnormale der Linie $v=\text{const.}$ in einem Punkte M derselben mit der Tangente der Linie $u=\text{const.}$ in M, so reducirt sich, wie schon oben angedeutet wurde, das obige Gleichungssystem durch Einführung der Hülfsfunction ω auf ein System von drei Gleichungen mit den drei unbekannten Functionen ω, E, G:

$$\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\varphi(v)\cos\omega,$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+\sqrt{G}\,\varphi(v)\frac{\partial\omega}{\partial u}\cos\omega+\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\sqrt{EG}\,\varphi^2(v)+\sqrt{E}\frac{\varphi'(v)}{\cos\omega}=0;$$

r_1 und r_2 hängen mit ω, E, G durch die Formeln:

$$\frac{1}{r_1} = \varphi(v)\sin\omega + \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}\operatorname{tang}\omega + \frac{\partial\omega}{\partial v}\right),$$

$$\frac{1}{r_2} = \varphi(v)\sin\omega$$

zusammen. (In diesen Formeln wurden einige Druckfehler des Textes berichtigt). Vi.

E. Césaro. Question de géométrie intrinsèque. Nouv. Ann. (3) VII. 147-152.

Es sei (M) eine Curve doppelter Krümmung. In den Punkten M derselben ziehe man die Hauptnormalen und dann diejenigen Normalen, die mit jeder Hauptnormale den Winkel α bilden. Auf diesen letzteren Normalen trage man von M eine Strecke $MM_1 = C$ ab und betrachte die von den Punkten M_1 durchlaufene Curve (M_1). Die hier behandelte Frage ist nun die: Unter welcher Bedingung sind die Geraden MM_1 Hauptnormalen der Curve (M_1)? Mz.

H. Jackstein. Ausdehnung eines von Puiseux für ebene Curven behandelten Problems auf Raumcurven. Diss. Halle. 50 S. u. 2 Taf. 8°.

R. Hoppe. Dichte der Sehnen von Flächen und ebenen Curven. Hoppe Arch. (2) VII. 165-179.

Bericht auf S. 704 dieses Bandes.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

M. Noether. Anzahl der Moduln einer Klasse algebraischer Flächen. Berl. Ber. 123-128.

In dieser bedeutsamen Note weist der Verfasser nach, dass, wie eine Klasse algebraischer Curven des Geschlechtes p, d. h. die Gesamtheit aller aus einer solchen Curve durch rationale eindeutig umkehrbare Substitution ableitbaren Curven, von $3p-3$ Parametern, den Moduln der Klasse, abhängt, ähnlich die allgemeine Flächenklasse des Geschlechtes p durch $10(p+1)-2p_2$ Parameter bestimmt ist; dabei bedeutet p_2 die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte einer solchen Fläche f von der n^{ten} Ordnung mit zwei ihrer adjungirten Flächen φ von der Ordnung $n-4$. Die Ableitung dieser Zahl gelingt durch Transformation auf eine Normalfläche der Klasse, deren Ordnung $N = p_2 = p_1-1$ ist (p_1 ist das Geschlecht der beweglichen Schnittcurve von f mit einer der Flächen φ), und deren charakteristische Eigenschaft darin besteht, dass die ebenen Schnitte einer solchen Normalfläche F zu denjenigen beweglichen Curven vom Geschlechte p_1 gehören, welche aus F durch die zu F adjungirten Flächen Φ der Ordnung p_2-4 ausgeschnitten werden können. Da die Doppelcurve einer solchen Fläche die Ordnung $M = \frac{1}{2}p_2(p_2-5)$, den Rang R und T dreifache Punkte hat, und aus einer dieser Flächen ∞^{4p-1} weitere abgeleitet werden können, da ferner ∞^{γ}

$$(\gamma = \tfrac{1}{6}(p_2+1)(p_2+2)(p_2+3)-1-\{(3p_2+1)M-\tfrac{1}{2}R-11T\})$$

Flächen p_2^{ter} Ordnung existiren, und endlich die Mannigfaltigkeit der Curven M^{ter} Ordnung mit T dreifachen Punkten in unserem Falle $\beta' = 4M-3T+p-4$ ist, so beträgt die Anzahl der Moduln einer Flächenklasse

$$Z = \beta'+\gamma-(4p-1) = 10(p+1)-2p_2.$$

Fünf interessante Beispiele schliessen die Note. Bm.

H. Zimmermann. Eine Einteilung der algebraischen Oberflächen. Pr. Realgymn. Freiberg. (No. 524.) 25 S. 4° u. 4 Taf.

Das Einteilungsprincip ist der Schnitt der Fläche mit der unendlich entfernten Ebene.

Die Einteilung wird bis zu Flächen sechster Ordnung genauer durchgeführt. A.

W. End. Algebraische Untersuchungen über Flächen mit gemeinschaftlicher Curve. Inaug.-Diss. Tübingen. München. 29 S. gr. 8°.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, nach dem Vorgange von Jacobi und Clebsch das Bézout'sche Eliminationsverfahren anzuwenden und zwar auf die Betrachtung von drei Flächen, welche eine Curve gemeinschaftlich haben.

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten wird auf Grund der Bedingungen, welche eine Function von x, y, z zu erfüllen hat, damit sie durch drei gegebene Functionen, welche für die Punkte einer Curve und eine Anzahl einzelner Punkte verschwinden, sich linear darstellen lässt, gezeigt, dass auch in dem betrachteten Falle eine „Resultante" hinsichtlich jeder der drei Variabeln existirt, welche, multiplicirt mit einer Function, welche für die Punkte der Curve verschwindet, sich in ähnlicher Weise darstellen lässt, wie in dem von Bézout behandelten Fall. Der Beweis stützt sich, wie bei Bézout, auf Abzählungen.

Der zweite Teil giebt auf Grund der Darstellung der Resultante den Beweis des Jacobi'schen Satzes für den Fall einer gemeinschaftlichen Curve.

Der Herr Verfasser bemerkt, dass er durch Herrn Brill zu dieser Untersuchung angeregt sei. A.

G. Koenigs. Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. 177-192.

Die Arbeit ist eine Erweiterung der im vorigen Jahre erschienenen Notiz des Herrn Verfassers (Recherches sur les surfaces par chaque point desquelles passent deux ou plusieurs coniques. C. R. CV. 407-409, F. d. M. XIX. 1887. 787).

Im ersten Teile werden die in jener Notiz aufgestellten Gesetze etwas eingehender begründet. Daran schliesst sich ein Excurs über Flächen, welche von einläufigen ebenen Curven beschrieben werden, im Anschluss an bekannte Untersuchungen des Herrn Noether.

Der letzte Teil ist dem in der Notiz noch nicht behandelten Falle gewidmet, dass eine Fläche durch eine Familie von Kegelschnitten mehrere Mal bedeckt wird, so dass etwa durch jeden Punkt n Kegelschnitte gehen. Der Verfasser giebt ein Mittel an, um unendlich viele Flächen dieser Art zu finden.

Hat man nämlich eine Steiner'sche Fläche und betrachtet man eine ihr umbeschriebene abwickelbare Fläche m^{ter} Klasse, so schneidet jede ihrer Tangentialebenen die Steiner'sche Fläche in zwei Kegelschnitten, und der geometrische Ort dieser Kegelschnitte ist eine Fläche der Art, dass durch jeden ihrer Punkte m Kegelschnitte gehen.

Es handelt sich nun um die Frage, ob die so erhaltene Flächenklasse die allgemeinste ist, welche der gestellten Bedingung genügt. In der Untersuchung dieser Frage bricht der vorliegende Teil der Arbeit ab. A.

J. Meder. Anallagmatische Flächen. Pr. Gymn. Aachen. (No. 394). 18 S. 4° u. 1 Taf.

Wenn alle Punkte einer Fläche bei der Transformation durch reciproke Radien in Bezug auf ein festes Centrum wieder in Punkte derselben Fläche übergehen, so heisst die Fläche bekanntlich anallagmatisch. Der Herr Verfasser stellt sich nun nach Besprechung einiger bekannter Eigenschaften dieser Flächen die Aufgabe, die Gleichungen aller algebraischen anallagmatischen Flächen aufzusuchen. Er wählt das Transformationscentrum zum Anfangspunkt O eines rechtwinkligen Coordinatensystems, den Transformationsradius zur Längeneinheit und ordnet die Gleichung nach homogenen Bestandteilen, so dass sie etwa die Form annimmt:

$$\text{(I)} \qquad h_p + h_{p+1} + \cdots + h_{p+q} = 0,$$

wo allgemein h_k eine homogene Function k^{ter} Ordnung der Coordinaten x, y, z bedeutet. Sucht man nun einen nicht mit O zusammenfallenden Durchschnitt P dieser Fläche mit einer Geraden durch O, deren Richtungscosinus ξ, η, ζ sind, so dass $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$

wird, und bezeichnet den Vector OP mit r, so ist $x = r\xi$, $y = r\eta$, $z = r\zeta$ und (I) geht über in

$$\text{(II)} \qquad r^p[f_p + rf_{p+1} + \cdots + r^q f_{p+q}] = 0,$$

und es ist allgemein f_k eine homogene Function k^{ter} Ordnung von ξ, η, ζ, die aber den Factor $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ein oder mehrere Male enthalten kann, so dass sich die Ordnung von f_k um irgend eine gerade Zahl verringern kann. Soll nun einer beliebigen (von Null verschiedenen) Wurzel r der Gleichung (II) eine Wurzel $\frac{1}{r_1}$ entsprechen, so muss $\frac{f_{p+q}}{f_p} = \frac{f_{p+q-1}}{f_{p+1}} = \cdots = \frac{f_p}{f_{p+q}}$ sein. Dies ist nur bei geradem q möglich und führt im allgemeinen (nämlich wenn $f_{p+\frac{1}{2}q}$ nicht Null ist) auf die Bedingung, dass der gemeinschaftliche Wert der obigen Brüche $= +1$ ist; wenn $f_{p+\frac{1}{2}q} = 0$ ist, könnte der gemeinschaftliche Wert der Brüche zwar auch $= -1$ sein; aber dann wäre die Gleichung der Fläche reductibel, indem die Transformationskugel einen Bestandteil der Fläche bilden würde. Bleibt man bei irreductiblen Flächen stehen, so kommt man hierdurch auf Flächen, deren Gleichung die Form hat

$$\text{(III)} \qquad h_p(1 + r^q) + h_{p+1}(1 + r^{q-2}) + \cdots + 2h_{p+\frac{1}{2}q} = 0,$$

wo p eine positive ganze, q eine positive gerade Zahl ist, beides mit Einschluss der Null, und $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist.

$p + q = n$ giebt den Grad der Gleichung an.

Dies ist, wenn auch in anderer Form, wesentlich der Inhalt des allgemeinen Teils der vorliegenden Arbeit. Der zweite Teil enthält eine Betrachung der einfachsten Fälle, nämlich: 1) $n = 1$, also $p = 1$, $q = 0$ (Ebene), 2) $n = 2$; also entweder $p = 0$, $q = 2$ (Kugel) oder $p = 2$, $q = 0$ (Kegel), 3) $n = 3$; also entweder $p = 1$, $q = 2$ (eine gewisse cyklische Fläche dritter Ordnung durch O); oder $p = 3$; $q = 0$ (Kegel dritter Ordnung). Diese Discussion ist etwas umständlich, zumal da sie lediglich auf eine Reproduction bekannter allgemeiner Untersuchungen über Gleichungen von Kugel, Kegel, etc. hinausläuft. Hinsichtlich des allgemeinen Teiles hat Referent folgende Ausstellungen zu machen: Der Herr Verfasser hat die Entwickelung

nur unter der Voraussetzung $p = 0$ durchgeführt, der Uebergang zu dem allgemeineren Falle ist unvermittelt. Der Herr Verfasser sagt ferner, notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die unserer Gleichung (II) entsprechende Gleichung reciprok sei, ist $f_n = f_0$, $f_{n-1} = f_1$ u. s. w. Diese Bedingung ist nun zwar hinreichend, aber nicht notwendig. Sie wird es erst später, wenn die reductibeln Flächen ausgeschlossen werden. — Vor allen Dingen wäre aber darauf hinzuweisen gewesen, dass man durch die aufgestellten Gleichungen nur eine Klasse von anallagmatischen Flächen erhält, nämlich diejenigen, bei welchen entsprechende Punkte, vom Centrum aus betrachtet, in derselben Richtung liegen (positiv anallagmatische Flächen). Es giebt aber auch eine zweite Art (negativ anallagmatische) Flächen, bei denen entsprechende Punkte, vom Centrum aus betrachtet, in entgegengesetzter Richtung liegen. Es sei die Bemerkung gestattet, dass man die algebraischen Flächen dieser zweiten Art aus der Gleichung (III) erhalten kann, indem man statt r überall ir, d. h. statt r^2 überall $-r^2$ einsetzt. A.

E. Waelsch. Beiträge zur Flächentheorie. Wien. Ber. XLVII. 164-174.

Das von einem Punkte auf seine Polarebene bezüglich einer Fläche f gefällte Lot wird Polnormale dieses Punktes und der Ort des Punktes, dessen Polnormale eine Gerade g schneidet, wird Fussfläche der Geraden g genannt. Diese Fläche lässt sich projectiv erzeugen. Wenn g selbst Polnormale ist, und nur dann, hat die Fussfläche einen Doppelpunkt auf g und zwar im Pol; damit die Fussfläche einen Doppelpunkt besitze, der nicht auf g liegt, muss g Tangente an die Singularitätenfläche des Polnormalencomplexes sein. Jeder Tangente der Centrafläche von f, aber keiner andern Geraden, entspricht eine Fussfläche, welche f berührt. Dieser Satz gewährt ein Mittel, um die Charakteristiken der Centrafläche zu bestimmen. F.

E. Waelsch. Ueber das Normalensystem und die Centrafläche algebraischer Flächen, insbesondere der Flächen zweiten Grades. Nova Acta Leop.-Carol. Ak. LII. 287-312, Diss. Erlangen. 28 S. 4°.

Nach einer allgemeineren Einleitung beginnt der Herr Verfasser seine Untersuchung mit der Betrachtung des Polnormalencomplexes. Eine Polnormale ist die von einem beliebigen Punkte des Raumes auf seine Polarebene gefällte Normale bezüglich der Fläche *F*; zu diesem Complex gehören auch die Normalen der Fläche. Der Ort des Punktes, dessen Polnormale eine gegebene Gerade *g* schneidet, heisst Fussfläche von $g(\varphi^{g})$; sie schneidet aus *F* die Punkte aus, deren Normalen *g* treffen; diese Fläche wird projectivisch erzeugt. Ist *g* selbst Polnormale, so hat die Fussfläche einen Doppelpunkt; der Tangentenkegel in diesem wird der Axenkegel genannt. Dieser Axenkegel kann in zwei Ebenen zerfallen, und diejenigen Punkte, für welche dies geschieht, sind für die weitere Untersuchung von Wichtigkeit, welche nun auf die Centrafläche, ihre Charakteristiken und die sogenannten Coefficientencomplexe eingeht. Nach diesen Untersuchungen, welche sich auf beliebige algebraische Flächen beziehen, wendet sich der Herr Verfasser specieller zu den Flächen zweiten Grades und untersucht die Doppeltangente der Centrafläche, die Inflexionstangenten, den Focalcomplex, die sogenannte Transversalschar und die Transversalcongruenz. A.

E. Waelsch. Ueber das Normalensystem und die Centrafläche der Flächen zweiter Ordnung. Wien. Ber. XCVII. 583-590.

Der vorliegende Teil der Arbeit ist die Fortsetzung der in den Wiener Berichten XCV. II. 549 veröffentlichten Mitteilung. Es sind in ihm folgende Gegenstände behandelt:

1. Eine Eigenschaft zweier in Bezug auf eine Fläche *F*, conjugirten, auf einander senkrechten Geraden.
2. Die Dupin'sche Tangenten-Involution für die Centrafläche.
3. Die Inflexionstangenten für die Centrafläche.
4. Confocale Flächen und die Centrafläche. A.

F. Freiherr Krieg v. Hochfelden. Ueber projective Beziehungen, die durch vier Gerade im Raume gegeben sind. (I. Mitteilung.) Wien. Ber. XCVII. 806-839.

Ein Bündel collinearer Räume führt nach Herrn Schur's Entwickelungen auf ein Nullsystem dritter Klasse, wenn man jedem Träger homologer Punkte das Individuum zuordnet, welches aus einem bestimmten Raum des Bündels entstammt. Drei collineare Räume bestimmen drei derartige Nullsysteme mit gemeinsamer Singularitätencurve, welche von der sechsten Ordnung ist.

Der Verf. behandelt den Fall, wo diese Curve aus vier windschiefen Geraden σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 und ihren beiden Transversalen h_1 und h_2 besteht. Man erhält drei Nullsysteme der behandelten Art, wenn man jeder Ebene die drei Punkte zuweist, in denen gegenüberliegende Seiten des Vierecks $\pi(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$ sich treffen. Verteilt man die Geraden σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 in zwei Paare (z. B. $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_1\sigma_4$) und sucht die beiden Strahlenpaare auf, welche sowohl das eine als auch das andere Paar harmonisch trennen, so erhält man mit h_1, h_2 zusammen die Kanten des Fundamentaltetraeders für eine der drei zugehörigen collinearen Beziehungen. Die Nullebenen eines Punktes P ergeben sich, wenn man mit vier neuen Geraden s_1, s_2, s_3, s_4 das Vierflach $P(s_1s_2s_3s_4)$ bildet und je die gegenüberliegenden Kanten desselben durch Ebenen verbindet. In einer bestimmten Anordnung stehen die vier Geraden s_1, s_2, s_3, s_4 den Geraden σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 hinsichtlich jeder von vier bestimmten Flächen zweiten Grades F_1, F_2, F_3, F_4 polarreciprok gegenüber. Jede derselben enthält ausser h_1, h_2 noch ein zweites Paar gegenüberliegender Kanten von jedem der drei Fundamentaltetraeder.

Zu den drei betrachteten Nullsystemen gesellen sich drei andere, bei denen s_1, s_2, s_3, s_4 und σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 ihre Bedeutung vertauschen. E. K.

V. Murer. Generazione della superficie d'ordine n con retta $(n-2)$-pla. Palermo Rend. II. 107-109.

Aus der Gleichungsform der betrachteten Fläche leitet Herr M. ab, dass sie das Erzeugnis eines Ebenenbüschels und einer projectivischen rationalen Reihe $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung aus Flächen zweiter Ordnung ist. Die Axe des Büschels ist die $(n-2)$-fache Gerade *d*. Hieraus zählt er $3n-4$ Paare *d* treffender Geraden ab, $4(n-3)$ Cuspidalpunkte auf derselben etc. E. K.

V. Murer. Le serie algebriche di superficie ad indice 3. Batt. G. XXVI. 178-180.

Dieser Aufsatz gehört zu einer Gruppe mit den zwei in den beiden vorigen Bänden von Batt. G. veröffentlichten, worüber schon referirt worden ist (F. d. M. XVIII. 1886. 742; XIX. 1887. 789). Einer seiner hauptsächlichsten Zwecke ist die Berichtigung der Unrichtigkeit, welche wir in dem Referat über die erste der genannten Arbeiten angedeutet haben, nämlich des Beweises, dass nicht alle Reihen vom Index 3 rational sind. Der Verfasser kommt zu dem richtigen Schluss, dass es zweierlei Arten dieser Reihen giebt, indem er diejenigen mehrdimensionalen Betrachtungen anstellt, welche wir im Sinne hatten, als wir in dem o. a. Referate einen berühmten Clifford'schen Lehrsatz citirten.

Nachdem der Verfasser die Existenz zweier Arten von Flächenreihen mit dem Index 3 bewiesen hat, setzt er, um dieselben zu erzeugen, zwei Methoden auseinander, welche leichte Verallgemeinerungen der Erzeugungsmethode für die ebenen und räumlichen kubischen Curven sind; in beiden Fällen findet er einige Eigenschaften der Einhüllungsfläche der Reihe.

La.

Lelieuvre. Sur les lignes de courbure et les lignes asymptotiques des surfaces. C. R. CVI. 183-186.

Aus dem Satze von Poincaré über die Differentialgleichung $F(y,y',x)=0$, wo F ein Polynom in y und y' ist (dass, wenn das Geschlecht der Relation 0 ist, die Integration auf eine Riccati'sche Gleichung, wenn 1, auf Quadraturen, wenn >1, auf

rein algebraische Operationen zurückkommt), werden Folgerungen auf die Berechnung der asymptotischen und Krümmungslinien gezogen, namentlich auf zwei Fragen: nach der Relation der Parameter α, β auf gegebener Fläche und nach der Fläche, wenn erstere gegeben ist. Sind x, y, z rational in β, so reduciren sich die Differentialgleichungen auf die Form

$$\beta'^2 + p_2(\alpha,\beta)\beta' + p_4(\alpha,\beta) = 0,$$

wo p_2 und p_4 vom zweiten und vierten Grade in β sind. Ist die Wurzel β' rational, so ergeben sich zwei Riccati'sche Gleichungen; andernfalls sind entweder zwei Wurzeln des Polynoms gleich, die zwei andern verschieden (das Geschlecht 0), oder vier Wurzeln verschieden (das Geschlecht 1); in beiden letztern Fällen muss die Grösse unter dem Wurzelzeichen, gleich Null gesetzt, das Integral sein. In der umgekehrten Frage sei β rational in x, y, z; hier ist es notwendig und hinreichend, dass die Rückkehrpunkte der untersuchten Linien und die Punkte der Berührung mit den Linien α = const. auf gewissen Linien α = const. verteilt sind. Hiervon werden zahlreiche Anwendungen gemacht. H.

A. Brambilla. Di una certa superficie algebrica razionale. Palermo Rend. II. 176-183.

Der Aufsatz enthält Erweiterungen und Berichtigungen früherer Arbeiten (Sopra una classe di superficie algebriche rappresentabili punto per punto sul piano. Palermo Rend. (2) XXI) über die Fläche, deren Gleichungen in der Form

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \Theta_1^n : \Theta_2^n : \Theta_3^n : \Theta_4^n$$

geschrieben werden können, wo

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = 0$$

ist. Der Verf. zeigt, dass auf jeder der drei n-fachen Geraden der Fläche sowohl $(n+2)$-fache, wie $(n+4)$-fache Punkte liegen, und bestimmt deren Zahl und Eigenschaften, vornehmlich in Bezug auf die Doppelcurven der Fläche. F.

W. Stahl. Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven. J. für Math. CIV. 38-61.

Bericht auf S. 713 dieses Bandes.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

M. Azzarelli. Trattato elementare dei cinque poliedri regolari. Rom. Acc. Pont. d. N. L. Mem. IV. 123-184.

Die Abhandlung, deren Titel noch den Zusatz trägt „redatto per uso dei suoi allievi del quarto anno di corso per la sezione fisico-matematica nell'istituto tecnico privato al palazzo Altemps", giebt nichts weiter als elementare Untersuchungen über die fünf Platonischen Körper in grösster Breite, ohne die Fragen nach den Poinsot'schen regelmässigen Sternpolyedern, den Archimedischen halbregelmässigen Körpern oder gar die Hess'schen Arbeiten über die Kugelteilung nur zu erwähnen. Lp.

O. Bermann. Bemerkungen zum Aufsatz IV. Hoppe Arch. (2) VI. 219-220.

Schneidet man ein Trieder durch eine Ebene, so steht der Schwerpunkt des Triederschnitts mit dem Mittelpunkt der Kugel, welche dem entstehenden Tetraeder umgeschrieben ist, in einer wechselweise eindeutigen Beziehung. Diese wird in Form gebracht. (Vgl. F. d. M. XIX. 1887. 802.) Schn.

H. Vollprecht. Untersuchungen an Flächen zweiten Grades. Pr. Gymn. Bautzen. 30 S. 4°.

Der Verfasser bestimmt zuerst die Relationen, welche unter den Coefficienten der allgemeinen Gleichung zweiten Grades nötig sind, damit sie zwei Ebenen darstelle, und welche weiter, damit diese Ebenen zusammenfallen, parallel oder rechtwink-

seien. Es folgen dann Untersuchungen über die verschiedenen Beziehungen, welche die von einem beliebigen Punkte ausgehenden Radienvectoren zu der Fläche haben können. Die beiden folgenden Paragraphen rühren von einem anderen Verfasser her, dem verstorbenen Dr. Friedrich, stehen daher nur in losem Zusammenhang mit dem Vorigen. Sie beziehen sich zumeist auf die Axen ebener Schnitte an centralen Flächen, speciell des Ellipsoids. R. M.

Fr. Hofmann. Eine einfache Ableitung der Bedingungen, welche die Coefficienten einer Rotationsfläche zweiten Grades erfüllen müssen. Hoppe Arch. (2) VII. 101-104.

Der Verfasser erklärt eine Rotationsfläche f durch die Eigenschaft, dass die Entfernung jedes ihrer Punkte von einer festen Ebene $lx+my+nz=0$ eine Function seiner Entfernung vom Anfangspunkt sein soll. Er erhält die Bedingungsgleichung:

$$(mx-ly)\frac{\partial f}{\partial x}+(lz-nx)\frac{\partial f}{\partial y}+(ny-mz)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Durch Anwendung dieser Gleichung auf die Fläche zweiten Grades resp. deren Asymptoten-Kegel bekommt er die gesuchten Relationen in Determinantenform und damit zugleich das Mittel, die Coordinaten l, m, n jener Ebene zu finden, auf der die Rotationsaxe senkrecht steht. R. M.

R. Fujisawa. On quadric. Tokio. Math. Ges. III. 146-152.

Herleitung einiger Eigenschaften der Flächen zweiten Grades. E.

I. Diesing. Ueber eine gewisse Cremona'sche Verwandtschaft vierter Ordnung und eine neue lineare Construction der Oberfläche zweiten Grades aus neun Punkten. Diss. Jena. 37 S. 8° mit 1 Taf.

A. KIEFER. Ueber die geraden Kegel und Cylinder, welche durch gegebene Punkte des Raumes gehen oder gegebene gerade Linien des Raumes berühren. Frauenfeld. 30 S. 4°.

J. GRIESS. Détermination des sections planes d'une quadrique. Journ. de Math. spéc. (3) II. 269-274.

G. KOENIGS. Contributions à la théorie du cercle dans l'espace. Toulouse Ann. II. F. 19 S.

Ein Kreis im Raume wird durch 10 Coordinaten bestimmt unter welchen fünf homogene Gleichungen zweiten Grades bestehen, deren gemeinschaftlicher Inhalt eine aus der linearen neunfachen ausgeschnittene sechsfache Mannigfaltigkeit fünfter Ordnung ist. Unter besonderer Benutzung der die linken Seiten jener fünf Gleichungen bildenden quadratischen Formen sowie einer sechsten quadratischen Form der Coordinaten werden verschiedene die Kreise im Raum betreffende Fragen gelöst (Bedingung für das Schneiden zweier Kreise, Bestimmung des Radius aus den Coordinaten, Involution zweier Kreise) und darnach die Eigenschaften linearer Systeme von Kreisen, besonders der fünffach unbestimmten (unter deren Coordinaten also nur eine lineare Relation besteht) behandelt. F.

PH. GILBERT. Détermination en grandeur et en direction, des axes d'une section diamétrale de l'ellipsoïde. Mathesis VIII. 247-249. Mn.

M. LAZARSKI. Ueber zwei Sätze von Steiner. Krak. Ber. XVIII. (Polnisch.)

Synthetischer Beweis der Steiner'schen Sätze:

1. Wenn in einer Ebene eine Ellipse der Grösse und Lage nach gegeben ist, und eine Glastafel in beliebiger veränderlicher

Lage auf der Ebene senkrecht steht, so ist der Ort des Auges, von dem aus die Ellipse als Kreis auf der Glastafel erscheint, eine Fläche vierten Grades. Sind a und b die Halbaxen der Ellipse, und wählt man die gegebene Ebene nebst den beiden auf ihr senkrecht stehenden und durch die Axen der Ellipse gehenden Ebenen zu Coordinaten-Ebenen, so ist die Gleichung der Fläche

$$a^2b^2z^2(a^2y^2+b^2x^2)-(a^4y^2+b^4x^2)(a^2y^2+b^2x^2) = -a^2b^2(a^4y^2+b^4x^2).$$

2. Wenn statt der Ellipse eine Hyperbel gegeben ist, so erhält man die Fläche

$$a^2b^2z^2(b^2x^2-a^2y^2)+(b^4x^2+a^4y^2)(b^2x^2-a^2y^2) = a^2b^2(b^4x^2+a^4y^2).$$

Der Verfasser giebt auch einen analogen Satz im Falle der Parabel und erhält die Fläche

$$p^2z^2 = -(y^2+p^2)(2px-y^2).$$ Dn.

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (3) VII. 332-335.

Lösung folgender Aufgabe: Von einem Trapez $ABCD$, das bei A und B rechtwinklig ist, kennt man die Seite $CD = l$, ferner den Flächeninhalt a^2 und das Volumen $\frac{\pi}{3}\cdot b^3$ des Rotationskörpers, welcher durch Umdrehung des Trapezes um CD entsteht. Man soll die Höhe AB und die Seiten AD, BC finden; dann soll man die gefundenen Formeln discutiren und das Minimum und Maximum von b^3 bestimmen, auch die besonderen Fälle $l = a$, und $l = 3a$ prüfen. Wenn $AB = x$, $AD = y$, $BC = z$, so sind die drei Gleichungen zu lösen:

$$x^2+(y-z)^2 = l^2,$$
$$x(y+z) = 2a^2,$$
$$x^2(y^2+yz+z^2) = l\,.\,b^3.$$

Dies wird dann durchgeführt. Mz.

Genty. Note de géométrie. Nouv. Ann. (3) VII. 436-438.

Es wird der Satz bewiesen: Das Product des Verteilungsparameters der Tangentenebenen eines Hyperboloides in Bezug

auf eine seiner Erzeugenden in das Quadrat der Entfernung des Centrums der Fläche von dieser Erzeugenden ist gleich dem Product der Halbaxen der Fläche. Die Erzeugende sei z-Axe; und das Centrum der Fläche sei auf der x-Axe; dann lautet die Gleichung der Fläche:

$$Ax^2+A'y^2+2Byz+2B''xy-2D(Ax+B''y) = 0.$$

Der Verteilungsparameter der Tangentenebenen in Bezug auf die z-Axe wird $\frac{AD}{B}$, und so kommt: $abc = \frac{AD^2}{B}$, also $abc = pD^2$.

Mz.

Roussel. Solution de la question proposée au concours général en 1883. Nouv. Ann. (3) VII. 344-347.

Es wird bewiesen, dass von einem Punkte P, der auf der in A construirten Normale eines durch A gehenden elliptischen Paraboloides beliebig angenommen ist, vier weitere Normalen an die Fläche gelegt werden können; die Fusspunkte derselben seien B, C, D, E. Darauf wird die Gleichung der Umkugel dieser Punkte aufgestellt. Wenn

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q} = 2x$$

die Gleichung des elliptischen Paraboloides ist, ferner α, β, γ die Coordinaten von P und x_0, y_0, z_0 diejenigen von A sind, so ist die Gleichung dieser Kugel:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{yy_0(p+q+2\lambda_0)}{2p}-\frac{zz_0(p+q+2\lambda_0)}{2q}$$
$$-x(p+q+x_0)-(p+\lambda_0)(q+\lambda_0) = 0,$$

wo λ_0 aus einer der drei Gleichungen:

$$x_0 = \alpha+\lambda_0, \quad y_0 = \frac{p\beta}{p+\lambda_0}, \quad z_0 = \frac{q\gamma}{q+\lambda_0}$$

hervorgeht. Darauf wird der Ort der Centra J aller solcher Kugeln S gefunden, die durch Verschiebung des Punktes P auf der Normale PA hervorgehen, sowie die Fläche, welche hierbei von der Geraden PJ erzeugt wird. Jener Ort ist eine Gerade und die Fläche ist ein hyperbolisches Paraboloid. Mz.

JAGGI. Solution de la question proposée au concours d'agrégation en 1884. Nouv. Ann. (3) VII. 341-344.

Es sind eine Ellipse und eine Hyperbel gegeben; erstere in der xz-Ebene, letztere in der yz-Ebene mit den Gleichungen:

$$b^2x^2+a^2(z-z_0)^2 = a^2b^2,\ y = 0\quad \text{(Ellipse)},$$
$$d^2y^2-c^2(z+z_0)^2 = c^2d^2,\ x = 0\quad \text{(Hyperbel)}.$$

Man betrachtet sämtliche Ebenen, die beide Curven zugleich berühren, und beweist, dass unendlich viele Flächen S vom zweiten Grade existiren, von welchen jede alle diese Ebenen zu Tangentenebenen hat. Der Ort der Centra aller dieser Flächen S ist die z-Axe. Es wird angegeben, wie die Art der Fläche von der Lage des Centrums auf der z-Axe abhängt. Endlich werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, dass die Flächen S homofocal sind. Hierbei ergiebt sich $c^2 = a^2$, $d^2 = b^2-a^2$, $z_0 = 0$. Es ist also auch notwendig, vorauszusetzen, dass $a^2 < b^2$ ist. Mz.

MORET-BLANC. Solution. Nouv. Ann. (3) VII. 335-341.

Von einem gegebenen Punkte P zieht man die sechs Normalen an ein gegebenes Ellipsoid. Die Fusspunkte dieser sechs Normalen haben die Eigenschaft, dass unendlich viele Flächen zweiten Grades, die mit dem Ellipsoid concentrisch sind, durch sie gehen. Sollen diese Flächen Rotationsflächen sein, so muss P einem gewissen Kegel vierten Grades angehören, dessen Scheitel das Centrum des Ellipsoides ist. Die Axen dieser Rotationsflächen liegen auf einem Kegel zweiten Grades. Zuletzt werden diese Rotationsflächen auf ihre besondere Art untersucht. Mz.

E. MALO. Solution géométrique de la question proposée au concours général de 1885. Nouv. Ann. (3) VII. 317-325.

Durch das Centrum einer Fläche zweiten Grades zieht man zwei zu einander senkrechte Halbmesser OM und ON; dann liegen alle Geraden MN, die durch einen festen Punkt J gehen, auf

einem Kegel zweiten Grades; es werden die Bedingungen gefunden, unter denen dieser Kegel ein Umdrehungskegel ist. Hierauf wird gezeigt, dass alle Geraden *MN* einer und derselben Ebene *Π* einen Kegelschnitt berühren; endlich wird die Ebene *Π* so bestimmt, dass dieser Kegelschnitt ein Kreis ist. Mz.

Marchand. Solution de la question proposée au concours général de 1885. Nouv. Ann. (3) VII. 8-14.

Diese Arbeit behandelt dieselben Sätze wie die eben besprochene Arbeit. Es werden aber hier die Principien der Liniengeometrie angewandt, wonach eine Linie durch sechs homogene Coordinaten, die einer homogenen Gleichung zweiten Grades genügen, definirt wird, während in jener Arbeit die gewöhnliche Coordinatenmethode gebraucht ist. Mz.

Marchand. Solution de la question proposée au concours général de 1886. Nouv. Ann. (3) VII. 14-25.

Hioux. Concours général de 1886. Journ. de Math. spéc. (3) II. 228-234.

Ausserhalb einer Fläche *S* vom zweiten Grade seien zwei Punkte *A* und *B* gegeben; durch *B* ziehe man eine Secante, welche *S* in *C* und *C'*, ferner die Polarebene des Punktes *A* in Bezug auf *S* in *D* trifft.

Dann seien *M* und *M'* die Punkte, in welchen die Gerade *AD* resp. die Tangentenebenen an *S* in *C* und *C'* schneidet. Wenn sich nun die Secante *BD* um *B* dreht, so wird nach dem Orte gefragt, den dabei die Punkte *M* und *M'* beschreiben. Dieser Ort setzt sich aus zwei Flächen zweiten Grades zusammen, von denen die eine unabhängig von der Lage des Punktes *B* im Raume ist, die zweite *Σ* dagegen von der Lage des Punktes *B* abhängt.

Dann wird untersucht, was aus der Fläche *Σ* wird, wenn in der Construction, die ihre Punkte ergiebt, *A* und *B* ihre Rollen vertauschen.

Es sei endlich A ein fester Punkt; dann sollen die Lagen des Punktes B gefunden werden, falls die Fläche Σ nicht mehr nur einen Mittelpunkt in endlicher Entfernung besitzt.

Mz.

LEVAVASSEUR. Concours d'agrégation de 1888. Mathématiques spéciales. Journ. de Math. spéc. (3) II. 222-228.

Die Aufgabe, deren Lösung gegeben wird, ist die folgende: Gegeben sind ein Ellipsoid S und zwei Punkte P, P'; man betrachte die Ellipsen C und C', nach denen S von den Polarebenen der Punkte P und P' geschnitten wird. 1) C und C' liegen mit P und P' auf einer Fläche zweiter Ordnung Σ, die im allgemeinen eine einzige, bestimmte ist. 2) Diese Fläche zu untersuchen, wenn P' sich im Raume bewegt, P und S aber fest bleiben. 3) P und P' werden fest angenommen und so gelegen, dass Σ unbestimmt ist; den Ort des Mittelpunktes von Σ anzugeben. 4) P und P' bewegen sich so, dass Σ eine Kugel ist; die Oberfläche E zu finden, welche die Enveloppe von Σ ist. 5) Kann man einen Punkt A bestimmen, sodass die Transformirte von E in Bezug auf A als Pol nach der Verwandlung durch reciproke Radien ein Kegel zweiter Ordnung ist?

Lp.

G. B. MATHEWS, W. J. C. SHARPE. Solution of question 8592. Ed. Times XLIX. 132-133.

Durch einen Punkt P legt man drei Ebenen, je eine parallel zu den Gegenseitenpaaren eines Tetraeders. Die zwölf Schnittpunkte derselben mit den Kanten des Tetraeders liegen auf einer und derselben Fläche zweiter Ordnung. Ist jede Kante des Tetraeders senkrecht auf ihrer Gegenkante, so giebt es eine Lage für P, in welcher jene Oberfläche zu einer Kugel wird.

Lp.

G. B. MATHEWS. Geometry on a quadric surface. Mess. (2) XVII. 151-152.

Die Fläche zweiter Ordnung wird durch Strahlen aus einem

festen Punkte *P* in ihr auf eine Ebene projicirt, welche parallel zur Tangentialebene in *P* ist (sowie bei der stereographischen Projection). Der Verfasser wählt einen der Nabelpunkte als Punkt *P* und zeigt, dass jedem Lehrsatze in der Geometrie der Geraden und des Kreises ein Theorem in der Geometrie der Kegelschnitte auf der Oberfläche zweiter Ordnung entspricht. Es seien z. B. *A*, *B* zwei beliebige feste Punkte der Fläche, *U* ein Nabelpunkt. Man zeichne auf der Fläche zwei Kegelschnitte, welche bezw. durch *U*, *A* und *U*, *B* gehen und sich in *U* unter einem gegebenen Winkel schneiden; dann ist der Ort ihres Schnittpunktes ein Kegelschnitt, welcher durch *A* und *B* geht.

Glr. (Lp.)

O. Zucca. Applicazione del metodo delle coordinate curvilinee allo studio dell' iperboloide ad una falda. Genova. 26 S. autografato.

G. Kober. Die harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades. Halle. 73 S. 8°.

F. Spencker. Ueber die ersten negativen Fusspunktflächen der Flächen zweiter Ordnung. Diss. Rostock. 56 S. 8°.

A. G. Greenhill. Confocal paraboloids. Lond. M. S. Proc. XIX. 129-142.

Das System der Paraboloide, von welchen die Brennpunkte der zwei Hauptschnitte zwei feste Punkte sind, während der Scheitel die ganze Axe durchläuft, teilt sich in zwei Scharen elliptischer und eine Schar hyperbolischer Paraboloide, welche sich rechwinklig in ihren Krümmungslinien schneiden. Die Scheitel der ersteren liegen ausserhalb der Brennpunkte, die der letztern zwischen ihnen. Dies System geht als specielles aus dem confocalen System von Flächen vierten Grades hervor,

welches in Maxwell's Electricity in Anwendung kommt. Unabhängig davon werden zuerst dessen Gleichungen

$$x = a(\cosh\alpha + \cos\beta - \cosh\gamma),$$
$$y = \tfrac{1}{2}a\cosh\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sinh\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$z = \tfrac{1}{2}a\sinh\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cosh\tfrac{1}{2}\gamma,$$

wo $\cosh\alpha = \cos i\alpha$, $\sinh\alpha = \frac{1}{i}\sin i\alpha$, in den drei Parametern α, β, γ dargestellt, hergeleitet, dann wird es auf Maxwell's Theorie, auf Laplace's Gleichung, ferner auf Beispiele der Elektrostatik und auf Flüssigkeitsströme angewandt. H.

G. Humbert. Sur quelques propriétés des aires sphériques. C. R. CVI. 477-479, Journ. de Math. (4) IV. 313-345.

Der Verfasser nimmt Bezug auf seine Note im C. R. vom 24. October 1887 (F. d. M. XIX. 1887. 778), wo er für die Differenz der zwei von einem Kegel aus einer Kugelfläche ausgeschnittenen Stücke einen Ausdruck $2\varrho Rd$ gegeben und die Begriffe „Modul" des Kegels und „Orientationsebene" eingeführt hat. Letztere ist (wie Darboux hinzugefügt hat) die Ebene durch die Spitze des Kegels normal zur Verbindung der Schwerpunkte der beiden vom Kegel aus einer concentrischen Kugel vom Radius 1 ausgeschnittenen Flächenstücke, der Modul das Product der Entfernung der Schwerpunkte mit dem konischen Winkel. Hiervon werden teils speciellere Anwendungen, teils Erweiterungen gemacht. Ein rechtwinkliges Trieder, dessen Spitze auf einer Kugel vom Radius R liegt, und dessen Axe durch ihren Mittelpunkt geht, begrenzt auf der Kugel ein Flächenstück $= \pi R^2\sqrt{3}$. Sind alle Seitenwinkel $= 60^\circ$, so ist jenes Stück $\frac{1}{6}$ der Oberfläche. Auf den Schnitt einer Fläche zweiten Grades und einer Kugel, wenn er aus zwei geschlossenen Curven besteht, lässt sich Anwendung machen, indem durch dieselbe Curve auch Kegel gehen, deren einer seine Spitze innerhalb der Kugel hat. Zur Axe des Kegels steht eine der Hauptebenen der Curve, H, normal. Die Differenz der Flächenstücke ist $= 2\varrho Rd$, wo ϱ der Modul bezüglich auf die Ebene H und d

die Entfernung des Mittelpunkts von *H* ist. Ist die schneidende Fläche ein Rotationsparaboloid, *p* der Parameter des Meridians, so ist jene Differenz $= 4\pi Rp$, wo immer das Paraboloid liegen mag. Dasselbe gilt von einem elliptischen Paraboloid, wenn die Ebene *H* normal zu dessen Axe ist. Auch konische und beliebige Regelflächen haben dieselbe Eigenschaft wie der Kegel, nur ist statt der Differenz die algebraische Summe zu setzen.

In der ausführlicheren Darstellung (des Journ. de Math.) werden die Orientationsebene und der Modul

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0 \text{ und } \varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

bestimmt durch die Werte

$$\lambda = \int \frac{y\,dz - z\,dy}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mu = \int \frac{z\,dx - x\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \nu = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

zu integriren auf beliebiger Linie um den Kegel herum; *d* ist der Abstand des Kugelmittelpunkts von der Orientationsebene. Berechnet werden zuerst die unendlich kleinen Incremente der Flächenstücke, deren Integration leicht daraus hervorgeht; überdies wird statt des Kegels eine Pyramide betrachtet und deren Seitenzahl unendlich gesetzt. H.

G. Pflaumbaum. Bestimmung der scheinbaren Grösse eines elliptischen Paraboloids für einen beliebigen Punkt des Raumes unter Berücksichtigung der wesentlichen Specialfälle. Diss. Halle. 38 S. 8°.

Pellet. Sur les surfaces réglées applicables sur une surface de révolution. C. R. CVI. 654.

Die Strictionslinien der auf einem Rotationshyperboloid geradlinig abwickelbaren Regelflächen sind Bertrand'sche Curven, d. h. sie haben die Eigenschaft, dass ihre Hauptnormalen zugleich Hauptnormalen einer zweiten (der conjugirten) Curve sind. A.

Ch. Bioche. Sur certaines surfaces réglées, à propos d'une note de M. Pellet. C. R. CVI. 829-830.

Eine kurze Bemerkung über diejenigen geradlinigen Flächen, welche sich mit Erhaltung der Geraden auf ein Rotationshyperboloid aufwickeln lassen. Ihre Strictionslinie ist eine Bertrand'sche Curve. Die Fläche ist vollständig bestimmt, wenn die betreffende Strictionslinie gegeben ist; ihre Erzeugenden sind den entsprechenden Binormalen der zur Strictionslinie conjugirten Bertrand'schen Curve parallel. A.

Ch. Bioche. Sur les lignes de courbure de certaines surfaces gauches. S. M. F. Bull. XVI. 119-124.

Als Umkehrung eines bekannten Satzes beweist der Herr Verfasser den Satz: Die einzigen Flächen, deren Krümmungslinien die Erzeugenden in gleiche oder allgemeiner in homographische Abschnitte teilen, sind diejenigen, deren Strictionslinie zugleich Krümmungslinie ist, und bei denen der Verteilungsparameter der Tangentialebenen constant ist, wie bei den Umdrehungshyperboloiden. Hieran knüpfen sich noch einige weitere Betrachtungen. Ein zweiter Abschnitt der Arbeit führt zu dem Resultat: Jede geradlinige Fläche, welche nicht eine Binormalfläche oder ein Konoid ist, lässt sich auf eine und nur auf eine Art abwickeln auf eine geradlinige Fläche, deren Strictionslinie eine Krümmungslinie ist. A.

G. Herting. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen dritter Ordnung und ihrer parabolischen Curven. (Zweiter Teil.) Pr. Studienanst. St. Anna Augsburg. 42 S. 8° u. 3 Taf. fol., Diss. München. 108 S. 8°.

Die Abhandlung ist eine Fortsetzung der vorjährigen Programmabhandlung mit wesentlich gleichem Titel (Ref. F. d. M. XIX. 1887. 644), während die ganze Arbeit als Dissertation in München erschienen ist. Der vorliegende Teil behandelt sehr eingehend die parabolischen Linien, d. h. Orte der

Punkte, deren Krümmung Null ist, auf Flächen dritter Ordnung. Diese Linien sind, wie der Herr Verfasser angiebt, schon früher von Herrn G. Bauer Münch. Ber. 1883, 320-23 untersucht worden.

A.

F. Klein. Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique. Journ. de Math. (4) IV. 169-176.

In einem an Herrn C. Jordan gerichteten Briefe setzt Herr F. Klein seine Gedanken über die im Titel angegebene Aufgabe auseinander, wie er dies mündlich schon in einer Sitzung der Société mathématique de France am 13. April 1887 gethan hatte. Da die Gleichung der 27 Geraden einer kubischen Oberfläche und die Dreiteilung der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung dieselbe Gruppe besitzen, so handelt es sich darum, falls dies angeht, die erste Aufgabe auf die zweite zurückzuführen. Zu diesem Zwecke führt der Verfasser zunächst die Gedankenreihe vor, durch die er früher der Auflösung der Gleichungen fünften Grades näher getreten war, und skizzirt dann die Schlussfolgerungen, deren er sich bei der Auflösung der vorgelegten Aufgabe bedient hat, und bei denen er sich mit Erfolg auf die Vorarbeiten seiner Zuhörer, der Herren Witting und Maschke, stützt. Da der Brief nur einen Auszug aus den Arbeiten des Verfassers giebt, so ist eine Wiedergabe seines Inhalts kaum anders möglich als durch wörtlichen Abdruck. Lp.

Richmond. A symmetrical system of equations of the lines on a cubic surface, which has a conical point Quart. J. XXIII. 170-179.

Auf einer Fläche dritter Ordnung mit einem Knotenpunkt liegen sechs Gerade, welche durch den Knotenpunkt gehen und mit A, B, C, D, E, F bezeichnet werden, und ausserdem 15 andere, von welchen jede zwei der ersten trifft. Die letzteren werden mit AB etc. bezeichnet.

Projicirt man von dem Knotenpunkt diese 15 Geraden auf eine Ebene, so erhält man die Verbindungslinien je zweier Punkte eines Pascal'schen Sechseckes. Es kommt dem Herrn Verfasser nun darauf an, durch die Geometrie auf der Fläche dritter Ordnung die Beziehungen zwischen den 60 Pascal'schen Geraden, den 10 Paaren Steiner'scher Punkte, den 60 Kirkman'schen Punkten und den 20 Salmon'schen Geraden zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke wird die Gleichung der Fläche in folgende Form gebracht:

$$\alpha\beta\gamma = \delta\varepsilon\zeta.$$

Hierbei sind α, β, ... lineare Functionen der Coordinaten, zwischen welchen die Gleichungen bestehen:

$$\alpha+\beta+\gamma = \delta+\varepsilon+\zeta,$$
$$a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta+e\varepsilon+f\zeta = 0.$$

$a, b, \dots, f$ sind Constanten, zwischen welchen die Relationen stattfinden:

$$abc+def = 0, \quad a+b+c+d+e+f = 0.$$

Der Knotenpunkt ist dann gegeben durch:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \zeta.$$

Durch Einführung der Symbole:

$$(\beta\gamma) \text{ für } \alpha, \quad (\alpha\gamma) \text{ für } \beta, \quad (\alpha\beta) \text{ für } \gamma,$$
$$(\varepsilon\zeta) \text{ für } \delta, \quad (\delta\zeta) \text{ für } \varepsilon, \quad (\varepsilon\delta) \text{ für } \zeta,$$
$$(\alpha\delta) \text{ für } \frac{a\alpha+d\delta}{a+d} \text{ etc.}$$

und bei den Constanten (bc) für a, etc. ... gelingt es, die Relationen zwischen den Ebenen und den Constanten in einfache symmetrische Formen zu bringen, in welchen die Symbole $\alpha, \beta, \dots, \zeta$ sowie $a, b, \dots, f$ in analoger Weise beliebig vertauscht werden dürfen. Die Gleichungen der 15 Geraden werden dann: AB, $(\alpha\varepsilon) = (\beta\zeta) = (\gamma\delta)$ etc.

Die gewünschten Beziehungen zwischen den merkwürdigen Punkten und Linien der ebenen Figur ergeben sich daraus in sehr einfacher Form. W. St.

Fr. Schiffner. Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung, welche von Kreisen erzeugt wird, die durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen. Hoppe Arch. (2) VII. 104-109.

Durch jeden Punkt der fraglichen Fläche gehen drei Kreise und ein Kegelschnitt; die Fläche enthält auch vier Gerade als Axen von Ebenenbüscheln, welche eben jene Scharen von Kreisen resp. Kegelschnitten ausschneiden. Längs jedes erzeugenden Kreises wird die Fläche durch eine Kugel berührt. Die beiden gegebenen Punkte sind biplanare Doppelpunkte; für sie als Inversionscentren verwandelt sich die Fläche in Kegel zweiten Grades, für den Anfangspunkt als Centrum geht sie in sich selbst über. R. M.

A. de Saint-Germain. Sur une surface du troisième ordre qui admet une ligne ombilicale parabolique. Darboux Bull. (2) XII. 177-180.

Die Untersuchung, um welche es sich handelt, bildete eine Prüfungsaufgabe. Es soll eine Fläche dritter Ordnung bestimmt und untersucht werden, welche bei rechtwinkligen Coordinaten die Parabel $z = 0$, $y^2-2mx = 0$ zur Nabellinie hat, und welche überdies symmetrisch zur xy-Ebene ist. Als Form der Gleichung ergiebt sich

$$mz^2+(2x+m)(y^2-2mx) = 0;$$

sie schneidet also die xy-Ebene, ausser in der Parabel, noch in deren Directrix. Die Geraden und die asymptotischen Linien lassen sich leicht bestimmen, schwieriger die Krümmungslinien. A.

Un Abonné. Solution d'une question. Nouv. Ann. (3) VII. 295-302.

In dieser Arbeit handelt es sich um Normalen eines Cylindroids, d. i. einer Fläche, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten lautet:

$$(x^2+y^2)z-m(x^2-y^2) = 0.$$

Ist der Punkt P mit den Coordinaten α, β, γ ein Punkt dieser Fläche, so hat die Normale der Fläche in P die Gleichungen:

$$\frac{x-\alpha}{\alpha\gamma-m\alpha}=\frac{y-\beta}{\beta\gamma+m\beta}=\frac{z-\gamma}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Soll diese Normale durch den Punkt M mit den Coordinaten x', y', z' gehen, so hat man zur Bestimmung von α, β, γ die Gleichungen:

$$\frac{x'-\alpha}{\alpha\gamma-m\alpha}=\frac{y'-\beta}{\beta\gamma+m\beta}=\frac{z'-\gamma}{\alpha^2+\beta^2},\ (\alpha^2+\beta^2)\gamma-m(\alpha^2-\beta^2)=0.$$

Es wird nun die folgende Gleichung vierten Grades für $\mu=\frac{\beta}{\alpha}$ hergeleitet:

$$\text{(I)}\qquad x'y'\mu^4+[x'^2-y'^2+2m(z'+m)]\mu^3 + [x'^2-y'^2+2m(z'-m)]\mu-x'y'=0,$$

ebenso die Gleichung vierten Grades für γ. Diese ergiebt sich aus (I) durch die Substitution:

$$\gamma=m\left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right).$$

Endlich werden noch einige specielle Fälle in Betracht gezogen, bei denen die Lage des Punktes M etwas eingeschränkt wird, dafür aber die zu lösenden Gleichungen sich vereinfachen.

Mz.

J. Winzer. Analytische Entwickelung der Raumcurve dritter Ordnung aus ihren drei reellen Brennstrahlen und weitere Behandlung einer speciellen Raumcurve dritter Ordnung. Diss. Leipzig. 62 S. 8°.

Fr. Deruyts. Génération d'une surface du troisième ordre. Liège Mém. (2) XIV. 12 S. Mn.

D. Andere specielle Raumgebilde.

Juhel-Rénoy. Sur la section d'une surface par un plan bitangent. Nouv. Ann. (3) VII. 282-287.

1) Wenn eine Fläche vierter Ordnung S symmetrisch in Bezug auf drei auf einander senkrechte Ebenen ist und einen doppelten Asymptotenkegel besitzt (also die unendlich entfernte Ebene in einem Doppelkegelschnitt schneidet), so wird sie von jeder doppeltberührenden Ebene in zwei Kegelschnitten geschnitten.

2) Jede Fläche zweiter Ordnung, welche die Fläche S zweimal berührt und denselben Asymptotenkegel besitzt, schneidet die Fläche S in zwei Kegelschnitten.

Im besondern kann S eine Umdrehungsfläche sein, deren Meridiancurve die unendlich entfernten Kreispunkte als Doppelpunkte enthält; dann werden diese Kegelschnitte Kreise. So wird z. B. der Torus von jeder doppelt berührenden Ebene oder Kugel in zwei Kreisen geschnitten.

Für den Fall einer Rotationsfläche S können die Tangenten in einem Doppelpunkte der Durchschnittscurve von S mit einer doppelt berührenden Ebene geometrisch einfach construirt werden.

A.

F. Rudio. Ueber eine specielle Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. J. für Math. CIV. 85-88.

Der Herr Verfasser hat in einer Abhandlung J. f. Math. XCV. 240-246 (F. d. M. XV. 1883. 625) diejenigen Flächen untersucht, deren Krümmungsmittelpunktsflächen zwei confocale Flächen zweiten Grades sind, und namentlich gezeigt, wie mit Hülfe derselben auf elementare Weise die Jacobi'sche Integration der Differentialgleichungen der geodätischen Linien auf Flächen zweiten Grades gewonnen werden kann.

In der vorliegenden Note zeigt er nun weiter, dass die dort erhaltenen Resultate vollständig ausreichen zur Untersuchung der Mittelpunktsflächen derjenigen Strahlensysteme vierter Ord-

nung und vierter Klasse, deren Brennflächen zwei confocale Flächen zweiten Grades sind. Die Betrachtung ist sehr einfach und führt zu anschaulichen geometrischen Constructionen.

A.

G. Bauer. Ueber Flächen vierter Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an zwei Tetraeder knüpft. München. Ber. 337-354.

Projicirt man von einem Punkte P aus vier Punkte A (1,2,3,4) auf vier Ebenen (I', II', III', IV'), so liegen die vier Projectionen a_1, a_2, a_3, a_4 im allgemeinen nicht in einer Ebene; die Bedingung, dass sie in einer Ebene liegen, ergiebt als geometrischen Ort des Punktes P eine Fläche vierter Ordnung, welche im allgemeinen vier Knotenpunkte C besitzt, nämlich die Eckpunkte des durch die vier Ebenen 1′, 2′, 3′, 4′ gebildeten C-Tetraeders und 10 Gerade, nämlich die sechs Kanten des C-Tetraeders und die vier Geraden (g) II', $IIII'$ u. s. w., in denen sich die entsprechenden Ebenen des A- und des C-Tetraeders durchschneiden.

Nimmt man das C-Tetraeder zum Coordinatentetraeder, und sind α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Coordinaten des ersten Eckpunktes des A-Tetraeders, ebenso β_i, γ_i, δ_i die der drei anderen Eckpunkte, x_i die des Punktes P, und schreibt man für $\lambda_k x_i - \lambda_i x_k$ kürzer $(\lambda_k x_i)$, so ist die Gleichung dieser Fläche

$$F \equiv \begin{vmatrix} 0 & (\alpha_2 x_1) & (\alpha_3 x_1) & (\alpha_4 x_1) \\ (\beta_1 x_2) & 0 & (\beta_3 x_2) & (\beta_4 x_2) \\ (\gamma_1 x_3) & (\gamma_2 x_3) & 0 & (\gamma_4 x_3) \\ (\delta_1 x_4) & (\delta_2 x_4) & (\delta_3 x_4) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die vier Geraden g schneiden sich im allgemeinen nicht; sobald sich aber zwei entsprechende Kanten der beiden Tetraeder A und C schneiden, schneiden sich auch zwei der Geraden g in demselben Punkte, und dieser wird ein neuer Knotenpunkt der Fläche. Die Bedingung dafür, dass ($III\,IV$) und ($III'\,IV'$) sich schneiden, ist $(\alpha_3 \beta_4) = 0$. Es können sechs verschiedene Bedingungsgleichungen dieser Art a) aufgestellt werden. Sind fünf derselben erfüllt, so ist es auch die sechste. Dieser Fall ist be-

sonders interessant. Die Fläche hat alsdann 10 Gerade und 10 Knoten; die vier Geraden g liegen in einer Ebene, und die beiden Tetraeder sind perspectivisch. Die Fläche selbst ist dann die Hesse'sche Fläche einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung. In diesem Falle wird, wie der Verfasser zeigt, die Gleichung der Fläche nicht geändert, wenn man alle Coordinaten $\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i x_i$ durch ihre reciproken Werte ersetzt.

Es giebt aber noch eine andere, von der eben betrachteten wesentlich verschiedene Lage der beiden Tetraeder, so dass entsprechende Kanten sich schneiden, nämlich so dass die Kante $(III\,IV)$, d. h. (1, 2) die Kanten $(I'\,II')$ schneidet, u. s. w. Dies führt auf die Bedingungen $(\alpha_1 \beta_2) = 0$ und die analogen, und die sechs möglichen Bedingungsgleichungen dieser Art *b*) sind von einander unabhängig. Das Auftreten einer solchen Bedingungsgleichung hat zur Folge, dass eine Kante des A-Tetraeders in die Fläche fällt; sind also alle sechs Bedingungen *b*) erfüllt, so hat die Fläche acht Knoten und 16 Gerade.

Es lassen sich nun auch solche Flächen bestimmen, bei welchen einzelne Kantenpaare den Bedingungen *a*) entsprechen, andere den Bedingungen *b*). So kommt man auf eine Reihe von Specialisirungen, welche hier nicht alle näher besprochen werden können. Ein Fall aber ist besonders merkwürdig, nämlich wenn jede Kante des einen Tetraeders zwei Gegenkanten des anderen schneidet, und umgekehrt. Alsdann sind sowohl die sechs Bedingungen *a*), als auch die sechs Bedingungen *b*) erfüllt. Die gegenseitige Lage der Tetraeder wird dann die „desmische“ genannt. Um zwei derartige Tetraeder zu erhalten, kann man das eine willkürlich wählen, und ebenso einen Eckpunkt des anderen, dann ist das letztere vollständig bestimmt. Die Fläche F erhält dann 14 Knotenpunkte und 16 Gerade.. Die beiden Tetraeder können hierbei ihre Rollen vertauschen, ohne dass die Fläche sich ändert, und die Fläche ist gleichzeitig Hesse'sche Fläche für zwei verschiedene Flächen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten. Liegen die beiden Tetraeder in desmischer Lage, so liegen sie in vierfacher Weise perspectivisch, und die vier Centren bilden ein drittes Tetraeder (B), welches zu jedem der Tetraeder

(A) und (C) dieselbe Beziehung besitzt, wie diese zu einander. Den vier perspectivischen Beziehungen zwischen A und B entsprechen vier verschiedene Flächen F, die auch sonst noch in bemerkenswertem Zusammenhange stehen. A.

G. Koenigs. Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux coniques tracées sur une surface de Steiner est une autre surface de Steiner. S. M. F. Bull. XVI. 15-18.

Der geometrische Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte, welche auf einer Steiner'schen Fläche liegen, ist eine andere Steiner'sche Fläche. Dieser Satz wird in sehr eleganter Weise analytisch bewiesen. A.

G. Koenigs. Un théorème concernant la surface de Steiner et l'ensemble de trois coniques qui se coupent dans l'espace. Darboux Bull. (2) XII. 28-32.

Unter den verschiedenen Formen der Gleichungen, durch welche die Steiner'sche Fläche dargestellt wird, sind folgende bemerkenswert.

Sind die vier Coordinatenebenen die vier längs eines Kegelschnittes berührenden, so ist die Gleichung der Fläche:

$$\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}+\sqrt{dt}=0.$$

Ist die Ebene $t=0$ eine längs eines Kegelschnitts berührende, während die Durchschnitte der drei anderen Coordinatenebenen drei Doppelgeraden der Fläche sind, so wird die Gleichung

$$xyzt+(Ayz+Bzx+Cxy)^2=0.$$

Auf jede Art erkennt man, dass die Steiner'sche Fläche durch 15 Bedingungen bestimmt ist.

Den Schluss bildet folgender Satz:

Durch drei Kegelschnitte, von denen sich je zwei in einem Punkte schneiden, lassen sich stets zwei und nur zwei Steiner'sche Flächen legen. Die betreffenden Gleichungen werden vollständig aufgestellt. A.

W. Schjerning. Ueber die Scharen von Flächen vierter Ordnung mit sechzehn singulären Punkten, welche durch eine Lemniskate gehen. Hoppe Arch. (2) VII. 113-142.

Herr Kummer hat (Berl. Ber. 1864) den Satz bewiesen: Durch jede gegebene Curve vierten Grades kann man sechs verschiedene vierfach unendliche Scharen von Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten legen. Die Gleichungen dieser Flächen sind ebenfalls von Herrn Kummer aufgestellt.

Der Herr Verfasser wendet diese Betrachtungen auf den speciellen Fall an, wo die gegebene Curve eine Lemniskate ist, wobei sich ergiebt, dass zunächst von den sechs Flächenscharen je zwei paarweise zusammenfallen, und dass bei einer der drei vorhandenen Scharen ein Teil der Coefficienten unendlich wird, während die beiden übrigen Scharen auch zusammenfallen, so dass man es also schliesslich nur mit einer Schar zu thun hat. Es werden nun die Singularitäten dieser Flächen und ihre sonstigen Eigenschaften einer sehr eingehenden Untersuchung unterworfen. A.

Mlle. Bortniker. Sur la théorie des cyclides. C. R. CVI. 824-829.

Die Verfasserin versteht unter dem Namen „mittlere Distanz" eines Punktes M von einer Kugel S die Potenz des Punktes dividirt durch den Radius, unter „Distanz" eines Punktes M von einem Kreise den Ausdruck $MA.MB:R$ (A und B sind der an M nächste und der davon entferntere Kreispunkt, R der Radius).

Ist M Träger einer Masse, und multiplicirt man mit dieser die beiden definirten Distanzen, so erhält man die „Momente" des Massenpunktes M in Bezug auf Kugel und Kreis.

Es gelten nun die Sätze:

1) Die Summe der Quadrate der mittleren Distanzen eines Punktes M von drei Kugeln ist gleich dem Product der Quadrate der Distanzen desselben Punktes von den beiden Durchschnittspunkten der drei Kugeln, dividirt durch das Quadrat der Hälfte ihrer gemeinschaftlichen Sehne.

2) Das Quadrat der Distanz eines Punktes von einem Kreise ist gleich der Summe der Quadrate seiner mittleren Distanzen von zwei Kugeln, welche sich längs dieses Kreises orthogonal durchschneiden.

Es wird nun noch die Veränderung in Betracht gezogen, welche das Moment von M in Bezug auf eine Kugel erleidet, wenn diese letztere sich ändert, indem sie immer durch einen festen Kreis geht.

Nach diesen Vorbereitungen behandelt die Verfasserin die folgende Aufgabe:

Es ist ein System von Massenpunkten gegeben. Man soll die Enveloppe der Kugeln suchen, für welche das Moment des Systemes, d. h. die Summe aller einzelnen Momente, constant ist, und welche eine gegebene Kugel orthogonal schneiden.

Die gesuchte Fläche ist eine Cyklide. Die weitere Untersuchung beschäftigt sich mit der Frage, wie die Massenpunkte verteilt sein müssen, damit die Cyklide gewisse specielle Formen annehme, z. B. eine Symmetrie-Ebene besitze. A.

G. Humbert. Sur les lignes de courbure des cyclides. C. R. CVI. 257-259.

In seinem Werke: „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques“ hat Herr Darboux gezeigt, dass man die Krümmungslinien jeder Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt finden kann, wenn man als absolute Fläche nach der Ausdrucksweise des Herrn Cayley (Ordnungsfläche) eine beliebige der Fläche eingeschriebene Fläche zweiter Ordnung nimmt. (Der Name Krümmungslinie ist offenbar hier im erweiterten Sinne gebraucht, ebenso wie unter der Normale diejenige Linie verstanden ist, deren Richtung zur Tangentialebene in Bezug auf die absolute Fläche conjugirt ist. Anm. d. Ref.) Der Herr Verfasser beweist nun den merkwürdigen Satz, dass diese Krümmungslinien dieselben bleiben, welche der eingeschriebenen Flächen zweiter Ordnung man auch als Ordnungsfläche nehmen mag. A.

G. Fouret. Sur les pôles principaux d'inversion de la cyclide de Dupin. Nouv. Ann. (3) VII. 113-116.

In einer Arbeit des Herrn Hadamard (Darboux Bull. (2) XII, Ref. S. 620 dieses Bandes) ist nachgewiesen, dass der einzige geometrische Ort von Inversionspolen, in Bezug auf welche eine Fläche anallagmatisch sein kann, aus einer oder mehreren Geraden bestehen kann. Dies veranlasst den Herrn Verfasser, eine irrtümliche Behauptung, welche er vor einigen Jahren (Nouv. Ann. (3) II. 259) aufgestellt hat, zu berichtigen. Für die Dupin'sche Cyklide besteht jener Ort aus zwei Geraden, und sie ist die einzige Fläche, welche diese Eigenschaft besitzt. Hieran wird noch eine Bemerkung über Flächen geknüpft, bei denen ein solcher Ort existirt. A.

Demartres. Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement une suite de cercles. C. R. CVI. 54-57.

In der Note sind folgende Sätze entwickelt:

1) Es giebt auf jeder cyklischen Fläche drei und nur drei Orthogonalsysteme derart, dass die Linien jedes Systemes die erzeugenden Kreise homographisch teilen. Jedes dieser Systeme entspricht einem Paar entgegengesetzter Focalsecanten.

2) Damit die Nulllinien die erzeugenden Kreise homographisch teilen, ist hinreichende und notwendige Bedingung, dass die Fläche Enveloppe einer Kugelschar oder eine Fläche mit isotroper Focale ist.

3) Auf den beiden eben genannten Flächenarten werden die erzeugenden Kreise von jedem Curvensystem homographisch geteilt, welche jeden erzeugenden Kreis unter constantem Winkel schneiden, der aber von einem Kreise zum andern variiren kann.

4) Damit eine focal isotrope Fläche durch ihre Krümmungslinien homographisch geteilt werde, ist notwendige und hinreichende Bedingung, dass sie anallagmatisch ist. A.

Demartres. Sur la surface engendrée par une conique doublement sécante à une conique fixe. C. R. CVI. 413-416.

Die projectivischen Eigenschaften der cyklischen Flächen lassen sich ohne weiteres auf Flächen übertragen, welche von einem veränderlichen Kegelschnitt beschrieben werden, wenn dieser letztere einen festen Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet. Der Herr Verfasser verfolgt diesen Gedanken erstens hinsichtlich der zu den Erzeugenden conjugirten Curven, zweitens hinsichtlich der asymptotischen Linien der erzeugten Flächen.

A.

DEMARTRES. Sur les courbes de M. Bertrand considérées comme géodésiques de surfaces cerclées. C.R. CVI. 1065-1067.

Die kurze Note enthält einige Resultate, welche sich an eine frühere Arbeit des Herrn Verfassers: Sur les surfaces à génératrice circulaire (Ann. de l'Ec. Norm. (3) II. 123-182, F. d. M. XVII. 1885. 735) anschliessen; namentlich die Auflösung des Problems, alle cyklischen Flächen zu finden, deren Erzeugende mit einer Schar Kürzester einen Winkel i bilden, der für jede Erzeugende constant bleibt, aber von einer Erzeugenden zur andern variiren darf.

A.

W. ZMURKO. Ueber die mit den Flächen zweiten Grades conjugirten Flächen. Krak. Denkschr. XIV. 208-222. (Polnisch.)

Analytische Untersuchung derjenigen Flächen vierten Grades, die mit den Flächen zweiten Grades analoge Eigenschaften haben. Es sind dies die Flächen:

$$a^2b^2z^2+(2)(4) = a^2b^2(4),$$
$$a^2b^2z^2-(2)(4) = -a^2b^2(4),$$
$$a^2b^2z^2+(2')(4) = a^2b^2(4),$$
$$a^2b^2z^2-(2')(4) = -a^2b^2(4),$$
$$p^2z^2 = (p^2+4y^2)(px-y^2),$$
$$p^2z^2 = (-p^2+4y^2)(px-y^2).$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

$$(2) = b^2x^2+a^2y^2,$$
$$(2') = b^2x^2-a^2y^2,$$
$$(4) = b^4x^2+a^4y^2.$$

Dn.

A. DEL RE. Su certi sistemi di quartiche e sestiche sviluppabili che si presentano a proposito delle trasformazioni lineari di una certa quartica gobba in se stessa. Nap. Rend. (2) II. 37-46.

In Torino Atti XXII. und Nap. Rend. (2) I. 167 (s. F. d. M. XIX. 1887. 858 ff.) hat der Verfasser in Betreff der Regelfläche vierten Grades zweiter Gattung, auf welcher die Berührungspunkte der stationären Berührungsebenen zu zweien zusammenfallen, drei Aufgaben behandelt. Im Gegenwärtigen behandelt er noch die zwei folgenden: Wenn drei homographische Transformationen gegeben sind, welche „die Curve" in sich selbst überführen, die Einhüllende der Ebenen zu finden, welche die einem und demselben Punkte derselben in den drei Homographien entsprechenden drei Punkte der Curven vereinigen. Nachdem die Einhüllende bekannt ist, die Transformationen niedrigster Ordnung zu suchen, welche sie in die Curve überführen. H.

J. JOHANNES. Die rationalen Raumcurven sechster Ordnung, erzeugt durch geometrische Transformation aus einem Kegelschnitte. Diss. Tübingen. 31 S. 8°.

J. J. SYLVESTER, A. R. JOHNSON. Solution of question 9024 and 9071. Ed. Times XLVIII. 75-76.

Hypercartesiane wird diejenige besondere Form der bicircularen Curve vierter Ordnung genannt, bei der vier concyklische Brennpunkte collinear werden. Liegen vier gegebene Punkte in einer Ebene, so ist der Ort eines Punktes im Raume, dessen Abstände von drei beliebigen unter ihnen eine gegebene homogene lineare Relation befriedigen, eine Curve vierter Ordnung (eine hypercartesische Curve). Sind A, B, C, D die vier gegebenen Punkte, F, G, H, K vier andere, in denen die hypercartesische Curve die Ebene $ABCD$ schneidet, so kann eine bicirculare Curve vierter Ordnung durch A, B, C, D gelegt werden, von der

F, *G*, *H*, *K* concyklische Brennpunkte sind. Mit anderen Sätzen über Hypercartesianen beschäftigen sich die Aufgaben 9229, 9259, 9301, deren Lösungen durch Herrn Nash in Ed. Times XLIX. 37-38 gegeben werden. Lp.

A. Ahrendt. Untersuchungen über die Parallelflächen der Flächen zweiten Grades. Diss. Rostock. 75 S. 8°.

Der erste Teil der Arbeit stellt die Charaktere der Krümmungslinien auf den Parallelflächen erst der centrischen Flächen zweiten Grades, dann der Paraboloide, analytisch ermittelt, fest und giebt die Construction der Projectionen an. Im zweiten werden erst die den erzeugenden Geraden der Urfläche entsprechenden Curven auf der Parallelfläche, dann die Geraden auf der Parallelfläche analytisch untersucht. Den Geraden der Urfläche entsprechen Curven vierter Ordnung; die Flächen der Normalen längs denselben sind im allgemeinen gleichseitig hyperbolische Paraboloide. Die Geraden der Urfläche, denen Gerade auf der Parallelfläche entsprechen, gehen durch die Nabelpunkte und sind Doppellinien. Die Geraden auf der Parallelfläche entsprechen Centralschnitten auf centrischen Urflächen, auf Paraboloiden ebenen Schnitten parallel der Axe. Der dritte Teil untersucht die Doppellinien auf den Parallelflächen. H.

J. P. Johnston. The lines of curvature on a parallel surface to a quadric. Mess. (2) XVIII. 88-89.

Analytischer Beweis dafür, dass die Krümmungslinien auf einer Oberfläche, die zu einer Fläche zweiter Ordnung parallel ist, auf einer Schar coaxialer Flächen zweiter Ordnung zur gegebenen Fläche liegen. Glr. (Lp.)

Ekama. Die ebenen und die sphärischen cykloidalen Curven. Hoppe Arch. (2) VII. 207-224.

Die ebene cykloidale Curve ist die Bahn, welche ein mit

einem Kreise fest verbundener Punkt durchläuft, wenn dieser Kreis, ohne zu gleiten, an einem andern Kreis entlang sich wälzt.

Wenn dagegen zwei Kegel einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und der eine wälzt sich, ohne zu gleiten, um den andern, so wird jeder Punkt, der fest mit dem bewegten Kegel verbunden ist, eine Curve beschreiben, welche auf der Oberfläche einer Kugel gelegen ist, deren Radius der Abstand des Punktes von dem gemeinschaftlichen Scheitel ist. Diese Curve heisst sphärische cykloidale Curve.

Beide Curven werden in dieser Arbeit nach analytischer Methode eingehend behandelt. Es finden sich Angaben über Tangenten, Normalen, Normalebenen, Krümmung, Evoluten, Bogen- und Flächenberechnung. Mz.

E. Worms. Untersuchungen über die Oberflächen, deren Gleichung für die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z die Gestalt hat $x^m \pm y^m \pm z^m = 1$, wobei m eine beliebige positive gerade Zahl bedeutet. Diss. Freiburg i. B. 40 S. 8°.

G. Pirondini. Studio sulle superficie elicoidali. Annali di Mat. (2) XVI. 137-177.

Das Linienelement dS auf einem Helikoid (Schraubenfläche, erzeugt von einer beliebigen Curve s durch gleichzeitige Rotation und proportionale axiale Verschiebung) wird in der Form dargestellt:

$$dS^2 = ds^2 + (p^2 + R^2) dv^2,$$

wo p das constante Verhältnis beider Bewegungen, v den Rotationswinkel, R den Abstand eines Punktes von der Axe bezeichnet. Zwei Helikoide sind auf einander abwickelbar, wenn für beliebig constantes K

$$v = Kv_1, \quad R_1^2 = K^2(p^2 + R^2) - p_1^2,$$

mithin auch Helikoid auf Rotationsfläche, für $p = 0$. Sollen bei Abwickelung die entsprechenden Linien auf einander fallen, so muss der zur Axe normale Schnitt eine Kreisevolvente sein und

umgekehrt. Es wird der Fall, wo s eine Gerade ist, untersucht, der Meridianschnitt, der Cylinderschnitt in Formeln bestimmt, der Fall betrachtet, wo die orthogonalen Trajectorien der Meridianschnitte sphärische Curven sind: hier ergeben sich Dini'sche Helikoide, auf denen die Krümmungslinien Loxodromien sind. Ferner wird die Krümmung bestimmt, und über die Helikoide von constanter negativer Krümmung werden Sätze aufgestellt. Endlich wird die geodätische Krümmung untersucht, die Hauptkrümmungen und die Mittelpunktsflächen werden bestimmt. Im ganzen ergiebt die Arbeit eine sehr reiche Ausbeute an neuen Sätzen und Beziehungen in dem engen Bezirke des speciellen Themas. H.

F. Schiffner. Die flache Kreisschraubenfläche. Hoppe Arch. (2) VII. 54-63.

Kreisschraubenfläche nennt der Verfasser die, welche eine Gerade bei Rotation um die Tangente eines Kreises und proportionalem Fortrücken des Berührungspunktes unter constantem Winkel mit der Tangente erzeugt. Flach heisst sie, wenn die Gerade auf der Tangente senkrecht steht. Hier wird überdies gleichzeitiger voller Umlauf angenommen. Ihre Gleichung ist:

$$y^2(x^2+y^2)-(ay+xz)^2 = 0.$$

Sie wird in synthetischer Weise discutirt und beschrieben.

H.

J. Vivanti. Ueber Minimalflächen. Schlömilch Z. XXXIII. 137-153.

Nach Herrn Weierstrass lassen sich die Coordinaten eines Punktes einer Minimalfläche bekanntlich in folgender Form durch die Parameter u und v darstellen:

$$x = \tfrac{1}{2}\int(1-u^2)F(u)du+\tfrac{1}{2}\int(1-v^2)F_1(v)dv,$$

$$y = \frac{i}{2}\int(1+u^2)F(u)du-\frac{i}{2}\int(1+v^2)F_1(v)dv,$$

$$z = \int uF(u)du+\int vF_1(v)dv.$$

Die Fläche ist reell, wenn F und F_1 conjugirt sind, und alsdann

wird der Punkt x, y, z reell, wenn die complexen Variabeln u und v conjugirt sind.

Ist

$$F_1(u) = -\frac{1}{u^4} F\left(-\frac{1}{u}\right),$$

so ist die Minimalfläche eine Doppelfläche. Die Herren Henneberg und Schilling haben diejenige Doppelfläche untersucht, welche der Function entspricht:

$$F(u) = 3\left(u - \frac{1}{u}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}.$$

Der Herr Verfasser betrachtet, angeregt durch eine Bemerkung des Herrn Darboux in den Leçons sur la théorie générale des surfaces I, 364 (Paris 1887), allgemeiner diejenigen Doppelflächen, für welche

$$F(u) = \left(\frac{1}{u} - u\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{u} + u\right)^{\beta}\frac{1}{u^2}$$

ist, wo β ungerade sein muss.

Die Untersuchung wird vorbereitet durch die Betrachtung des Integrals

$$\int\left(\frac{1}{u} - u\right)^m\left(\frac{1}{u} + u\right)^n \frac{du}{u} \equiv H(m, n, u) \equiv H(m, n),$$

wo m und n ganze, nicht negative und nicht zugleich verschwindende Zahlen sind.

Es zeigt sich, dass dieses Integral dann und nur dann algebraisch ist, wenn wenigstens eine der Zahlen m, n ungerade ist. Für die zu untersuchende Minimalfläche folgt daraus, dass sie dann und nur dann algebraisch (und zwar rational) ist, wenn α und β ungerade sind.

Die Arbeit beschäftigt sich nun weiter mit der erzeugenden Minimalcurve $v =$ const., resp. $u =$ const., durch deren Translation bekanntlich nach Herrn Lie die Fläche entsteht, und mit ihren Projectionen auf die Coordinatenebenen; und zwar werden Ordnung, Klasse und Singularitäten derselben ermittelt.

Daran schliesst sich die Aufsuchung von Ordnung und Klasse der Fläche, sowie die Betrachtung der umbeschriebenen Cylinder und der Evolvente der Projection der Minimalcurve

auf eine beliebige Ebene. Zuletzt wird der specielle Fall $\beta = \alpha$ betrachtet, zu welchem auch die von Herrn Henneberg untersuchte Fläche gehört. A.

A. Cayley. Note sur les surfaces minima et le théorème de Joachimsthal. C. R. CVI. 995-997.

Die Note enthält einfache geometrische Beweise des Satzes von Catalan: Die einzige geradlinige Minimalfläche ist die Schraubenfläche, deren Erzeugende die Axe rechtwinklig schneiden; so wie des bekannten Joachimsthal'schen Satzes, erweitert von Bonnet und Serret, wonach die Hauptnormalen ebener oder sphärischer Krümmungslinien mit den Flächennormalen constante Winkel bilden. A.

E. Goursat. Sur un mode de transformation des surfaces minima. (Deux mémoires.) Acta Math. XI. 135-186, 257-264.

Den wesentlichen Inhalt der ersten Abhandlung hat der Herr Verfasser bereits im Jahre 1887 in den C. R. CV. 743 mitgeteilt, und es ist über diese Mitteilung F. d. M. XIX. 824 berichtet.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit einer etwas allgemeineren Frage als die erste.

Bezeichnen nämlich x, y, z und x_0, y_0, z_0 die Coordinaten zweier entsprechenden Punkte auf einer Minimalfläche S und ihrer adjungirten S_0, und setzt man jede der drei Coordinaten x_1, y_1, z_1 gleich einer Function von x, y, z, x_0, y_0, z_0, so fragt es sich, welches die allgemeinste Form dieser Functionen sein müsse, damit der Ort von x_1, y_1, z_1 wieder eine Minimalfläche S_1 sei.

Die Frage wird dahin beantwortet: Man bilde zwei Minimalcurven, entsprechend den Gleichungen $X = A(t)$, $Y = B(t)$, $Z = C(t)$ und $X' = A'(\tau)$, $Y' = B'(\tau)$, $Z' = C'(\tau)$; und hieraus die beiden adjungirten Minimalflächen: $2x = X + X'$, u. s. w. und $2x_0 = i(X - X')$ u. s. w.

Dann muss sein $x_1 = F(X, Y, Z) + F'(X', Y', Z')$ u. s. w., oder man setzt

$$X_1 = F(X, Y, Z), \quad X'_1 = F'(X', Y', Z'),$$

so muss sein

$$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = \lambda(dX^2 + dY^2 + dZ^2),$$

wo λ nur von X, Y, Z abhängt. Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, alle diejenigen Transformationen zu suchen, bei welchen eine Minimalcurve wieder in eine solche übergeht, und eine solche Transformation, welche von 10 willkürlichen Parametern abhängt, kann stets zurückgeführt werden auf eine Verschiebung und Drehung (reell oder imaginär) und auf Transformationen durch reciproke Radien. Hiermit ist die Aufgabe allgemein gelöst. A.

E. Goursat. Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au plan tangent. American J. X. 187-204.

Herr Appell hat in einer Abhandlung im American J. X. 175 (F. d. M. XIX. 1887. 825) diejenigen Flächen untersucht, bei denen ein fester Punkt (als Coordinatenanfang gewählt) sich auf jede Normale nach der Mitte zwischen beiden Hauptkrümmungsmittelpunkten projicirt.

Der Herr Verfasser untersucht in ähnlicher Weise eine Klasse von Flächen, bei denen die Summe der Hauptkrümmungsradien proportional ist der Distanz von einem festen Punkte, dem Anfangspunkte. Er bedient sich dabei der sphärischen Darstellung in derselben Weise wie Herr Appell (siehe das Referat), wobei eine beliebige Fläche Σ durch eine Function u der beiden complexen Parameter s und s_0 definirt ist. Durch s und s_0 wird die Richtung der Normale bestimmt, welche reell ist, wenn s und s_0 conjugirt sind. u ist der mit $(1+ss_0)$ multiplicirte Abstand der Tangentialebene vom Anfangspunkt. Sind mehrere Flächen $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ in derselben Weise dargestellt, so stellt

$$U = u + u' + u''$$

eine neue Fläche dar, die Resultante der gegebenen Flächen.

Die gegebenen Flächen und die Resultante besitzen in entsprechenden Punkten (s, s_0) parallele Tangentialebenen, und der Abstand der Tangentialebene der Resultante von O ist gleich der Summe der Abstände der Tangentialebenen der Componenten.

Die Summe der Hauptkrümmungsradien ist

$$(1+ss_0)\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0} - s\frac{\partial u}{\partial s} - s_0\frac{\partial u}{\partial s_0} + u,$$

und man erkennt hieraus leicht, dass diese Summe für die Resultante gleich ist der Summe sämtlicher Paare von Hauptkrümmungsradien für die einzelnen Flächen. Die gesuchten Flächen sind also dargestellt durch die Gleichung

$$(1+ss_0)\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0} - s\frac{\partial u}{\partial s} - s_0\frac{\partial u}{\partial s_0} + u\left[1 + \frac{2k}{1+ss_0}\right] = 0,$$

wenn k das Verhältnis der Distanz der Mitte zwischen beiden Krümmungsmittelpunkten zu der des Anfangspunktes von der Tangentialebene bedeutet. Für $k = 0$ erhält man die Minimalflächen, für $k = -1$ die von Herrn Appell untersuchten Flächen. Ausser in diesen beiden Fällen lässt sich aber das Integral dieser Gleichung noch in vielen anderen Fällen ebenfalls finden; allgemein allerdings nur für besondere Werte von k. Zunächst folgt ohne weiteres, dass die Resultante mehrerer Flächen, welche die verlangte Eigenschaft für einen und denselben Wert von k haben, dieselbe Eigenschaft besitzt.

Die aufgestellte Gleichung wird nun durch die Substitutionen

$$s = \alpha, \quad s_0 = -\frac{1}{\beta}, \quad U = \frac{(\alpha-\beta)^\lambda v}{\beta},$$

$$\text{wo } \lambda^2 - 3\lambda - 2k = 0, \quad \lambda = 1+m \text{ ist},$$

n die Form gebracht:

$$(\alpha-\beta)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} - m\frac{\partial v}{\partial\alpha} + m\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0,$$

vobei $k = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ ist.

Kennt man ein Integral der Differentialgleichung in v, so :ann man daraus einen Wert für u bestimmen, $u = f(s, s_0)$, der

53*

jedoch im allgemeinen complex ist; man kann daraus aber leicht eine reelle Lösung ableiten, nämlich:

$$\mu = f(s, s_0) + f(s_0, s).$$

Die Differentialgleichung für v ist von Euler, Laplace u. a. behandelt. Ist m beliebig, so kann man eine unbeschränkte Anzahl particulärer Integrale in endlicher Form finden, z. B. ausgedrückt durch hypergeometrische Reihen, das allgemeine Integral nach Poisson nur in einer Form, bei welcher die willkürlichen Functionen unter dem Integralzeichen vorkommen. Ist dagegen m eine ganze Zahl, so lässt sich die Integration nach der Laplace'schen Methode allgemein durchführen.

Für diesen Fall wird nun die Integration durchgeführt. Das Integral und die entsprechende Fläche sei mit V_m bezeichnet. Es wird dann der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Fällen genauer untersucht, wobei sich ergiebt, dass man aus jeder Fläche V_m durch einfache Construction zu einer Fläche V_{m-1} und zu einer V_{m-1} übergehen kann; es findet indessen zwischen diesen beiden Schritten keine Reciprocität statt. In der betrachteten Reihe kommt jede Fläche zweimal vor, es ist namentlich V_m und V_{1-m} identisch. Man kann diese ganze Reihe aus einem Gliede ableiten, etwa aus den Minimalflächen, so dass hierin eine Verallgemeinerung derjenigen Beziehung liegt, welche Herr Appell zwischen den von ihm untersuchten und den Minimalflächen gefunden hat. Auch der Satz, dass sich jeder abwickelbaren Fläche längs einer gegebenen Curve eine bestimmte Minimalfläche einschreiben lässt, findet seine Analogie bei der ganzen Reihe der hier betrachteten Flächen. A.

H. A. Schwarz. Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke. Gött. Abh. XXXIV 48 S. (1887.)

Die Begrenzung der betrachteten Minimalflächenstücke wird von zwei regulären Polygonen mit gleichen Seiten und gleicher

Seitenzahl n gebildet, die in parallelen Ebenen so liegen, dass die Ecken des einen senkrecht über denen des anderen liegen; sie selbst werden in ihrem Innern als von singulären Stellen frei vorausgesetzt; endlich wird vorausgesetzt, dass die $n+1$ Symmetrieebenen der Begrenzung zugleich Symmetrieebenen der Minimalflächenstücke selbst sind. Ausser der analytischen Bestimmung dieser Minimalflächenstücke und der Untersuchung ihrer Gestalt handelt es sich im vorliegenden Aufsatz um die Ermittelung des Intervalles, auf welches die Veränderlichkeit des Verhältnisses des Abstandes der Ebenen der beiden Polygone zu dem Radius des eingeschriebenen Kreises beschränkt ist, ferner um die Frage, wie viele von einander verschiedene Minimalflächenstücke bei gegebenem Werte dieser beiden Grössen und für die nämliche Seitenzahl existiren, endlich um die Ermittelung derjenigen Minimalflächenstücke, welche unter allen benachbarten von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücken den kleinsten Flächeninhalt besitzen.

Vorausgeschickt ist der Abhandlung ein kurzer Abriss der Geschichte des Problems der Flächen kleinsten Inhalts mit gegebenen Randlinien, unter Hervorhebung der besonderen Schwierigkeiten, die sich seiner Lösung entgegengestellt haben. T.

A. Starkow. Sur un problème du calcul des variations. Palermo Rend. II. 116-117.

Der Herr Verfasser reproducirt die Lösung des folgenden, überaus einfachen Variationsproblems von Moigno:

Die Endpunkte A und B einer Linie von beliebiger Gestalt, aber gegebener Länge, befinden sich auf zwei parallelen Ebenen, deren eine wir zur xy-Ebene nehmen. Durch einen Punkt P, welcher die Linie von A bis B beschreibt, sei das gemeinschaftliche Lot CC_1 beider Ebenen gelegt. Welche Bedingung muss die Linie erfüllen, damit das von der begrenzten Geraden CC_1 beschriebene cylindrische Flächenstück möglichst gross sei? Es ergiebt sich sofort, dass die Linie gegen die beiden parallelen Ebenen überall gleich geneigt sein muss, dass sie also Kürzeste der projicirenden Cylinderfläche ist, sonst aber keiner Beschränkung

unterworfen. Insbesondere kann sie beliebig viele Knickpunkte haben.

Der Herr Verfasser glaubt in der Lösung dieses Problems die Bestätigung einer von ihm bereits früher ausgesprochenen Ansicht zu finden, welche übrigens bereits von Herrn Sonine (Denkschriften der Odessaer Gesellschaft VI) und von dem Referenten (F. August, Ueber die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes. J. für Math. CIII, F. d. M. XIX. 1887. 954) ausführlich widerlegt ist.

Er meint nämlich, man könne unstetige Lösungen bei Minimalaufgaben, bei welchen Curven gesucht werden, nach den Methoden der Variationsrechnung finden, wenn man die Bedingung $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$ fallen liesse und sie nur durch die Bedingungen $dx^2 \leqq ds^2$ etc. ersetzte. Dass diese Auffassung logisch unzulässig ist, hat Referent früher nachgewiesen; wieso die Lösung des vorliegenden Problems jene Ansicht bestätigen soll, ist vollkommen unverständlich. Denn es kommt kein Schritt in der Rechnung vor, bei welchem $dx^2+dy^2+dz^2 \leqq ds^2$ genommen werden müsste.

Die Sache hat vielmehr folgende Bewandtnis. In den beiden Integralen, auf die es ankommt, tritt nur $\frac{dz}{ds}$ auf, nicht $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$; und $\frac{dz}{ds}$ ist und bleibt stetig. Die Grössen $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$, welche gar nicht in der Bedingung vorkommen, können natürlich durch dieselben in keiner Weise bestimmt werden; sie können auch unstetig werden. Ueber sie ist eben aus dem Variationscalcül selbst gar nichts zu entscheiden, sondern nur durch die nicht in die Rechnung mit hineingezogenen Nebenbetrachtungen. A.

Niewenglowski. Solution de la question d'analyse proposée au concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1888. Nouv. Ann. (3) VII. 391-400.

Es wird die reelle Minimalfläche gesucht, die als geodätische

Linie die Cykloide hat, deren Gleichungen:

$$z = 0, \quad x = a(v - \sin v), \quad y = a(1 - \cos v)$$

sind. Dann wird gezeigt, dass die xy-Ebene eine Symmetrie-Ebene der Fläche ist, und dass die Tangenten der Cykloide in ihren Spitzen Symmetrie-Axen der Fläche sind. Es wird bewiesen, dass die Fläche durch unendlich viele Ebenen in Parabeln geschnitten werden kann; dann wird die Differentialgleichung der Krümmungslinien dieser Fläche aufgestellt und bewiesen, dass eine Ebene, die zur Basis der Cykloide senkrecht ist und durch die Mitte zwichen zwei benachbarten Spitzen dieser Curve geht, die Fläche in einer Krümmungscurve schneidet.

Die Gleichungen der Fläche werden:

$$z = 4a\sin\frac{v}{2}\sin i\beta,$$
$$x = a(v - \sin v\cos 2i\beta),$$
$$y = a(1 - \cos v\cos 2i\beta),$$

wo v, β unabhängige Variabeln bedeuten. Mz.

F. Bohnert. Bestimmung einer speciellen periodischen Minimalfläche, auf welcher unendlich viele gerade Linien liegen. Göttingen. Vandenhoeck u. Ruprecht. 43 S.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

R. Hoppe. Principien der n-dimensionalen Curventheorie. Hoppe Arch. (2) VI. 168-185.

Es werden zunächst einige die Behandlung der allgemeinen Probleme obiger Theorie vereinfachende Grundsätze aufgestellt. Jeder Punkt wird durch eine Coordinate bezeichnet, jede Richtung durch den Richtungscosinus bezüglich einer Axe. Bogenelement und alle Lineargrössen werden eliminirt, indem die Curve als Einhüllende einer Tangentenschar aufgefasst und jede Tangente durch einen gleichgerichteten, vom Anfangspunkt aus-

gehenden Strahl ersetzt wird. Als Parameter wird, wie in Theorie der Raumcurven, der Krümmungswinkel τ angew. Nunmehr wird die Osculation m^{ter} Ordnung eines Gebild durch eine lineare m-Dehnung E_m definirt und analytisch stimmt. Dabei ist E_m der Schnitt von $n-m$ $(n-1)$-Dehnun welche einzeln durch die Determinantengleichungen

$$|f \dots f^{(\lambda-1)}\xi - x f^{(\lambda+1)} \dots f^{(n+1)}| = 0; \; (\lambda = m, \dots, (n-1$$

ausgedrückt sind, worin ξ den erzeugenden Punkt von E_m, x gemeinsamen Punkt von E_m und der Curve s, f den Richtu cosinus der Tangente an s in x bezeichnet. Nachdem E_m verschoben worden, dass x in den Anfangspunkt fällt, gieb innerhalb E_m auf E_{m-1} im Anfangspunkt nur eine Norm deren Richtungscosinus f_m ist. Sie steht auf den Strah f, f_1, ..., f_{m-1} senkrecht, und die Strahlen f_1, f_2, ..., f_n den ein orthogonales begleitendes Axensystem (analog wie Raumcurven), in welchem f_m die m^{te} begleitende Axe bedeut z. B. f_1 die Tangente, f_2 die Hauptnormale, f_3 die Binormale e Sodann wird für die begleitenden Axen die Differentialform der Richtungscosinus aufgestellt. — In der Krümmungstheor ist zu unterscheiden die Krümmung schlechthin (τ) und die Tota krümmung (σ). Es bedeutet τ_m den m^{ten} Krümmungswink $\frac{d\tau_m}{d\tau}$ das $(m-1)^{te}$ Krümmungsverhältnis, $\frac{d\tau_m}{ds}$ die m^{te} Krümmun Ersetzt man τ durch σ, so erhält man die analogen Definitione für Totalkrümmung. Deviation ($d\tau_{m-1}$) des Strahles f_m heis der Winkel zwischen den Normalen auf der osculirenden E_{m-} und ihren Consecutiven innerhalb E_m. Contingenzwinkel ($d\sigma_{m-1}$ des Strahles f_m ist der Winkel zwischen f_m und seinem Consecutiven. Die Theorie wird schliesslich auf Curven constante Krümmungsverhältnisse und constanter Krümmungen angewandt.

Schg.

G. Loria. Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque. Batt. G. XXVI. 96-101.

Das Volumen des n-dehnigen $(n+1)$-Ecks ist als Function der rechtwinkligen Coordinaten seiner Ecken bekannt. Der Ver-

fasser stellt dasselbe, zunächst für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$, nachher allgemein, mittels homogener Coordinaten dar, und zwar, unter Benutzung der allgemeinen Ausdrücke für den Abstand zweier Punkte und den Abstand eines Punktes von einer „Geraden“, für Mannigfaltigkeiten constanter Krümmung. Hieraus ergiebt sich dann jedesmal als Specialfall die Volumenbestimmung im ebenen Raume. Auch die dualistisch entsprechenden Formeln, welche aus der Vertauschung der $n+1$ Ecken mit den $n+1$ begrenzenden $(n-1)$-dimensionalen n-Ecken hervorgehen, werden angegeben. Schg.

G. Loria. Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $n-1$ dimensioni. Palermo Rend. II. 201-224.

Eine rationale Curve n^{ter} Ordnung im $(n-1)$-dimensionalen Raume ist das Erzeugnis von $n-2$ $(n-2)$-dimensionalen Raumbüscheln erster Ordnung und einem ebensolchen zweiter Ordnung. Der Verfasser stellt zuerst die Bedingung fest, unter welcher n Punkte dieser Curve in demselben $(n-2)$-dimensionalen Raume liegen, und gelangt hierdurch zur Definition der n stationären Punkte der Curve. Dann leitet er verschiedene Sätze ab über die Osculation derselben durch einen $(n-2)$-dimensionalen Raum und bestimmt die Klassenzahl der Curve. Darauf werden einige specielle Formen derselben betrachtet, und die Collineationen untersucht, welche eine solche Curve nebst der Gruppe ihrer stationären Punkte in sich selbst überführen. Dies wird speciell durchgeführt für die (zum Teil mit den regelmässigen Polyedern zusammenhängenden) Fälle $n = 3, 4, 6, 8, 12$. Schg.

G. Loria. Sulle curve razionali normali in uno spazio a n dimensioni. Batt. G. XXVI. 334-347.

Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen.

In dem ersten werden die wesentlichsten Eigenschaften der rationalen Normalcurven eines ebenen n-dimensionalen Raumes R_n auseinandergesetzt. Dieselben sind zwar grösstenteils be-

kannt, werden aber hier methodisch durch Anwendung v[...] mogenen Coordinaten ermittelt. Unter den Sätzen, welche neu sind, führen wir nur den folgenden an: Durch jeden [...] P von R_n gehen $2(n-2)$ R_{n-2}, deren jeder durch einen [...] einer rationalen Normalcurve geht und mit ihr anderw[...] Berührung $(n-2)^{ter}$ Ordnung hat; die linke Seite der Glei[...] welche die Berührungspunkte dieser R_{n-2} bestimmt, ist die [...] sche Form zu derjenigen, welche die Berührungspunkt[...] n Räume R_{n-1} bestimmt, welche durch P gehen und ei[...] rührung $(n-1)^{ter}$ Ordnung mit der Curve haben.

Im zweiten Teile wird auf die in Frage stehenden Co[...] die Theorie derjenigen projectiven und dualistischen Verwa[...] schaften des R_3 ausgedehnt, welche eine gegebene kubis[...] Raumcurve in sich selbst oder in ihre Developpable verwan[...] Man erhält in R_n auf diese Weise ∞^3 Collineationen und eb[...] soviele Reciprocitäten, in welchen eine gegebene Normalcurve [...] Rolle einer Ordnungscurve spielt; jeder Collineation und je[...] Reciprocität entspricht eine der ∞^3 Projectivitäten, welche [...] zwischen den Punkten der Normalcurve herstellen kann. [...] genannten Transformationen von R_n haben Eigenschaften, we[...] derjenigen ähnlich sind, die Hr. Sturm in seiner wohlbekan[...] Abhandlung im XXVI. Bd. der Math. Annalen (vgl. F. d. [...] XVIII. 1886. 587) auseinandergesetzt hat. La[...]

A. DEL RE. Sui sistemi lineari n-pli di n-spazii [...] Palermo. Rend. II. 124-127.

In einem n-dimensionalen linearen Raume betrachte [...] $n+1$ willkürliche Punkte $A_0, A_1, \ldots, A_n$; als Coordinaten e[...] Kugel (höherer Art) in demselben Raum nehme man ihre [...] tenzen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ an in Bezug auf die gegebenen Pu[...] Dann hat man den Lehrsatz:

„Alle die Kugeln, deren Coordinaten einer Gleichung [...] Typus $\sum_{i=0}^{i=n} a_i x_i = a$ genügen, haben dieselbe Potenz in [...] auf einen bestimmten Punkt G; dieser Punkt ist der Mittel[...]

der Massen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, wenn sie in die Punkte $A_0, A_1, \ldots, A_n$ verlegt werden, und jene Potenz ist gleich $\frac{a-I}{\sum_{i=0}^{i=n} a_i}$, wo I das Trägheitsmoment obiger Massen in Bezug auf G ist".

Der Verfasser beweist diesen Satz durch ganz einfache analytische Betrachtungen und bemerkt, dass durch seine Arbeit die Aufgabe 72 gelöst ist, welche er in Batt. G. XXV. gestellt hatte. La.

A. del Re. Un teorema nella geometria di una certa classe di corrispondenze. Batt. G. XXVI. 348-351.

In zwei ineinander liegenden Räumen n^{ter} Dimension mögen den Punkten des ersten Gebilde $S_{n-1}^{(m')}$ von der Ordnung m' und der Dimension $n-1$ entsprechen, umgekehrt mögen zu den Punkten des letzteren Gebilde $S_{n-1}^{(m)}$ von der Ordnung m und der Dimension $n-1$ gehören. In Erweiterung früherer Sätze der Herren Sturm, Schröter und De Paolis stellt nun Herr Del Re als Resultat einer kurzen Rechnung den Satz auf, dass das Ordnungsgebilde der Beziehung für irgend einen Punkt dieselbe lineäre Polarmannigfaltigkeit besitzt, als die Zusammenstellung der beiden diesem Punkte entsprechenden Gebilde $S_{n-1}^{(m)}$, $S_{n-1}^{(m')}$.

E. K.

P. del Pezzo. Estensione di un teorema di Noether. Palermo Rend. II. 139-144.

Verallgemeinerung des von Herrn Noether in den Math. Ann. IX. (F. d. M. VII. 1875. 243) gegebenen Satzes von der Auflösung der Singularitäten auf den Fall von Oberflächen und den entsprechenden Gebilden eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen überhaupt. Die Ableitung lehnt sich an die von Herrn Halphen C. R. LXXX. 138 (cf. F. d. M. VII. 380) für den Noether'schen Satz gegebene Beweismethode an. T.

W. J. C. Sharp. Solution of question 9098. Ed. Times XLVIII. 168-173.

Wenn ein Tetraeder so beschaffen ist, dass die Summen der Quadrate seiner Gegenkanten alle unter einander gleich sind, so sind die Feuerbach'schen Kreise seiner vier Seitenflächen sämtlich Schnitte einer und derselben Kugel. — Bedeutet in einem Raume von n Dimensionen (r, s) die Länge der die r^{te} und die s^{te} Ecke eines „Simplicissimum" verbindenden Strecke, und sind $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ derartige Grössen, dass $(r,s)^2 = A_r + A_s$ für alle Werte von r und s ist, so liegen die Kreise der neun Punkte aller der Dreiecke, welche ihre Ecken in drei von denjenigen des Simplicissimum haben, auf derselben Hypersphäre (A); die Lote von den Ecken auf die Gegenflächen treffen sich in einem Punkte, dem Centrum der zu sich selbst conjugirten Hypersphäre (B). Eine dritte (C) geht durch die Schwerpunkte der Seitenflächen und ihre Höhenmitten. Alle die „Sphären" haben eine gemeinschaftliche lineare Radicalfläche mit der „Umsphäre", nämlich den Ort, auf welchem die linearen Oerter durch die Ecken des ursprünglichen Simplicissimum diejenigen durch die entsprechenden Ecken des Simplicissimum treffen, dessen Ecken die Fusspunkte der Höhen auf die Gegenflächen sind. Noch eine Sphäre (D) durch die Mitte der Höhen und den Schwerpunkt hat denselben Radicalort mit der Umsphäre. Die Sphären (A) und (C) werden im zweidehnigen Raume identisch. Auch schneidet die Sphäre (C) von den Teilen der Höhen zwischen der Höhenmitte und der Seitenfläche den n^{ten} Teil ab. Ist L die Höhenmitte, AA' das Lot von A auf die Gegenfläche und a der Punkt, in welchem $ALA'a$ die Umsphäre trifft, so ist $La = nLA'$. — Das Ganze ist ein Nachtrag zu der Abhandlung „On the properties of simplicissima etc." (Lond. M. S. Proc. XVIII. 325-359, F. d. M XIX. 1887. 837.) Lp.

J. J Sylvester, W. J. C. Sharp. Solution of questions 8864 and 9004. Ed. Times XLVIII. 69-70.

8864. Der Schnitt einer Hyperfläche mit ihrer linearen und

mit ihrer quadratischen Polare bezüglich eines beliebigen Punktes auf ihr ist eine Curve doppelter Krümmung mit einem sechsfachen Punkte in dem gegebenen Punkte. 9004. Eine Hyperfläche wird im n-dehnigen Raume von der linearen Polare irgend eines Punktes auf ihr nach einer Hyperfläche im $(n-1)$-dehnigen Raume geschnitten, die einen Knoten im gegebenen Punkte besitzt. Ist die Hyperfläche eine Quadrifläche im vierdehnigen Raume, so ist der Schnitt ein Kegel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt im gegebenen Punkte liegt. Lp.

Capitel 4.

Liniengeometrie. (Complexe, Strahlensysteme.)

K. Hensel. Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel. J. für Math. CII. 273-303.

Der Herr Verfasser liefert eine Neubearbeitung der im LVII. Bande des Journals für Math. von Herrn Kummer entwickelten Theorie der Strahlensysteme, speciell der unendlich dünnen Strahlenbündel. Hierzu haben ihn folgende Gründe veranlasst. Es ist ihm erstens gelungen, Methoden zu finden, durch welche man die Resultate des Herrn Kummer fast ohne alle Rechnung ermitteln kann. Es kommt nämlich die ganze Theorie auf die Untersuchung zweier quadratischen Differentialformen $\varphi = Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ und $\psi = edu^2+2fdudv+gdv^2$ hinaus. Diese stellt der Herr Verfasser durch eine Einführung neuer Variabeln gleichzeitig als Summe je zweier Quadrate dar, wodurch alle Betrachtungen sich wesentlich vereinfachen. Zweitens hat er die Betrachtung auf Fragen ausgedehnt, auf welche Herr Kummer nicht eingegangen ist. Auch ist ein Vorteil seiner Darstellung, dass das der Untersuchung zu Grunde gelegte Coordinatensystem für jede Specialuntersuchung mit Leichtigkeit bequem gewählt werden kann.

A.

W. C. L. Gorton. Line Congruences. American J. X. 347-367.

Darstellung der Kummer'schen Resultate (J. für Math. LVII) mit Hülfe der Quaternionen. R. M.

E. Cosserat. Sur les surfaces de singularités de courbes construits avec un élément donné. C. R. CVII. 653-656.

Bei einem Complex von Geraden ist die Betrachtung der Singularitätenfläche von Interesse. Der Herr Verfasser betrachtet in analoger Weise die Singularitätenfläche für ein System von Curven. Sind (1) $x = f(z|u)$ und $y = \varphi(z|u)$ als Functionen von z und den $n+1$ Parametern $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ gegeben, so wird durch jede Wahl der $n+1$ Parameter ein Individuum des Curvensystems bestimmt. Sind nun die Parameter durch die k Gleichungen (2) $\Theta_1 = 0, \Theta_2 = 0, \ldots, \Theta_k = 0$ verknüpft, so entsteht ein System S_{n+1-k}; der Index $n+1-k$ giebt die Unbestimmtheit desselben an, er kann alle Werte von 0 bis n haben. Singuläre Curven werden diejenigen genannt, welche die Relationen erfüllen:

$$(3)\qquad \frac{\mu_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial u_1} + \mu_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial u_1} + \cdots + \mu_k \frac{\partial \Theta_k}{\partial u_1}}{\frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \cdots = \frac{\mu_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial u_k} + \mu_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial u_k} + \cdots + \mu_k \frac{\partial \Theta_k}{\partial u_k}}{\frac{\partial f}{\partial u_k} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}}.$$

Alle Curven der Systeme S_0, S_1, S_2 sind singuläre Curven. Ist $k < n-1$, so erfüllen die singulären Curven die Gleichungen

$$(4)\qquad m_1\left(u \left| \frac{\partial \Theta_1}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial \Theta_k}{\partial u}\right.\right) = 0, \ldots, \quad \text{bis} \quad m_{n-k-1}\left(u \left| \frac{\partial \Theta_1}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial \Theta_k}{\partial u}\right.\right),$$

welche man durch Elimination von $z, \lambda, \mu, \ldots, \mu_k$ aus (3) erhält. Eliminirt man $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_k, u_1, \ldots, u_{n+1}$ aus (1), (2) und (3), so er-

hält man eine Gleichung $S(x, y, z) = 0$; diese stellt die zum System S_{n+1-k} gehörige Singularitätenfläche dar. Bei den Systemen S_2 und S_1 erhält man bezw. die Focalfläche der Congruenz S_2 und die Fläche, auf welcher die Curven des Systems S_1 liegen.

Ist $k > n-1$, so bilden die singulären Curven eine Congruenz und sind Tangenten der Singularitätenfläche, während diese selbst eine Schale der Focalfläche der Congruenz ist.

Erfüllen die Functionen $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ die Gleichungen (4), sei es identisch, sei es in Folge der Gleichungen (2), so sind die Curven des Systemes S_{n+1-k} Tangenten einer Fläche, oder sie schneiden eine Curve. (Für $k = 1$ ergiebt sich hieraus das Theorem von Koenigs.)

Für das System S_3, einen Complex der Curven, gilt der Satz:

Die Curven des Complexes, welche durch einen Punkt P des Raumes hindurch gehen, bilden eine Fläche Σ mit konischem Punkte. Der Ort des Punktes P, für welchen eine der Curven eine Doppelcurve von Σ wird, ist die Singularitätenfläche. Die Doppelcurve ist eine singuläre Curve. Hieran schliessen sich noch einige weitere Sätze an.

Diese Betrachtungen werden speciell auf lineare Systeme von Kreisen angewandt und führen zu interessanten speciellen Resultaten. A.

E. Cosserat. Sur les propriétés infinitésimales de l'espace cerclé. C. R. CVI. 1514-1517.

Der Verfasser setzt die Punktepaare, in welchen ein Kreis von den durch einen Punkt P gehenden Geraden geschnitten wird, in Correspondenz mit den durch diesen Kreis gehenden Kugelflächen und nennt diese Beziehung Correlation. Er stellt einen Satz auf über die Erzeugung einer anharmonischen Correlation und giebt einen Ueberblick über die Anwendungen, welche man von diesem Begriffe überall da machen kann, wo der Kreis anstatt der Geraden als Raumelement eingeführt wird. Hieran schliesst sich eine specielle Untersuchung über Kreiscomplexe. Schg.

E. Cosserat. Sur l'emploi du complexe linéaire de droites dans l'étude des systèmes linéaires de cercles. C. R. CVI. 1467-1470.

Die in Strahlen ausartenden Elemente eines linearen Kreissystemes $\mathcal{A}_5$ fünfter Stufe bilden einen linearen Complex und schneiden die in $\mathcal{A}_5$ enthaltene Kugel in Punktepaaren, durch die die Kreise von $\mathcal{A}_5$ gehen. Dieser Satz, sowie die sich aus ihm ergebenden Folgerungen werden ohne Beweis mitgeteilt.

Js.

R. von Lilienthal. Ueber eine besondere Art von Strahlensystemen. Math. Ann. XXXI. 85-95.

In dem Studium specieller Strahlensysteme scheint sich der Mathematik eine reiche Quelle geometrischer Erkenntnis zu erschliessen (vergl. F. d. M. XIX. 1887. 846ff.). Der Verf. erzeugt zu einer Fläche $f = 0$ „covariante" Strahlensysteme auf folgende Weise. (Ausgeschlossen von der Betrachtung sind zunächst alle abwickelbaren Flächen, weil auch ihre Krümmungsmittelpunktsflächen abwickelbar wären, und auch alle die Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen in Curven ausarten.) In jedem Punkte von $f = 0$ denke man sich das rechtwinklige Axenkreuz construirt, gebildet aus der Flächennormale und den beiden Hauptkrümmungsrichtungen; in Bezug auf ein festes Coordinatensystem seien die Cosinus dieser drei Richtungen resp. X, Y, Z; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2. Durch jeden Punkt der Fläche werde dann ein Strahl gezogen, dessen Cosinus ξ, η, ζ durch die Gleichungen:

$$\Sigma\xi X = c_0, \quad \Sigma\xi A_1 = c_1, \quad \Sigma\xi A_2 = c_2, \quad \Sigma c^2 = 1$$

bestimmt sind, d. h. in Worten, jeder Punkt der Fläche sei Ausgangspunkt eines Strahls, welcher mit den drei an jedem Flächenpunkt gegebenen Grundrichtungen constante Winkel bildet.

Dass solche covarianten Strahlensysteme zum mindesten für gewisse Werte der c existiren, ist sofort klar. Wenn $c_0 = 1$ angenommen wird, so hat man das System der Normalen von

f, welches zu der gewöhnlichen Theorie der Flächenkrümmung führt; wird entweder $c_1 = 1$ oder $c_2 = 1$ angenommen, so erhält man die Tangentensysteme der Krümmungslinien, welche in engem Zusammenhang stehen mit der Krümmungstheorie der Krümmungsmittelpunktsflächen (F. d. M. XIX. 1887. 762). Da für jedes dieser beiden Systeme f selbst eine Brennfläche ist, so ist die auf dem Strahl gemessene Abscisse des einen Brennpunkts Null, die des anderen sei R_1 resp. R_2. Diese Strecken spielen in den hier berührten Fragen eine wichtige Rolle; sie stimmen überein mit den von Herrn Böklen definirten „Polstrecken der beiden Hauptschnitte" und mit den geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien.

Von den allgemeinen covarianten Strahlensystemen teilt der Verfasser nur wenige Sätze mit. Ein solches System kann nur dann ein Normalensystem sein, wenn $c_0 = 1$ oder wenn $R_1 : R_2$ constant ist. Auf jedem Strahl liegen die vier bekannten Punkte; der Ort aller Grenzpunkte ist eine Fläche vierter Ordnung, der Ort aller Brennpunkte eine Fläche dritter Ordnung. R. M.

P. H. Schoute. Het lineaire complex en de congruentie. Amst. Versl. en Med. (3) V. 66-99.

Nach Mitteilung einiger allgemeinen Eigenschaften der Complexe und Congruenzen behandelt der Verfasser ausführlich den linearen Complex, wobei insbesondere die Beziehung zwischen Pol und Polare berücksichtigt wird, sodann die Congruenz (1, 1), bei welcher eine doppelt unendliche Zahl von Geraden so im Raume gegeben ist, dass eine durch einen beliebigen Punkt P geht und eine in einer beliebigen Ebene π liegt. Die Eigenschaften dieser Congruenz werden eingehend untersucht und dabei mitgeteilt, was auch von anderen Mathematikern über diesen Gegenstand geschrieben ist. Endlich werden die Systeme von linearen Complexen besprochen und viele neue Eigenschaften derselben angedeutet. G.

R. Sturm. Ueber die Zahl und Lage der singulären Punkte bei den Strahlencongruenzen zweiter Ordnung. Gött. Nachr. 468-476.

Bedeutet n die Klasse einer Congruenz zweiter Ordnung ohne Brenncurve, α_m die Anzahl der singulären Punkte m^{ten} Grades S_m, von welchen ein Kegel (S_m) m^{ter} Ordnung an die Congruenz kommt, so hat Herr Kummer die beiden Beziehungen aufgestellt:

$$\Sigma\alpha_m m^2 = (n+2)^2(n-1), \quad \Sigma\alpha_m m^2(m-1) = (n+1)(n^2-4).$$

Zu diesen Formeln fügt der Herr Verfasser noch die folgenden hinzu:

$$\Sigma\alpha_m m = 4(n+2) \text{ und } \Sigma\alpha_m = 18-n,$$

deren Beweis er später zu veröffentlichen gedenkt.

Diese vier Formeln resp. vier äquivalente werden nun benutzt, um die Zahl der singulären Kegel verschiedener Ordnung zu bestimmen. Es ergiebt sich z. B. der Satz: Ist kein S_{n-1} vorhanden, so ist der höchste Grad eines singulären Punktes gleich vier. Um die gegenseitige Lage der singulären Kegel festzustellen, giebt der Herr Verfasser noch drei Formeln an, aus welchen die Zahl der singulären Punkte jedes Grades, welche auf einem singulären Kegel liegen, sich ergiebt. Diese Formeln umfassen die sieben möglichen Congruenzen. Es folgt z. B.: Ein singulärer Kegel dritter Ordnung geht stets durch 11 singuläre Punkte; ein Kegel zweiter Ordnung geht stets durch neun Punkte.

Zum Schlusse werden die Doppelstrahlen betrachtet und dieselben in „notwendige“ und „mögliche“ unterschieden.

W. St.

M. Pannelli. Sui connessi ternari di 2º ordine e di 2ª classe in involuzione doppia. Batt. G. XXVI. 1-19.

Battaglini hat Nap. Rend. VIII. 1879 den Connex von Punkten und Geraden einer Ebene behandelt, in dem die den Punkten entsprechenden Linien zweiter Klasse eine Schar bilden und die den Geraden entsprechenden Linien zweiter Ordnung einen Büschel

bilden. In vorliegender Arbeit wird die analoge Untersuchung für den Connex durchgeführt, in dem die den Punkten resp. Geraden entsprechenden Kegelschnitte ein Netz von Klassen- resp. Ordnungscurven bilden; die Gleichung eines solchen Connexes würde die Form $f_a F_\alpha + f_b F_\beta + f_c F_\gamma = 0$ haben, wo die f resp. F homogene quadratische Formen der Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3 resp. der Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 sind. R. M.

A. del Re. Le superficie polari congiunte rispetto ad un connesso di piani e di rette ed ad una superficie algebrica fondamentale. Napoli Rend. (2) II. 349-362.

Zwischen den Ebenen und den Geraden des Raumes bestehe eine algebraische Beziehung $C^{(m,r)}$ derart, dass die einer Ebene entsprechenden Geraden einen Complex m^{ter} Ordnung bilden, und dass umgekehrt die einer Geraden entsprechenden Ebenen eine Enveloppe r^{ter} Klasse bilden. Im Raume werde ferner eine algebraische Fundamentalfläche n^{ter} Ordnung $S^{(n)}$ und ein beliebiger Fundamentalpunkt ξ angenommen. Es ergiebt sich alsdann die Frage: Welches ist der Ort der Punkte y, deren Polarebene in Bezug auf $S^{(n)}$ unter den Ebenen enthalten ist, welche im Connex $C^{(m,r)}$ der Geraden (ξ, y) entsprechen? Dieser Ort ist eine Fläche von der Ordnung $r(n-1)+m$; sie soll „conjugirte polare Fläche des Punktes ξ“ heissen; der Punkt ξ, ihr „Pol“, ist ein m-facher Punkt in derselben; ihr Tangentialkegel in ξ ist in dem Complex enthalten, welcher im Connex $C^{(m,r)}$ zu der in Bezug auf $S^{(n)}$ genommenen Polarebene des Punktes ξ gehört. An diese Resultate schliessen sich mehrere Untersuchungen über die Basiselemente des Systems der den verschiedenen Punkten des Raumes conjugirten polaren Flächen, über einige covariante Flächen dieses Systems, endlich eine kurze Anwendung auf die Untersuchung einer ausgedehnten Klasse algebraischer Geradencomplexe. R. M.

E. Schöner. Untersuchungen über das durch zwei kubisch verwandte Ebenen erzeugte Strahlensystem. Diss. München. 34 S. 8°.

C. Schafstein. Ausdehnung eines die geradlinigen Strahlensysteme betreffenden Problems auf die n-dimensionale homogene Raumform. Diss. Bonn. 38 S. 8°.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

L. Autonne. Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. Journ. de Math. (4) IV. 177-247, 407-464.

Nachdem der Herr Verfasser in zwei früheren Aufsätzen in demselben Journale (1885 und 1886) die Gruppen endlicher Ordnung studirt hat, welche in den quadratischen und kubischen „Cremona"-Gruppen enthalten sind, stellt er sich in dieser Arbeit die Aufgabe, die Methoden seiner Untersuchungen auszudehnen auf birationale Substitutionen, welche zwei Reihen von drei homogenen Variabeln x_i, den Coordinaten eines Punktes, und u_i, den Coordinaten einer Geraden einer Ebene, enthalten.

Es sei

$$s = \frac{x_i \quad \varphi(x, u)}{u_i \quad \psi(x, u)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine solche Substitution, in welcher φ_i und ψ_i Ausdrücke bedeuten, welche die x_i und u_i in den durch die ganzen positiven Zahlen a, b, c, d gegebenen Ordnungen enthalten. Diese Substitution heisst birational, wenn:

$$\gamma x_i = \theta_i(\overset{a'}{y}, \overset{b'}{v}), \quad \delta u_i = \eta_i(\overset{c'}{y}, \overset{d'}{v}),$$

wobei:

$$\alpha y_i = \varphi_i(x, u), \quad \beta v_i = \psi_i(x, u),$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Proportionalitätsfactoren und θ_i sowie η_i von derselben Natur wie φ_i und ψ_i sind.

Die Substitution s ist eine Berührungssubstitution, wenn jedes der zwei Gleichungssysteme:

$$\sum_i u_i x_i = \sum_i u_i dx_i = \sum_i x_i du_i = 0$$

und

$$\sum_i y_i v_i = \sum_i v_i dy_i = \sum_i y_i dv_i = 0$$

das andere zur Folge hat.

Der Herr Verfasser nennt nun eine Substitution

$$s = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

„Cremoniane" (crémonienne), wenn sie birational und zugleich Berührungssubstitution ist.

Sind zwei Cremonianen gegeben:

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix}, \quad s' = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(x, u) \\ u_i & \psi'_i(x, u) \end{vmatrix},$$

so heisst die Substitution:

$$\begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \\ u_i & \psi'_i(\varphi, \psi) \end{vmatrix}$$

das Product $s's$ von s' in s, und es wird gezeigt, dass alle Cremonianen eine Gruppe bilden, welche „Cremoniane" Gruppe genannt wird. Mit der Construction der quadratischen Cremonianengruppe, in welcher $a, b, c, d \leq 2$ sind, beschäftigt sich nun der Herr Verfasser ausschliesslich. Diese Aufgabe ist sehr complicirt, und es wird deshalb zunächst in dem ersten Teile der umfangreichen Arbeit eine einzelne Cremoniane Substitution studirt.

Diese wird zurückgeführt auf specielle Substitutionen, für welche eine der Zahlen a, b, c, d Null oder Eins ist, und in welchem Falle die Cremoniane erhalten wird durch Combination einer Substitution „Cremona“ mit der Substitution:

$$\begin{vmatrix} x_i & u_i \\ u_i & x_i \end{vmatrix}.$$

Eine solche specielle Cremoniane wird „Cremonisch“ (crémonique) genannt. Die oben genannte Zurückführung gründet sich auf folgenden Satz: „Jede quadratische Cremoniane, welche nicht Cremonisch ist, ist das Product von zwei oder drei Cremonischen. Hierdurch ist zugleich eine Einteilung der zu betrachtenden Substitutionen in zwei Arten gewonnen. Es werden nun diese Substitutionen der Reihe nach aufgestellt und die Fundamentalelemente und Fundamentalconnexe, welche in Bezug auf eine Cremoniane eine ähnliche Rolle spielen, wie die Fundamentalpunkte und Linien bezüglich einer Substitution „Cremona“, aufgesucht.

In dem zweiten Teile der Arbeit zeigt der Herr Verfasser, wie die Cremonianen zusammengesetzt werden können, um eine quadratische Cremoniane Gruppe endlicher Ordnung zu bilden. Es handelt sich zunächst darum, die Bedingungen festzustellen, unter welchen das Product zweier quadratischen Substitutionen wieder quadratisch ist. Dann werden Substitutionen einfacher Art angegeben, aus welchen jede solche endliche Gruppe zusammensetzbar ist. Es zeigt sich hierbei, dass eine solche Gruppe G holoedrisch isomorph ist einer Gruppe G' von Substitutionen, welche nur eine Reihe von vier homogenen Variabeln enthält und linear ist. Letztere ist aber nicht allgemeiner Natur.

Ist G' bekannt, so kann daraus G abgeleitet werden. Da nun die Construction der allgemeinen linearen quaternären Gruppe endlicher Ordnung noch nicht ausgeführt ist und grosse Schwierigkeiten zu machen scheint, so beschränkt sich der Herr Verfasser auf einzelne specielle Fälle, welche vollständig discutirt werden. W. St.

L. Berzolari. Ricerche sulle trasformazioni piane, univoche, involutorie, e loro applicazione alla determinazione delle involuzioni di quinta classe. Annali di Mat. (2) XVI. 191-278.

Nachdem Herr Caporali den Begriff der Klasse einer involutorischen Transformation der Ebene eingeführt hatte, entstand naturgemäss die Aufgabe, alle Involutionen einer bestimmten Klasse ν aufzusuchen. Diese Aufgabe hat für die Zahlen 1, 2 in vorbildlicher Weise Herr Bertini erledigt, für $\nu = 3, 4$ hat dasselbe Herr Martinetti geleistet. In der vorliegenden Schrift wendet Herr B. die Bertini'schen Methoden und Resultate auf den Fall $\nu = 5$ an. Bei Untersuchungen dieser Art kommt alles auf das Netz der Curven Ω (von der Ordnung $2\nu+1$) an. Jede von ihnen enthält solche Paare der Involution, deren Verbindungslinien durch einen bestimmten festen Punkt der Ebene hindurchgehen. Enthält die Curve der sich selbst entsprechenden Punkte einen r_i-fachen Fundamentalpunkt der Involution λ_i-fach, und kommt derselbe a_{ii}-fach in der ihm entsprechenden Curve r_i^{ter} Ordnung vor, so ist er ein $(r_i-\lambda_i)$-facher Grundpunkt des Netzes (Ω) und alle Ω haben in ihm $a_{ii}-\lambda_i$ Tangenten gemein. Bedeutet ferner s_i die Anzahl der Paare, welche auf einer vom genannten Fundamentalpunkte ausgehenden Geraden liegen, und ist δ_i eine nicht ausserhalb der Grenzen $\nu-1$ und s_i liegende Zahl, so ist nach Herrn Bertini's Entwickelungen

$$r_i-\lambda_i = \nu+\delta_i-2s_i, \quad a_{ii}-\lambda_i=2\delta_i-2s_i.$$

In dem ersten Teil seiner Schrift beschäftigt sich nun Herr B. ausser mit allgemeinen Sätzen, die für seinen engeren Zweck in Betracht kommen, vorzugsweise mit Involutionen speciellen Charakters, bei denen mindestens ein Grundpunkt des Netzes (Ω) ein Fundamentalpunkt mit verschwindendem s_i ist. Neben einem $(2\nu-k)$-fachen Grundpunkt $(k<\nu)$ von (Ω) können nur noch k-, $(k-1)$-, ..., 2-, 1-fache Grundpunkte vorkommen; falls für den ersteren s_i ist, folgert Herr B. mit Benutzung eines von Herrn Martinetti gewonnenen Resultates, dass die Anzahl der k-fachen der der 1-fachen Grundpunkte gleich ist. Nimmt man

an, dass neben einem $(2\nu-k)$-fachen nur k- und 1-fache Grundpunkte vorkommen, so ist $\nu = \frac{k(k+1)}{2}$, und das Netz der Ω ist

$$(\Omega) \equiv [1^{k^2}_{k^2-k}, 2^k, 3^k, \ldots, (2k+2)^k, 2k+3, \ldots, 4k+3)]_{k(k+1)+1}.$$

Der untere Index von 1 bezeichnet, dass alle Ω k^2-k Tangenten im Punkte 1 gemein haben. Die Punkte $1, 2, 4, 5, \ldots, 2k+1$, $2k+2$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ können gegeben und die übrigen alsdann construirt werden. Die Involution ist von der Ordnung k^2+2k+2, hat zum (k^2+k+1)-fachen Fundamentalpunkt 1, zu $(k+1)$-fachen $2, 3, \ldots, 2k+2$, zu einfachen $2k+3, \ldots, 4k+3$. Bei besonderen Annahmen über die Lage der gegebenen Punkte artet die Involution in solche niedrigerer Ordnung aus.

Auf eine zweite Art von Involutionen ν^{ter} Klasse wird Herr B. durch den Satz geführt, dass eine Fundamentalgerade der Involution von jeder Ω nur in einem veränderlichen Punkte geschnitten wird. Dieser Satz nämlich lässt sich nicht allgemein umkehren, sondern man erhält das Theorem: „Wenn in einer Involution ν^{ter} Klasse von zwei Punkten der eine $(2\nu-k)$-, der andere k-fach den Ω angehört, für den ersteren ε_i verschwindet und überdies die ihm entsprechende Curve den anderen k-fach enthält, so ist ihre Verbindungslinie eine Fundamentalgerade, wenn nicht $\nu = k$ ist, ausser den beiden ersten noch zwei andere ν-fache Grundpunkte von (Ω) vorliegen und für alle vier Punkte ε_i verschwindet". Herr B. zeigt nun, dass neben vier solchen ν-fachen Grundpunkten nur noch einfache vorkommen können. Es ist alsdann

$$(\Omega) = (1^\nu, 2^\nu, 3^\nu, 4^\nu, 5, 6, \ldots, 2\nu+4, 2\nu+5)_{2\nu+1}.$$

Die zugehörige Involution ist im allgemeinen von der Ordnung $4\nu+3$, sie besitzt 1, 2, 3, 4 zu $(2\nu+1)$-fachen und $5, 6, \ldots, 2\nu+5$ zu 2-fachen Fundamentalpunkten.

Bei einer Involution fünfter Klasse ergeben sich 15 Combinationen für die Zahlen δ_i, ε_i und somit 15 verschiedene Arten von Fundamentalpunkten, die im Netze der Ω auftreten können. Die Werte $\delta_i = 4$, $\varepsilon_i = 0$ liefern die von Herrn Bertini eingehend untersuchten Jonquières'schen Involutionen. Die Combinationen 4, 1; 4, 2; 4, 3 schliessen sich deshalb aus, weil für sie $a_{ii} = r_i - 1$

sein würde; dies ist aber, falls $\nu > 3$ ist, nur möglich, wenn es sich um eine Jonquières'sche Involution oder einen einfachen Grundpunkt von Ω handelt. Ferner muss $\nu < \frac{1}{2}k(k+1)$ sein, sobald ein $(2\nu - k)$-facher Grundpunkt von (Ω) $\varepsilon_i = 0$ hat; also ist auch die Annahme 3, 0 ($k = 2$) ausgeschlossen. Da endlich bei Involutionen von höherem als dem dritten Grade $a_{ii} = r_i - 2$ nur dann sein kann, wenn $r_i \leqq 5$ ist, so schliesst sich auch die Combination 3, 1 aus. Nach den so erhaltenen Beschränkungen können in einer nicht Jonquières'schen Involution fünfter Klasse 1-, 2-, 3-fache Grundpunkte in (Ω) vorkommen, und es können daneben entweder ein 7-facher oder nur 4-fache oder endlich neben den letzteren ein 6-facher oder 4, 2, 1 5-fache Grundpunkte vorkommen, für alle letzteren ist entweder $\varepsilon_i = 0$ oder $= 1$. Zu jedem erhaltenen Netz (Ω) gehört eine allgemeine Involution, die bei geeigneten Annahmen über die gegebenen Elemente in solche niedrigerer Ordnung ausarten. Auf den Seiten 248-275 giebt Herr B. eine genaue Aufzählung derselben.

E. K.

R. Bettazzi. Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari. Annali di Mat. (2) XVI. 49-60.

Axel Harnack (Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige, Math. Ann. XXIII. 285-288, F. d. M. XVI. 1884. 461) legte sich die Frage vor, wann eine unstetige lineare Punktgruppe auf eine Strecke derart umkehrbar eindeutig abgebildet werden kann, dass die Rangordnung der einander entsprechenden Elemente in beiden Gruppen dieselbe ist, wann nämlich (nach Cantor's Ausdrucksweise) eine unstetige lineare Punktgruppe demselben „Ordnungstypus" wie das Continuum angehört. Die von ihm angegebenen Bedingungen sind aber, wie Herr Bettazzi nachweist, nicht sämtlich notwendig, und der Typus des Continuums ist demnach viel umfassender, als es nach Harnack's Untersuchungen scheinen dürfte.

Herr Bettazzi führt folgende Bezeichnungen ein. Sagt man, dass eine Gruppe „in einem Intervalle $a \dots b$ enthalten ist", so

soll darunter verstanden werden, dass $a \dots b$ das kleinste (Gruppe umfassende Intervall ist. Eine „Succession" ist die von zwei Punkten einer Gruppe, zwischen welchen kein der Gr zugehöriger Punkt liegt. Enthält jede Umgebung eines Pu P, welcher der Gruppe G nicht angehört, links und rech P Punkte von G, so bildet P eine „Lücke". Liegt im Inte $P_1 P_2$, die Grenzpunkte eingeschlossen, kein Element von G, enthält jede linke Umgebung von P_1 und jede rechte Umge von P_2 Elemente von G, so bilden die Punkte P_1, P_2 einen soluten Sprung."

Nun beweist der Verfasser folgende Sätze:

Eine lineare Punktgruppe gehört stets und nur dann Typus des Continuums an, wenn sie keine Successionen Lücken oder absoluten Sprünge besitzt, und die Grenzp des Intervalles umfasst, in welchem sie enthalten ist.

Sei H irgend eine perfecte Gruppe, $P_1 P_2$ eine in H existirende Succession. Verschiebt man einen der Punkte P_2, zum Beispiel P_1, und lässt den anderen P_2 an seiner S oder führt ihn in einen beliebigen Punkt der Strecke $P_1 P_2$ ausgeschlossen) über, so entsteht hieraus eine Gruppe, we dem Typus des Continuums angehört. Umgekehrt kann j Gruppe vom Typus des Continuums auf diese Weise erze werden. Vi.

J. S. Mackay. Similitude and inversion. Edinb. M. Proc. VI. 69-87.

Der folgende Auszug zeigt deutlich den Zweck des A satzes: „Er zielt darauf ab, die Verwandtschaft zu zeigen o besser hervorzuheben, welche zwischen zwei geometrisch Theorien besteht, die in derselben Weise mit einander zusamm hängen wie die arithmetischen Theorien der Multiplication u der Division." (Es hätte angemerkt werden sollen, dass „äh lich" in dem Sinn von „ähnlich und ähnlich liegend" gebrauc ist.) Auf einer Seite werden Sätze über Aehnlichkeit und a der gegenüberstehenden die entsprechenden über Inversion g

geben. In den Constructionen und Beweisen hilft der Gebrauch der Antiparallelen die Verwandtschaft hervorheben.

Cly. (Lp.)

LAURENS. Extrait d'une lettre. Journ. de Math. spéc. (3) II. 158-160, 187.

Hr. G. de Longchamps hat die folgende Transformation „reciprok" genannt (Journ. de Math. spéc. 1882. 49). [Dieselbe rührt nach einer Bemerkung des Hrn. Laurens von Newton her (Lemma XXI der Principia, Lib. I).] Gegeben sind ein fester Hauptpol O, ein fester Nebenpol O'. Zwei Punkte M und M' entsprechen sich, wenn sie mit dem Hauptpole auf einer Geraden liegen und die Strecke MM' vom Nebenpole aus unter einem rechten Winkel erscheint. Hr. Laurens zeigt, wie man in einem Punkte der transformirten Curve die Tangenten construiren kann.

Lp.

M. D'OCAGNE. Relation entre les normales dans une transformation réciproque générale. Journ. de Math. spéc. (3) II. 202-205.

In Folge einer brieflichen Bemerkung (S. 187 des Journ.) von Hrn. Laurens passt die von ihm gegebene Tangentenconstruction, die im vorangehenden Referate erwähnt ist, auch für eine allgemeinere Transformation. Bei dieser entsprechen sich zwei Punkte M und M', wenn MM' von den beiden festen Polen aus unter constanten Winkeln θ, θ' erscheinen. OM' trifft $O'M$ in M''; letzterer Punkt M'' beschreibt eine gewisse Curve U. Man wendet das von Hrn. Laurens angegebene Verfahren auf U und auf die beiden von M und M' beschriebenen Curven V und V' an. Hr. d'Ocagne zeigt, wie man die Normale von V' erhält, falls man die von V kennt, und benutzt sein Verfahren für die Strophoide.

Lp.

M. D'OCAGNE. Remarques sur les transversales réciproques. Journ. de Math. spéc. (3) II. 241-242.

W. Massny. Einige Transformationsmethoden zur Untersuchung der Eigenschaften ebener Curven. Pr. Gross-Strehlitz. 7 S. 4°.

Zwei specielle geometrisch leicht ausführbare Transformationen, welche (unter Zugrundelegung von Polarcoordinaten) dem Punkte $P(r, \varphi)$ den Punkt $P'(r', \varphi')$ zuordnen, wobei im ersten Falle $\varphi' = \varphi$, $r' = r\cos^2\varphi$, im zweiten Falle $\varphi' = \varphi$, $r' =$
R. M.

Cl. Servais. Sur la théorie des transformations. Mathesis VIII. 105-109.

1. Ueber verschiedene ebene Transformationen. 2. Erzeugung der Curven, welche einen vielfachen Punkt im Unendlichen haben. 3. Transformation des Herrn Saltel.
Mn. (Lp.)

Fr. Deruyts. Sur quelques transformations géométriques. Liège Mém. (2) XIV. 14 S.

Anwendung oder Erweiterungen von Untersuchungen des Herrn Le Paige über die Oberflächen oder die kubischen Transformationen. Mn. (Lp.)

G. Lazzeri. Le curve e le sviluppabili multiple di una classe di superficie algebriche. Ven. Ist. Atti (6) VI 1...

A. Brambilla. Sopra una classe di superficie algebriche rappresentabili punto per punto nel piano. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 334-356, 511-520.

Herr Brambilla hat bereits im Jahre 1885 (Torino Atti X... 784, Ref. F. d. M. XVII. 754) einige Resultate seiner einschlägigen Untersuchungen veröffentlicht, ist aber später zeitweise verhindert gewesen, diese Studien weiter fortzusetzen. Inzwischen ist derselbe Gegenstand von Herrn Lazzeri behandelt worden in der ersten der vorliegenden Arbeiten. Darauf hat Herr Brambilla seine Veröffentlichungen fortgesetzt und giebt, wie er sagt, zu der Arbeit des Herrn Lazzeri einige Ergänzungen und Verbesserungen.

Die Grundlage der Betrachtung bildet in beiden Arbeiten folgende räumliche Verwandtschaft. Es seien die homogenen Coordinaten zweier Punkte P und P', bezogen auf zwei beliebige Tetraeder x_k und x'_k ($k = 1, 2, 3, 4$), und es sei, abgesehen von einem Proportionalitätsfactor $x_k = x_k'^n$, so dass jedem Punkte P' ein Punkt P entspricht, jedem Punkte P dagegen n^3 Punkte P'.

Beschreibt nun P' eine Ebene, so beschreibt P eine gewisse Fläche, um deren Untersuchung es sich handelt. Für $n = 2$ erhält man die Steiner'sche Fläche. Auf das Detail kann nicht eingegangen werden. A.

R. Mehmke. Teorems nulik dö kolienat. . Nunel valemik, Spec. numb. London 1888.

R. Mehmke. Teorems nulik dö kolienat. (For.) Nunel valemik. Yelüp I, nüm 1. London 1888.

Bei der Untersuchung der linearen Transformation räumlicher Punktsysteme haben sich Herrn Mehmke im Jahre 1876 „Neue Sätze über Collineation“ ergeben, mit deren Veröffentlichung er im Nunel valemik (einer englischen Volapükzeitschrift) begonnen hat. Von den 18 ohne Beweis gegebenen Sätzen, welche bis jetzt vorliegen, sollen die beiden folgenden (Nr. 8 und 10 der Abhandlung) hier als Beispiele gegeben werden. (a, b) bezeichnen den Abstand des Punktes a vom Punkte b, (a, β) den Abstand des Punktes a von der Ebene β; ferner sei k das Krümmungsmass einer Fläche in dem Punkte a, t das Torsionsmass einer Raumcurve im Punkte a. Aendert sich nun ein Punktsystem im Raume so, dass die Punkte einer Geraden auch nach der Bewegung in einer Geraden liegen, so bleiben gewisse Ausdrücke unverändert, sind „linear unveränderlich“, z. B.:

1. Sind k und k' die Krümmungsmasse zweier Flächen in den beliebigen Punkten a und a', α und α' ihre Tangentialebenen in diesen Punkten, x ein beliebiger Punkt und ζ eine beliebige Ebene im Raume, so ist

$$\left(\frac{(a,\xi)}{(a,x)}:\frac{(a',\xi)}{(a',x)}\right)^4(k:k')$$

linear unveränderlich.

2. Sind t und t' die Torsionsmasse zweier Raumcurv den Punkten a und a', α und α' ihre Schmiegungsebe diesen Punkten, x ein beliebiger Punkt und ζ eine beli Ebene im Raume, so ist

$$\left(\frac{(a,x)}{(a,\xi)}:\frac{(a',x)}{(a',\xi)}\right)^2(t:t')$$

linear unveränderlich. Scht

Ph. Brückel. Untersuchungen über die reciproke wandtschaft in der Ebene. Diss. Giessen. 19 S. 4°.

B. Conforme Abbildung.

P. G. Laurin. Sur la transformation isogonale défi par une fonction rationnelle. Akad. Abh. Lund.

Durch die Gleichung

$$(1)\qquad (\xi+\eta i)=f(x+yi)$$

wird eine isogonale Verwandtschaft zwischen den $(\xi\eta)$- u (xy)-Ebenen definirt. Da die Gleichung in die folgenden Gl chungen aufgelöst werden kann:

$$(2)\qquad \xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y),$$

so gehört die Transformation zu denjenigen von Clebsch u Gordan untersuchten Transformationen, die nur für gewi Curven eindeutig sind. Die allgemeine Theorie dieser Tra formationen wird im ersten Teile der Abhandlung vervollständ durch die Untersuchung von Fundamentalpunkten in der $(\xi\eta)$-Eben und von Fundamentalcurven in der (xy)-Ebene.

Der Verfasser geht jedoch nicht von den Gleichungen (2

sondern von den folgenden aus:

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi + \eta i = f(x+yi), \\ \xi - \eta i = f(x-yi). \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen eine Verwandtschaft der Strahlenbüschel durch die unendlichen imaginären Kreispunkte I und J der beiden Ebenen. [Wenn f eine rationale Function vom Grade n ist, entsprechen n (xy)-Strahlen einem $(\xi\eta)$-Strahle, und folglich n^2 (xy)-Punkte einem $(\xi\eta)$-Punkte. Wenn der $(\xi\eta)$-Punkt reell ist, sind die beiden I- und J-Strahlen nach demselben conjugirt und also auch die entsprechenden (xy)-Strahlen paarweise conjugirt: dann sind n (xy)-Punkte reell und die übrigen imaginär. Wenn man die Verwandtschaft (1) im functionentheoretischen Interesse untersucht hat, so ist nur die Verwandtschaft der reellen Punkte studirt worden. Um die allgemeine Theorie dieser Verwandtschaft aufstellen zu können, muss man auch die imaginären Punkte berücksichtigen.]

1) $f(x+yi)$ sei eine ganze Function vom Grade n.

Die Jacobi'sche Curve des Netzes der Transformationscurven $(a\varphi + b\psi + c = 0)$ ist $z^{n-1} . f'(x+yi) . f'(x-yi) = 0$ und besteht also aus I- und J-Strahlen. Diese Strahlen, sowie auch die entsprechenden $(\xi\eta)$-Strahlen, werden Coïncidenzlinien genannt. Im Netze giebt es keine Fundamentalpunkte (feste Punkte).

Die Transformation eines Curvenzweiges in der $(\xi\eta)$-Ebene wird untersucht, wobei alle denkbaren Lagen in Bezug auf die Coïncidenzlinien berücksichtigt werden. Mittels der gefundenen Transformationsformeln werden allgemeine Formeln für die Charaktere μ', ν', $\varkappa'$ der einer gegebenen $(\xi\eta)$-Curve entsprechenden (xy)-Curve berechnet. Wenn z. B. die $(\xi\eta)$-Curve eine generelle Lage in Bezug auf die Coïncidenzlinien hat, findet man $\mu' = n\mu$, $\nu' = n^2\nu + n(n-1)\mu$, $\mu' = n^2\varkappa$. In diesem Falle können auch δ' und p' direct berechnet werden: nämlich $\delta' = n^2\delta$ und $p' = n^2 p + \frac{1}{2}n(n-1) . \mu - n^2 + 1$.

[Als Beispiel des Einflusses eines Curvenzweiges von specieller Lage mag angeführt werden, dass, wenn die $(\xi\eta)$-Curve eine einfache Berührung mit der ∞-Linie hat, die (xy)-Curve n unendliche höhere Singularitäten bekommt, von denen jede, wenn

n gerade ist, mit $\frac{n}{2}$ Doppelpunkten und, wenn n ungerade, mit einem Rückkehrpunkte und $\frac{n-3}{2}$ Doppelpunkten äquivalent ist.]

Auf ähnliche Weise wird die Transformation von der (xy)-Ebene in die $(\xi\eta)$-Ebene untersucht.

2) $f(x+yi)$ sei eine gebrochene rationale Function, deren Zähler vom Grade n und deren Nenner vom Grade $(n-m)$ sei:

$$\xi + \eta i = \frac{F(x+yi)}{z^m . f(x+yi)} = \varphi(x+yi).$$

Die Jacobi'sche Curve besteht teils aus den Fundamentallinien

$$f(x+yi) . f(x-yi) = 0,$$

teils aus den Coïncidenzlinien

$$z^{m-1} . \varphi'(x+yi) . \varphi'(x-yi) = 0.$$

Jenen entsprechen die Fundamentalpunkte I und J der $(\xi\eta)$-Ebene. In der (xy)-Ebene giebt es folgende Fundamentalpunkte: die $(n-m)^2$ endlichen Schnittpunkte zwischen $f(x+yi)=0$ und $f(x-yi)=0$, durch welche jede Transformationscurve einmal geht, und die beiden Punkte I und J, wo jede Transformationscurve $n-m$ Zweige hat, welche einen Contact m^{ter} Ordnung mit $f(x+yi)=0$ und $f(x-yi)=0$ besitzen. Die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte zweier Transformationscurven ist folglich

$$(2n-m)^2-(n-m)^2-2n(n-m) = n^2.$$

Die Fundamentallinie $\xi = 0$ entspricht den Fundamentalpunkten der (xy)-Ebene.

Die Transformation eines Curvenzweiges wird in ähnlicher Weise wie in (1) untersucht, und allgemeine Formeln für die Veränderungen der Plücker'schen Charaktere werden berechnet. Wenn z. B. die $(\xi\eta)$-Curve eine generelle Lage hat, bekommt die (xy)-Curve folgende Charaktere:

$$\mu' = (2n-m) . \mu, \quad \nu' = n^2\nu + (2n^2-m^2-m)\mu, \quad \varkappa' = n^2\varkappa.$$

Und bei birationaler Transformation der (xy)-Ebene bekommt die $(\xi\eta)$-Curve folgende Charaktere:

$$\mu' = (2n-m)\mu, \quad \nu' = \nu + 2(2n-m-1)\mu, \quad \varkappa' = \varkappa, \quad p' = p.$$

In ähnlicher Weise wird der Fall untersucht, dass der Grad des Nenners höher als derjenige des Zählers ist.

3) Die gewonnenen Resultate werden auf die Transformationen von Geraden und Kegelschnitten angewandt. Hiervon mag ein Beispiel angeführt werden. Die charakteristischen Formeln bei der Transformation des Kreises zeigen, dass ein (xy)-Kreis in eine Ellipse oder Hyperbel durch die Transformation

$$(1) \qquad \xi+\eta i=\frac{a(x+yi)+1}{b(x+yi)^2+c(x+yi)+d}$$

übergeht, vorausgesetzt, dass der Kreis durch zwei von den Punkten geht, die durch

$$(2) \qquad b(x+yi)^2+c(x+yi)+d=0,$$

$$(3) \qquad b(x-yi)^2+c(x-yi)+d=0$$

bestimmt sind.

Wenn diese beiden Punkte imaginär sind, so bekommt die entsprechende Curve imaginäre unendliche Zweige und ist folglich eine Ellipse.

Man findet deshalb leicht, dass, wenn der Kreis

$$(4) \qquad x^2+y^2=1$$

in eine Ellipse übergehen soll, die Gleichung (2) reelle Wurzeln haben und $d=b$ sein muss. Eine einfache Elimination von x und y aus (1), (2) und

$$\xi-\eta i=\frac{a(x-yi)+1}{b(x-yi)^2+c(x-yi)+b}$$

giebt

$$\xi^2(c^2-4b^2)+\eta^2(2ab-c)^2+2\xi(2b-ac)+(a^2-1)=0.$$

Dies ist eine Ellipse, wenn $c^2>4b^2$, d. h. wenn (2) reelle Wurzeln hat. Die Transformation ist birational und verfügt über drei Constanten, die nur die Bedingung $c^2>4b^2$ erfüllen müssen.

Der Kreis $x^2+y^2=r^2$ geht durch die Transformation

$$\xi+\eta i=\frac{ra(x+yi)+r^2}{b(x+yi)^2+cr(x+yi)+br^2}$$

in dieselbe Ellipse über.

4) Am Schluss zeigt der Verfasser, dass die Untersuc
einer isogonalen Verwandtschaft, die durch eine algebrai
nicht-rationale Function, $f(\xi+\eta i, x+yi)=0$ oder $f(v, u)$
bestimmt ist, durch die Untersuchung von rationalen Functi
erledigt werden kann. Die Gleichung $f(v,u)=0$ kann d
eine algebraische Curve repräsentirt werden. Die singul
Punkte und die Punkte, in denen die Tangente parallel
Coordinatenaxe ist, bestimmen Coincidenzen für u oder v,
die Coincidenzlinien der Transformation. Die Asymptoten,
einer Coordinatenaxe parallel sind, bestimmen die Fundame
linien. Der Einfluss einer Singularität kann auf folgende W
näher untersucht werden. In der Nähe der entsprechenden W
von u und v ist die Transformation charakterisirt durch

$$x+yi=\alpha^l,\quad \xi+\eta i=M\alpha^l+M_1\alpha^m+\cdots,$$
$$x-yi=\beta^p,\quad \xi-\eta i=R\beta^p+R_1\beta^r+\cdots.$$

Wenn nun α, β einen Punkt in einer Hülfsebene bestimm
so kann man erstens die Transformation von der (xy)-Eb
zur $(\alpha\beta)$-Ebene, dann diejenige von der $(\alpha\beta)$-Ebene zur $(\xi\eta)$-Eb
verfolgen. Diese Correspondenzen sind durch rationale Fu
tionen bestimmt. Schliesslich kann der Einfluss der unendlic
Punkte dadurch gefunden werden, dass man $\frac{1}{u}$ und $\frac{1}{v}$ stat
und v einführt, und die neue Curve im Anfangspunkte untersuc

Wenn $f(v,u)=0$ eine generelle Curve vom Grade
ist, findet man, bei birationaler Transformation: $\mu'=n$
$\nu'=n^2\nu+2n^2(n-1)\mu$, $x'=n^2x$, $p'=n^2p+n^2(n-1)\mu-n^2+$

K.

R. MARCOLONGO. Sulla rappresentazione conforme dell pseudosfera e sue applicazioni. Napoli Rend. (2) II. 111-11

E. FERGOLA, G. BATTAGLINI. Rapporto. Daselbst. 110-111

Bei der vom Verfasser behandelten conformen Abbildun
der Pseudosphäre auf der Ebene entsprechen den aus einem be
stimmten Punkte der Fläche ausgehenden geodätischen Lini
die Strahlen eines Büschels, den orthogonalen Trajectorien der

selben die um den Mittelpunkt des Büschels gezogenen concentrischen Kreise. Durch Anwendung eines bekannten Liouville'schen Satzes erhält der Verfasser als die Abbildung einer beliebigen geodätischen Linie der Fläche eine Curve von der achten Ordnung, welche aber in vier Kreislinien zerfällt, von denen nur eine die Abbildung der geodätischen Linie darstellt.

Darauf wendet er die erhaltenen Resultate auf die Begründung der zwei folgenden Sätze an:

Die geodätischen Linien, welche auf den Seiten eines geodätischen Dreiecks in den Mittelpunkten derselben senkrecht stehen, gehen durch einen und denselben Punkt, nämlich durch den Mittelpunkt des umbeschriebenen geodätischen Kreises.

Die geodätischen Höhen eines geodätischen Dreiecks gehen durch einen und denselben Punkt.

Es möge bemerkt werden, dass der erste dieser Sätze sich aus dem entsprechenden planimetrischen Satze unmittelbar ableiten lässt, wenn man erwägt, dass der Beweis dieses letzten Satzes von dem euklidischen Postulatum unabhängig ist, also auf der Lobatschewsky'schen Ebene (Pseudosphäre) seine Gültigkeit behält. Vi.

H. Stahl. Ueber die conforme Abbildung durch die lineare Substitution. (Aus den Uebungen des mathematisch-physikalischen Seminars zu Tübingen mitgeteilt.) Böklen Mitt. II. 161-177.

Der Gegenstand ist, wie der Herr Verfasser einleitend bemerkt, ausführlich von Herrn Holzmüller (Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften Cap. III. Leipzig, Teubner 1882) behandelt. Wegen der Beziehung zu den Fuchs'schen Functionen und gewisser Sätze der Herren Klein und Poincaré hielt der Herr Verfasser eine erneute Zusammenstellung für nötig. Sind also

$$Z = X+iY, \quad z = x+iy$$

zwei in der bekannten Weise dargestellte complexe Variabeln, so

handelt es sich um die rationale Substitution erster Ordnun

$$Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

und die ihr entsprechende conforme Abbildung, welche zun für reelle, dann für complexe α, β, γ, δ besprochen wird. Es gezeigt, dass die Verwandtschaft zwischen den Ebenen d und z die Möbius'sche Kreisverwandtschaft ist, dass sie wenn man beide Ebenen mit den entsprechenden Axen Deckung bringt, durch zweimalige Abbildung nach recipr Radien vermitteln lässt, und dass je nach Beschaffenheit Constanten α, β, γ, δ vier verschiedene Fälle unterschieden we können: die parabolische, elliptische, hyperbolische und die l dromische Substitution. Diese Fälle unterscheiden sich in Beschaffenheit der invarianten Curven, d. h. derjenigen Cur welche, wenn man beide Ebenen zur Deckung bringt, als Ga betrachtet, aufeinander fallen. Diese sind in den drei er Fällen parabolische, elliptische oder hyperbolische Kreisschar im letzten Falle logarithmische Spiralen.

Ein Capitel beschäftigt sich mit der Betrachtung eini invarianten analytischen Ausdrücke. Invariant ist z. B. d Doppelverhältnis aus vier Punkten, und durch Trennung Reellen und Imaginären erhält man erstens ein invarian Doppelverhältnis von vier Strecken und zweitens eine invaria Doppeldifferenz ihrer vier Richtungen. Besonders hervorzuheb sind gewisse invariante Differential-Ausdrücke. Bei der hyperbo schen Substitution giebt es z. B. zwei invariante Punkte ζ_1 u ζ_2, und es ist

$$\frac{dZ}{(Z-\zeta_1)(Z-\zeta_2)} = \frac{dz}{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)}.$$

Hieraus folgen durch Trennung des Reellen und des Imaginär die Formeln

$$\frac{dS}{R_1 R_2} = \frac{ds}{r_1 r_2}, \quad \Phi-(\Phi_1+\Phi_2) = \varphi-(\varphi_1+\varphi_2),$$

wo dS und ds die von Z und z beschriebenen Bogenelemente, Φ und φ die Winkel derselben mit der reellen Axe bedeuten, während $(Z-\zeta_1) = R_1 e^{i\Phi_1}$ etc. ist. Durch diese Gleichung wird die

Vergrösserung und die Drehung an der betreffenden Stelle der Abbildung angegeben. Aehnliche invariante Differentialausdrücke lassen sich auch bei nicht hyperbolischer Substitution bilden. Ebenso folgt die Invarianz der Integrale

$$\int \frac{ds}{r_1 r_2} \text{ und } \iint \frac{dF}{r_1^2 r_2^2},$$

deren erstes sich auf eine beliebige Curve, deren zweites sich auf ein beliebiges Flächenstück bezieht. Ein Schlussabschnitt ist der Abbildung gegebener Curven gewidmet, die an einfachen Beispielen erläutert wird. A.

P. Painlevé. Sur la représentation conforme de polygones. C. R. CVI. 473-476.

Es handelt sich um conforme Abbildungen von Polygonen, deren Seiten gerade Linien oder Kreisbogen sind, in ähnlicher Weise wie in den bekannten Untersuchungen des Herrn Klein. Die Abbildung wird vermittelt durch eine Gleichung von der Form:

$$E\left(\frac{aZ+b}{cZ+d}\right) = R(z),$$

wo $E(Z)$ die kanonische Invariante ist, welche einer der endlichen Gruppen linearer Substitutionen bei einer Variable zugehört, $R(z)$ eine rationale Function bedeutet. Die Coefficienten von $E(Z)$ sind reell, die Coefficienten von $R(z)$ müssen, wie der Verfasser zeigt, unter den zu Grunde liegenden Voraussetzungen ebenfalls reell sein.

Hieran werden verschiedene Folgerungen geknüpft, u. a. wird auch der Zusammenhang der gefundenen Polygone mit gewissen Minimalflächen erwähnt. Eine ausführlichere Mitteilung soll folgen. A.

F. Buchwaldt. Om dreinings fladers konforme Fremstilling i Planen. Zeuthen Tidss. (5) VI. 73-96.

Der Verfasser giebt verschiedene Sätze über die conforme

Abbildung der Umdrehungsflächen auf eine Ebene. Z
werden die Transformationen untersucht, mittels welche
Abbildung geschehen kann. Darauf werden die so gefun
Sätze dazu verwendet, solche Abbildungen auf die Ebe
finden, in welchen die Verhältnisse der Massstäbe so wenig
möglich variiren. Unter dem Verhältnis des Massstabs ve
der Verfasser das Verhältnis eines Curvenelements auf de
gebenen Umdrehungsfläche zu dem entsprechenden Eleme
der Abbildung. V

R. A. Harris. The theory of images in the repre tation of functions. Annals of Math. IV. 65-86 u. 128.

Diese „Theorie" ist nichts anderes als die conforme bildung einer Ebene auf einer andern. Zwei complexe Varia $z = x + iy$ und $Z = X + iY$ seien durch die Gleichung $\Phi(z, Z)$ verbunden. Beschreibt z in seiner Ebene einen beliebigen W so soll der zugehörige Weg von Z das „Bild" des erst heissen. Diese Abbildung discutirt der Verfasser für spec Fälle der Function Φ, nämlich für einfache rationale Fu der ersten vier Grade und für die Functionen e^z, $\sin z$, $\cos z$, sin a Letzterer Fall und der der allgemeinen Gleichung zweiten (des sind besonders durchgeführt und durch Tabellen und Fig anschaulich gemacht. Angehängt ist eine kurze Notiz über d dimensionale Abbildung. R. M.

A. A. Markoff. Zur Frage über die Kartenprojection Chark. Ges. (2) I. 113-128.

Der Inhalt des Aufsatzes besteht der Hauptsache nach der Lösung folgender Aufgabe:

Es werden alle derartige Abbildungen der Kugelfläche a einer Ebene gesucht, bei welchen jeder grösste Kreis der Kug sich auf der Ebene auch als Kreis abbildet.

Mit Hülfe der Lösung dieser Aufgabe beweist der Verfasser dass von allen Abbildungen der Kugel auf einer Ebene nur d

stereographische Projection die Eigenschaft besitzt, dass jedem Kreise der Kugel auf der Ebene ein Kreis entspricht.

Der letzte Satz wurde vom Verfasser im Jahre 1884 als eine der Thesen zur Doctordissertation veröffentlicht.

Bb.

W. DUDENSING. Ueber einige Probleme der conformen Abbildung. Diss. Leipzig. 31 S. 4°.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

O. Rausenberger. Lehrbuch der analytischen Mechanik. Erster Band: Mechanik der materiellen Punkte. Zweiter Band: Mechanik der zusammenhängenden Körper. Leipzig. B. G. Teubner. VIII u. 318, VI u. 335 S. gr. 8°.

Der erste Band, Mechanik der materiellen Punkte, behandelt in vier Abschnitten: I. Die freie Bewegung materieller Punkte; darin im Anschluss an die Centralbewegung die planetarischen Störungen erster Ordnung und die Elemente der Mondtheorie nebst einem rein analytischen Paragraphen über die Entwickelung von $(1-2q\cos\varphi+q^2)^{-r}$ in eine Reihe $\Sigma C_k \cos k\varphi$ und ähnliche Aufgaben. II. Die unfreie Bewegung materieller Punkte auf Curven und Flächen, zum Schluss die relative Bewegung auf der Oberfläche der rotirenden Erde in nur skizzenhafter Darstellung. III. Die Principien der Mechanik und die Differentialgleichungen der Bewegung in allgemeiner Behandlung. Hierzu als analytische Beigaben: Untersuchungen über Systeme totaler Differentialgleichungen, die Elemente der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und ein Paragraph über elliptische Coordinaten. IV. Das Potential mit

Digressionen über das Dirichlet'sche Princip, die Theorie der Kugelfunctionen und die Abbildung durch reciproke Fahrstrahlen.

Der zweite Band, Mechanik der zusammenhängenden Körper, zerfällt ebenfalls in vier Abschnitte, die fortlaufend gezählt sind. Der Inhalt von Abschnitt V, Mechanik der unelastisch festen (starren) Körper, stimmt mit demjenigen überein, was die sonstigen Lehrbücher der Mechanik zu bringen pflegen. Der VI. Abschnitt liefert eine gedrängte Uebersicht der Elasticitätslehre nebst den wichtigsten physikalischen, besonders akustischen Problemen aus ihr. Eingefügt ist ein Paragraph über Fourier'sche Reihen. Im VII. Abschnitte werden, nach Wiedergabe der in allen Lehrbüchern entwickelten Grundgleichungen der Hydromechanik und nach der Lösung der ersten hierher gehörigen Probleme, die Theorie der Ebbe und Flut, die der Meeresströmungen sowie der Capillarität kurz besprochen. Besonders aber gelangen die Ergebnisse der Kirchhoff'schen und v. Helmholtz'schen Untersuchungen über die Flüssigkeitsstrahlen und Wirbelbewegungen im Auszuge zur Darstellung, und hierbei wird ein Paragraph über conforme Abbildung eingeschaltet. Während jeder dieser drei ersten Abschnitte etwa je 100 Seiten umfasst, enthält der VIII. Abschnitt auf nur 28 Seiten die Aëromechanik, aus welcher ausser den üblichen Gegenständen die Schallschwingungen in Gasen und die Theorie der cylindrischen Pfeifen zu erwähnen sind.

Der Verf. beabsichtigte, ein Lehrbuch zu schreiben, das mehr eine übersichtliche Darstellung des Vorhandenen, als neue Leistungen ins Auge zu fassen hätte. Zur Erleichterung des Verständnisses hat er nach dem Beispiele mancher älteren Werke alle specielleren mathematischen Theorien in die Darstellung mit aufgenommen. Besondere Beispiele sind in geringer Zahl durchgeführt; somit trägt das Werk in mancher Hinsicht den Charakter akademischer Vorlesungen (die vom Verf. im Sommer 1874 bei Hrn. Königsberger gehörten werden in der Vorrede ausdrücklich erwähnt). Der Darstellung der Grundlagen versichert der Verf. eine besondere Aufmerksamkeit geschenkt zu haben; doch ist gegen die gewählte Fassung mancher Einwand zu er-

heben. Die neueste Literatur ist nicht immer genügend berücksichtigt. So sind unter den letzten Arbeiten über das Beharrungsgesetz die von J. J. Thomson und Ludw. Lange übersehen worden (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 798, XVII. 1885. 816 ff., XVIII 1886. 812). — Die Monographie von Amodeo über die Tautochronen (F. d. M. XV. 1883. 808) giebt ferner über das von diesem behandelte Thema vollständige Literaturnachweise, so dass die vom Verf. angeführten Quellen dagegen lückenhaft erscheinen.

Ueberblickt man den Inhalt des ganzen Werkes, so ist anzuerkennen, dass es mehr Stoff in das Gebiet der analytischen Mechanik hineinzieht, als sonst zu geschehen pflegt. Für solche Studirende, welche sich Einzelwerke über die verschiedenen Zweige der Wissenschaft nicht anschaffen wollen oder können, und denen es genügt, das Hauptsächliche über die Principien der abgehandelten Gegenstände zu besitzen, dürfte das Lehrbuch gute Dienste leisten; die gegebenen Verweise auf Originalarbeiten hervorragender Mathematiker, obschon nicht vollständig, dienen dann weiter dazu, auf die Fortführung der Studien hinzuwirken. Zum ersten Selbststudium scheint es dem Ref. jedoch etwas schwierig, weil die Darstellung oft knapp ist. So ist der Verf. sehr sparsam mit der Beigabe von Figuren gewesen, und wenn auch Lagrange die Abwesenheit aller Figuren in seiner Mécanique analytique als einen eigentümlichen Vorzug hervorhebt, so ist doch dieses berühmte Vorbild nicht gerade als Lehrbuch zur ersten Einführung in die Mechanik geeignet. Lp.

A. Bieler. Leitfaden und Repetitorium der Analytischen Mechanik. Für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen. Erster Teil: Analytische Statik der festen Körper. Zweiter Teil: Analytische Dynamik der festen Körper. Leipzig. W. Violet. VI u. 87 S., IV u. 91 S. 8°.

Der Leitfaden soll nach Ansicht des Verfassers zur Repetition beim ersten Studium in der analytischen Mechanik dienen

und bietet daher unter Ausschluss einiger elementaren Betrachtungen nur das Notwendigste. Das „Taschenbuch der Mechanik" von Ligowski (F. d. M. XVI. 1884. 750) giebt auf 132 Seiten bedeutend mehr. Einiges hätte eben kürzer dargestellt oder auch ausgeschieden werden können. Die Anziehung einer homogenen Kugelfläche auf einen Punkt ist dabei bis zu einer Integration geführt, welche in der dargebotenen Form schwerlich vollendet werden dürfte, weil die nachher in der Anziehung einer homogenen Hohlkugel richtig gewählte Variable nicht eingeführt ist. Die weitläufig durchgeführte Bewegung eines schweren Punktes auf der Curve $9py^2 = (x-3p)^2x$ hat kein Recht auf den Platz von mehr als 7 Seiten in einem so kurzen Leitfaden, in welchem der Planetenbewegung nur zwei Seiten gegönnt sind. Lp.

S. D. Poisson. Lehrbuch der analytischen Mechanik. Deutsch herausgegeben und mit einem Anhange versehen von A. Pfannstiel. 1. u. 2. Lieferung. Dortmund. Hermann Meyer. IV u. 224 S.

Poisson's Traité de mécanique ist schon öfter ins Deutsche übersetzt worden, nach der ersten Auflage von 1811 durch J. C. E. Schmidt (Stuttgart u. Tübingen. 1825 u. 1826), nach der zweiten von 1833 durch M. A. Stern (Berlin. Georg Reimer 1835 und 1836). Diese letztere vortreffliche Uebersetzung des hochverdienten noch lebenden Mathematikers ist zuletzt zu herabgesetztem Preise vom Verleger ausverkauft worden. Es scheint, dass der jetzige Uebersetzer beim Beginn seines Unternehmens die früheren deutschen Uebersetzungen nicht gekannt hat; wenigstens schweigt die Vorrede hierüber, in welcher die Bedürfnisfrage der neuen Uebersetzung erörtert wird.

Es ist an dieser Stelle überflüssig, den Wert von Poisson's Werk hervorzuheben; eine andere Frage ist es, ob der deutsche Studirende der heutigen Zeit nicht lieber auf Schell verwiesen werden soll, um in die Fragen eingeführt zu werden, welche jetzt die Wissenschaft beschäftigen.

Der Uebersetzer verspricht, bezügliche Ergänzungen in einem

Anhange zu geben. Da nun der Redaction bisher nur die den ersten Lieferungen zugegangen sind (bis § 149 im C über die krummlinige Bewegung reichend), so muss das K über die Uebersetzung und über den versprochenen Anhan zur Vollendung und vollständigen Einsendung des Werkes geschoben werden. Lp

---

Weitere Lehrbücher.

APPELL. Cours de mécanique rationnelle, professé à la Faculté des sciences de Paris. Rédigé par Abr... et Delassus. Paris. 436 S. 4°. (lithogr.)

E. AVELING. Mechanics. London. Chapman and Hall.
Anzeige in Nature XXXVIII. 587-588.

R. S. BALL. Experimental Mechanics. Course of lectures delivered at the Royal College of Science Ireland. 2nd ed. London. 350 S. 8°.

A. FLAMAND. Cours de mécanique générale, profe... à l'École centrale des arts et manufactures. Par...

GRAINDORGE. Cours de mécanique analytique. T. Cinématique et statique. (1888). II. Dynami... (1889). Paris. Gauthier-Villars et Fils.

F. H. JULIUS. Leerboek der Mechanica. Zwolle. VIII 368 S. 8°.

R. H. PINKERTON. Dynamics and hydrostatics. Lo... Blackie and Son.

Nach der Anzeige in Nature XXXVII. 412 ein Lehrb... welches nur die Kenntnisse der elementaren Mathematik vor... setzt, sonst aber sorgfältig gearbeitet ist und durchweg die f... damentalen Einheiten zur Anwendung bringt. Lp.

J. E. TAYLOR. Theoretical Mechanics. London. 252 S.

J. WEISBACH. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschin... Mechanik. (In 3 Teilen). Zweite umgearbeitete u... verm. Aufl. von G. Hermann. III: Die Mechani...

der Zwischen- und Arbeitsmaschinen. Abteilung III: Die Maschinen zur Formveränderung. Braunschweig.

G. WEISBACH. Meccanica razionale. Traduzione di G. Sacheri sulla 5ª edizione tedesca riveduta e ampliata da G. Hermann. (In 3 vol. con 1034 incisioni). Vol. II. Applicazione della statica alla elasticità e resistenza dei materiali. Dinamica dei solidi. Torino.

F. S. DAURER. Uebungsbuch zum Studium der elementaren Mechanik. Eine Aufgabensammlung für Lehrer und Studirende an mittleren und höheren Unterrichtsanstalten. Wien. A. Hölder (1889). VIII u. 141 S. gr. 8°.

Der Verfasser der Aufgabensammlung ist Professor an einer Wiener Oberrealschule, und der Kreis der gestellten Fragen umfasst daher die an einer solchen Lehranstalt behandelten Gegenstände. Unter den Titeln Geomechanik, Hydromechanik, Aëromechanik werden 506 fortlaufend numerirte Aufgaben gestellt, deren Lösungen in einem zweiten Teile beigegeben sind. Ein Anhang enthält manche Tabellen über Masseinheiten und wichtige physikaliche Constanten. Die Aufgaben sind geschickt gewählt und dem Zwecke angemessen behandelt. Das Uebungsbuch wird demnach seinen Zweck erfolgreich erfüllen.

Lp.

R. G. BLAINE. Numerical examples in practical mechanics and machine design. London. Cassell and Co.

Anzeige in Nature XXXVIII. 563-564.

E. GELCICH. Entwurf einer Geschichte der Gesetze des Stosses. Schlömilch Z. XXXIII. Hl. A. 41-58, 81-89.

Ohne auf die schon vorhandenen Darstellungen der Geschichte des Stosses Bezug zu nehmen, bespricht der Verfasser nach der

historischen Folge und nach der Entstehung der Begriffe Ansichten der einzelnen Forscher. Grössere Abschnitte f hierbei auf Descartes, Marcus Marci, Wallis, Wren, Huy Kästner, Lambert, Euler, Karsten, Mariotte, Nollet (den Erfi der Percussionsmaschine in ihrer jetzigen Gestalt), Musse broek, Maupertuis, Mersenne. Lp.

Th. Beck. Historische Notizen. Civiling. (2) XXXIV. 561-575, 737-766.

Von den drei Abhandlungen hat nur die erste für Mathematiker Interesse; sie beschäftigt sich mit Leonardo Vinci. Nach einer Beschreibung des äusseren Lebenslaufes w den die Bedeutung und die Entdeckungen des grossen Künstl auf dem Gebiete der Mechanik und des Maschinenwesens würdigt. Die zweite Note bezieht sich auf Vanuccio Biringuc (1540), welcher namentlich für die Metallurgie von Bedeutu ist, während die dritte einem Deutschen, Georgius Agrico (1490-1555) gewidmet ist, dem wir eine sorgfältige Beschreibu des Berg- und Hüttenwesens seiner Zeit verdanken. F. K.

W. Winter. Ueber absolute Mass-Systeme. Exner R. XXIV. 471-485.

Die Abhandlung des Verfassers „Ueber die Dimension der abgeleiteten Grössen absoluter Mass-Systeme" aus Exne Rep. XXI ist F. d. M. XVII. 1885. 819 angezeigt worden. Di vorliegende Arbeit ist als Fortsetzung jener früheren anzusehen und wir verweisen daher auf den Bericht a. a. O.

Der Verfasser geht von der Forderung aus, dass von de bisher als absolut angenommenen Einheiten C, G, S einige oder alle so bestimmt werden sollen, dass 1) die Krafteinheit, welche der trägen Masseneinheit die Beschleunigungseinheit erteilt, gleich derjenigen Krafteinheit sein soll, mit welcher die Masseneinheit eine gleich grosse im Abstande 1 anzieht; dass 2) die Einheiten des elektrostatischen Systems von denen des elektrodynamischen

icht mehr verschieden sein sollen. Diese letztere Bedingung ;eht zunächst in die einzige über, dass die statische Einheit, velche eine ihr gleiche im Abstande 1 mit der Kraft 1 anzieht, ;ugleich auch den Strom 1 hervorbringen soll, wenn sie sich nit der Geschwindigkeit 1 durch den Leiter bewegt, sodass sie also, wenn von der Länge 1, einen ebenso starken Strom von der Länge 1 im Abstande 1 mit der Kraft 1 anzieht. Es ergiebt sich dann, dass diesen Forderungen genügt werden kann durch eine unendliche Anzahl von absoluten Systemen, bei denen nur eine Grösse, in unserem Falle S, willkürlich ist, während die anderen Grössen, Länge und Masse, von der gewählten Zeiteinheit abhängen, derselben direct proportional und in jedem Falle leicht angebbar sind. „Man hat deshalb Länge und Masse als abgeleitete Einheiten anzusehen, und das System ist ein eingliedriges. Ferner zeigt sich, dass eine ganze Reihe von abgeleiteten Einheiten (Geschwindigkeit, Kraft, Stromstärke, Potential, Widerstand) von der gewählten Zeiteinheit unabhängig und demnach Naturmasse sind, die sich ihrer Grösse nach direct ergeben, wenn man die aufgestellten Bedingungen erfüllt.“ Lp.

Report of the Committee appointed for the purpose of considering the desirability of introducing a uniform nomenclature for the fundamental units of mechanics, and of cooperating with other bodies engaged in similar work. Brit. Ass. Rep. 27-28.

Der Ausschuss empfiehlt den Gebrauch der folgenden Namen: Die Einheit der Geschwindigkeit im *CGS*-System, d. h. die Geschwindigkeit von einem Centimeter in der Secunde, heisst ein „Kine“. Die Einheit des Moments im *CGS*-System, d. h. das Moment eines Grammes, das sich mit einem Kine bewegt, heisst ein „Bole“. Die Einheit des Druckes im *CGS*-System, d. h. der Druck eines Dyn auf das Quadrat-Centimeter, heisst ein „Barad“. Der Ausschuss empfiehlt nicht, dass irgend welche andere Namen englischen Einheiten gegeben werden; er wurde

wiedergewählt, da es noch einige andere Einheiten giebt, über deren Namen eine Verständigung möglich scheint, damit solche Namen empfohlen werden können. Gbs. (Lp.)

- - -

A. G. Greenhill. Units of weight, mass, and force. Nature XXXV. 486-487.

P. G. T. Weight and mass. Nature XXXV. 512.

E. Gheoghegan. Units of weight, mass, and force. Nature XXXV. 531.

A. Lodge. Units of weight, mass, and force. Nature XXXV. 557.

R. B. Hayward. Mass, weight, and dynamical units. Nature XXXV. 604-605.

C. Elliott. Units of weight, mass, and force. Nature XXXV. 605-606.

E. Gheoghegan. Units of weight, mass, and force. Nature XXXVI. 4.

W. Weight and mass. Nature XXXVI. 53.

R. H. Smith. Dynamical units. Nature XXXVI. 53.

J. Lancaster, D. H. Marshall. Units of weight, mass, and force. Nature XXXVI. 102.

J. B. Lock, A. Macfarlane. Units of weight, mass, and force. Nature XXXVI. 174-175.

A. G. Greenhill. Weight, mass, and force. Nature XXXVI. 196-197.

R. B. Hayward. Weight, mass, and force. Nature XXXVI. 221.

A. G. Greenhill. Weight, mass, and force. Nature XXXVI. 269.

J. B. Lock. Units of mass, weight, and force. Nature XXXVI. 317.

In allen diesen Artikeln handelt es sich um die Frage, wie der streng wissenschaftliche Gebrauch der einmal festgesetzten Kunstausdrücke nicht bloss in der Sprache der wissenschaftlichen

Verke festzuhalten, sondern auch in der Ausdrucksweise der Techniker sicher zu stellen sei. Lp.

T. C. MENDENHALL, O. J. LODGE. Weight and mass. Nature XXXVII. 416.

Erörterungen über die Notwendigkeit für den Gebrauch von weight = Gewicht als Kraft, angeschlossen an eine Recension von Kennedy's „Mechanics of Machinery" in Nature XXXVII. 195 von Herrn Greenhill. Lp.

J. VENN. The Mechanics of Machinery. Nature XXXVII. 510-511.

Kritik einiger Stellen des Werkes von Kennedy. Lp.

J. G. MACGREGOR. Kinematics and dynamics. Nature XXXVII. 487-488.

Erwiderung auf verschiedene Ausstellungen, welche Herr Greenhill in seiner Anzeige des gleich betitelten Buches (Nature XXXVII. 361-362) gemacht hatte. Lp.

R. E. BAYNES. Dynamical units and nomenclature. Nature XXXVII. 465.

G. C. FOSTER, E. HOSPITALIER. Density and specific gravity. Nature XXXVIII. 6.

A. G. GREENHILL. Weight and mass. Nature XXXVIII. 54-55.

H. M. ELDER. Density and specific gravity. Nature XXXVIII. 55.

J. B. LOCK. Weight and mass. Nature XXXVIII. 77.

J. G. MACGREGOR. Prof. Greenhill on „Kinematics and Dynamics". Nature XXXVIII. 148.

Erörterungen ähnlicher Natur wie die in den vorstehend erwähnten Noten. Lp.

G. ALLEN. Force and energy, a theory of dynamics. London.

W. Newton's laws of motion. Nature XXXVI. 366.

Einige Bedenken über die Fassung des Trägheitsgesetzes, die im wesentlichen auf die Abwesenheit eines Bezugssystemes hinauslaufen. Lp.

O. J. LODGE. Force, and Newton's third law. Nature XXXVII. 558.

Bemerkung über das Princip der Action und Reaction. Lp.

R. CLAUS. Ueber Potentialkräfte. Pr. Realsch. Leisnig.

Es sei T die lebendige Kraft eines in Bewegung befindlichen Systems materieller Punkte, W eine Function der Zeit, der Coordinaten, der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen der Punkte. Bildet man dann die Differentialgleichungen, welche erfüllt werden müssen, damit

$$\int_{t_0}^{t}(T+W)dt$$

ein Minimum wird, und sieht die Ausdrücke, denen mx_i'', my_i'', mz_i'' gleich werden, d. h. die Grössen

$$\frac{\partial W}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i''}\right)$$

etc. als Kraftcomponenten an, so wird gefragt, wie muss W beschaffen sein, damit die genannten Kräfte dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen. Es ergiebt sich, dass dazu erforderlich ist, dass W eine willkürliche Function ist, die ausser der Zeit, den Entfernungen der Punkte des Systemes vom Coordinatenanfang und ihren gegenseitigen Entfernungen noch die ersten und zweiten Ableitungen der genannten Entfernungen nach der Zeit enthält. Soll ausserdem der Satz

…r lebendigen Kraft gelten, so darf die Zeit t nicht explicite … W enthalten sein.

Bemerkt werden mag noch, dass die obigen Resultate eine …rweiterung derjenigen sind, die Herr A. Mayer Math. Ann. XIII …nicht VIII, wie hier fälschlich gesagt ist), cf. F. d. M. IX. 1877. 81, abgeleitet hat; sowie, dass sich die vorliegende Arbeit durch…weg eng an die des Herrn Mayer anlehnt. Wn.

L. VAN ELFRINKHOF. De viriaal en hare beteekenis in de mechanica. Diss. Utrecht. van Boekhoren. 136 S.

Der Gegenstand dieser Dissertation ist die Bedeutung des von Clausius in die theoretische Mechanik eingeführten Virials. Nachdem im ersten Teil die Haupteigenschaften dieser Kraftfunction dargelegt worden sind, wendet sich der zweite Teil zur Betrachtung des Virials in der Statik, also beim Gleichgewicht von Kräften, zu welchem Zweck auch die Quaternionen eingeführt werden. Der dritte Teil behandelt die Bedeutung des Virials in der Dynamik bei der Bewegung eines Punktes und der Bewegung von Systemen. Schliesslich bespricht der Verfasser den Nutzen der Einführung des Virials und des Ergals bei mechanischen und physikalischen Aufgaben; die Einführung der Quaternionen kann hierbei viel grösseren Nutzen bringen, als man nach den vorhandenen Werken über diesen Gegenstand erwarten sollte.

G.

R. WRONSKY. Das Intensitätsgesetz und die Gleichartigkeit der analytischen Formen in der Lehre von der Energie. Eine elementare Einführung in die Energetik. Frankfurt a O 24 S gr. 8°.

Capitel 2.

Kinematik.

Ph. Gilbert. Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque suivant trois directions rectangulaires variables. Journ. de Math. (4) IV. 465-473.

Es sei M ein beweglicher und O ein fester Punkt. Die Strecke $OM_n = j_n$ stelle in Grösse und Richtung die Beschleunigung n^{ter} Ordnung für den beweglichen Punkt M dar. Bewegt sich nun ein rechtwinkliges Axensystem $Oxyz$ nach irgend einem Gesetz um den Punkt O, und sind p, q, r die Componenten der Rotation dieses Systems bezüglich um Ox, Oy, Oz, so mögen j_{nx}, j_{ny}, j_{nz} die Componenten der Beschleunigung j_n darstellen; diese Grössen sind zugleich die Coordinaten des Punktes M_n.

Die absolute Geschwindigkeit des Punktes M_n stellt in Grösse und Richtung die Beschleunigung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung für den Punkt M dar. Diese Geschwindigkeit ist aber die Resultante der relativen Geschwindigkeit in Bezug auf die beweglichen Axen und der Führungsgeschwindigkeit. Daraus entspringen unmittelbar die Gleichungen

$$j_{n+1,x} = \frac{dj_{nx}}{dt} + qj_{nz} - rj_{ny},$$

$$j_{n+1,y} = \frac{dj_{ny}}{dt} + rj_{nx} - pj_{nz},$$

$$j_{n+1,z} = \frac{dj_{nz}}{dt} + pj_{ny} - qj_{nx}.$$

Wird Ox, Oy, Oz bezüglich parallel der Geschwindigkeit, der Hauptnormale und der Binormale angenommen, so führen die Gleichungen auf einfache Art zu denen, die Somoff und Resal aufgestellt haben. Indem der Verfasser die Lage des Punktes M durch die Parameter von drei orthogonalen Flächen ausdrückt, und die Componenten von j_{n+1} in Richtung der drei Normalen dieser Flächen aufsucht, gelangt er zu den Darstellungen, welche Lamé

ür die Componenten der Beschleunigung erster Ordnung nach Richtung jener drei Normalen zuerst gegeben hat. Schn.

Ph. Gilbert. Groupement et construction géométrique des accélérations dans un solide tournant autour d'un point fixe. C. R. CVII. 726-729.

Ph. Gilbert. Sur les accélérations des points d'un solide tournant autour d'un point fixe et sur les centres de courbure de leurs trajectoires. C. R. CVII. 830-831.

Bei der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt O liegen die Punkte gleicher Beschleunigung j auf einem Ellipsoid, welches O zum Mittelpunkt hat. Die Ellipsoide, welche den verschiedenen Werten von j entsprechen, sind homothetisch, und es genügt daher, die Verteilung der Beschleunigungen auf demjenigen zu untersuchen, für welches $j = 1$ ist. Für einen beliebigen Punkt M dieses Ellipsoides werden die Componenten der Beschleunigungen in den Hauptrichtungen metrisch dargestellt, und aus den aufgestellten Ausdrücken wird eine geometrische Construction der Beschleunigung des Punktes M hergeleitet.

In der zweiten Note folgen einige Sätze über die Beschleunigung des Punktes M. Die tangentielle Componente dieser Beschleunigung wird in einfacher Form bestimmt, und daraus der Satz gewonnen: „Der Ort der Punkte des Körpers, deren tangentielle Beschleunigung Null ist, ist ein Kegel zweiten Grades, und zwar wird derselbe gebildet durch den Durchschnitt der auf einander senkrechten Ebenen, welche bezüglich durch die augenblickliche Drehaxe OJ und die Winkelbeschleunigung OL geführt sind.“ Einige andere Relationen, die Beschleunigung von M betreffend, schliessen sich an.

Alle Punkte des Körpers, welche auf einer durch den festen Punkt gehenden Geraden liegen, beschreiben Trajectorien, deren Krümmungscentren wieder auf einer Geraden enthalten sind. Im Anschluss an dies Theorem wird der Krümmungsmittelpunkt der Trajectorie eines Punktes M geometrisch construirt.

Schn.

Ph. Gilbert. Sur les accélérations d'ordre quelconque des points d'un corps solide qui a un point fixe O. C. R. CVII. 946-948.

Mitteilung einiger allgemeinen Beziehungen, welche zwischen den Beschleunigungen der verschiedenen Ordnungen eines beliebigen Punktes, seiner Geschwindigkeit, seinem Richtstrahl, der Drehaxe und den Winkelbeschleunigungen verschiedener Ordnung statthaben. Schn.

F. Wittenbauer. Ueber gleichzeitige Bewegungen eines ebenen Systems. Schlömilch Z. XXXIII. 193-208.

Der Bewegungszustand eines ebenen starren Systems ist in jedem Augenblick durch den augenblicklichen Drehpunkt O und die Winkelgeschwindigkeit ω für das erste Zeitelement vollkommen bestimmt. Für das darauf folgende Zeitelement ist unter der Bedingung, dass die Grösse der Drehung keine Aenderung erleidet, die Angabe des Wendepols J hinreichend. Ist ein ebenes System einer beliebigen Anzahl gleichzeitiger Bewegungen unterworfen, welche durch die Drehpunkte $O_1, O_2, \dots, O_n$ und die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_n$ gekennzeichnet sind, so ist der resultirende Drehpunkt O der Schwerpunkt der Punkte $O_1, O_2, \dots, O_n$, wenn dieselben mit den zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten belastet gedacht werden, die resultirende Winkelgeschwindigkeit ω aber die algebraische Summe der Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Bewegungen. Wird dagegen die Frage gestellt nach dem resultirenden Bewegungszustand für zwei aufeinander folgende Zeitelemente, eine Frage, die sich z. B. bei der Angabe der Krümmungsverhältnisse bietet, so ist aus den Wendepolen $J_1, J_2, \dots, J_n$ der gleichzeitigen Bewegungen auf den Wendepol der resultirenden Bewegung zu schliessen. Die Beantwortung dieser Frage bildet den Inhalt der vorliegenden Arbeit. Die wesentlichsten Ergebnisse sind:

Nennt man das Product des Wendedurchmessers in das Quadrat der zugehörigen Winkelgeschwindigkeit den reducirten Wendedurchmesser, so ist die im geometrischen Sinne genom-

mene Summe der reducirten Wendedurchmesser der Einzelbewegungen der reducirte Wendedurchmesser der resultirenden Bewegung.

Der resultirende Wendepol von n gleichzeitigen Bewegungen ist der Schwerpunkt aller Wendepole J_n und aller Drehpunkte O_n, wenn die ersteren mit ω_n^2, die letzteren mit $\omega_n(\omega-\omega_n)$ belastet gedacht werden.

Der Krümmungsmittelpunkt K der Bahn eines Systempunktes M für die aus n gleichzeitigen Bewegungen resultirende Bewegung ist der Schwerpunkt der den Einzelbewegungen entsprechenden Krümmungsmittelpunkte $K_1, K_2, \dots, K_n$ und des Punktes M selbst, wenn die ersteren mit den Krümmungs-Winkelgeschwindigkeiten $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, der Punkt M aber mit dem Ueberschuss $u = \varphi - \Sigma\varphi_n$ belastet gedacht wird. Schn.

A. Schönflies. Sur les courbes et surfaces décrites pendant le mouvement à cinq conditions. Darboux Bull. (2) XII. 18-25.

Bei der Bewegung eines starren Systems, welches fünf Bedingungen unterworfen ist, beschreiben bekanntlich die einzelnen Punkte Linientrajectorien. Verschiebt sich das starre System Σ in einem Raume Σ', so wird für einen Beobachter, welcher unveränderlich mit Σ verbunden ist, Σ' sich gegen Σ verschieben; die Bewegung von Σ' im Systeme Σ wird indirecte Bewegung genannt.

Ein Punkt P einer Geraden d im Raume beschreibt eine Linientrajectorie. Der Mittelpunkt der in P diese Trajectorie osculirenden Kugel ist ein Punkt P'. Der Ort der Punkte P', welche den Punkten P der Geraden d entsprechen, ist eine Raumcurve dritter Ordnung k_3. Bei der indirecten Bewegung wird P der Mittelpunkt der osculirenden Kugel für die Trajectorie, welche P' beschreibt.

Für jeden Moment der Bewegung giebt es in dem System Σ eine Raumcurve sechster Ordnung k_6, deren Punkte eine stationäre Krümmungsaxe haben. Schneidet die Gerade d diese

Curve k_6 in einem Punkte, so zerfällt die der Geraden d entsprechende Curve k_3 in einen Kegelschnitt und in die stationäre Krümmungsaxe des Schnittpunktes.

Schneidet d die Curve k_6 in zwei Punkten, so bilden die Mittelpunkte der osculirenden Kugeln eine Gerade d', welche mit den Krümmungsaxen der Schnittpunkte die Curve k_3 bildet. Jedem Punkte P der Geraden d entspricht ein Punkt P' der Geraden d' als Mittelpunkt der osculirenden Kugel, und bei der indirecten Bewegung jedem Punkte P' der Geraden d' ein Punkt P der Geraden d in gleichem Sinne; also trifft die Gerade d' zweimal die Curve k'_6 im System Σ'.

Die Geraden, welche dreimal die Curve k_6 schneiden, sind stationäre Krümmungsaxen für die indirecte Bewegung; für jede solche Gerade reducirt sich die Curve der Mittelpunkte der osculirenden Kugeln auf einen einzigen Punkt, welcher der Curve k'_6 der indirecten Bewegung angehört.

Die Regelfläche, welche aus den Krümmungsaxen der Punkte der Curve k_6 gebildet ist, ist vom achten Grade und enthält die Curve k'_6 der indirecten Bewegung als dreifache Curve.

Die weiteren Betrachtungen beziehen sich auf solche Geraden, welche bei der vorgeschriebenen Bewegung bestimmte Singularitäten zeigen, im besonderen auf solche Geraden, welche in drei aufeinander folgenden Lagen durch denselben Punkt gehen. Ist r eine solche Gerade, deren drei aufeinander folgende Lagen r_0, r_1, r_2 sich in einem Punkte R' schneiden, so wird R' bei der indirecten Bewegung in drei aufeinander folgenden Lagen R'_0, R'_1, R'_2 auf der Geraden r bleiben; also wird R' der Inflexionscurve für die indirecte Bewegung angehören, und die Gerade r wird die Tangente seiner Trajectorie sein. Die Geraden von der verlangten Art in dem einen der beiden Systeme Σ und Σ' bilden also die Tangenten der Punkte der Inflexionscurve in dem anderen System.

Die Tangenten aller Punkte der Inflexionscurve i_3 bilden eine Regelfläche; diese Regelfläche R_5 ist von der fünften Ordnung.

Indem der Verfasser sich zum Schluss dem Ort der Geraden

zuwendet, welche in drei aufeinander folgenden Lagen in derselben Ebene bleiben, führen ihn die an diese Untersuchung sich anschliessenden Betrachtungen zu weiteren Urteilen über die Fläche R_5. Dieselbe enthält eine Doppelcurve sechster Ordnung und wird durch die dreifachen Sehnen dieser Curve gebildet.

Schn.

C. Rodenberg. Ueber die während der Bewegung projectiv veränderlicher und starrer Systeme beschriebenen Curven und Flächen. Gött. Nachr. 176-194.

Es werden im Auszuge die Ergebnisse einer Untersuchung über geometrische Oerter mitgeteilt, deren Elemente in einer Anzahl Lagen eines bewegten Systems gegenüber einem festen noch auf einer dem letzteren angehörenden Curven- oder Flächenart liegen, welche schon durch eine geringere Anzahl von Elementen bestimmt ist. Ist zum Beispiel N die Anzahl der Punkte, welche eine Curve C^n bestimmt, so könnte man bei einem bewegten ebenen System nach dem Ort der Punkte fragen, welche in $N+1$ Lagen des bewegten Systems auf C^n gelegen sind. Solche Curve wird symbolisch durch A^r_{N+1} bezeichnet, wo der obere Zeiger den Grad der Curve angiebt. Der Ort der Punkte, welche in $N+2$ Lagen noch auf C^n liegen, ist eine Punktgruppe A^u_{N+2}; der Ort derjenigen Punkte, welche in N Lagen noch einen Büschel von C^n zulassen, ist eine andere Gruppe A^s_N. Diese beiden Gruppen bilden das vollständige Schnittpunktsystem von $A^r_{1,N+1}$ und $A^r_{2,N+2}$, so dass $r^2 = u+s$ ist. Die Gruppe A^s_N enthält stets sämtliche Punkte, welche für zwei Lagen ihren Ort beibehalten, das sind die Pole, deren es bei allgemein collinear veränderlichen Systemen bekanntlich drei für je zwei Lagen giebt. Während der continuirlichen Bewegung zerfällt die Enveloppe der A^r_{N+1} im allgemeinen in drei Teile: 1) in die Bahn der A^u_{N+2}, 2) in die Bahn der A^s_N, welche nicht Pole sind, 3) in die Polcurve, auf welcher zwei consecutive Curven A^r_{N+1} in jedem Pol $\frac{1}{2}N(N-1)$ unendlich nahe Punkte gemein haben.

Mit der ursprünglichen „directen“ Bewegung des Systems wird in den Betrachtungen stets die „indirecte“ verknüpft, indem unter Festhaltung des ursprünglich bewegten Systems das feste derartig bewegt und verändert gedacht wird, dass die in jeder der früheren Lagen sich deckenden Elemente der beiden Systeme auch jetzt zur Deckung gelangen. Umhüllt also bei der directen Bewegung eine Curve *a* eine andere *b*, so umhüllt bei indirecter Bewegung *b* die Curve *a*, oder im speciellen: Liegt ein Punkt *P* in *m* Lagen auf einer Curve *C*, so gehen bei indirecter Bewegung die *m* Lagen von *C* durch *P*. Eine Gerade *g*, welche bei directer Bewegung eine Curve *C* in *m* Lagen berührt, wird bei indirecter Bewegung von *m* Lagen von *C* berührt werden. Dieses dualistische Princip findet seine fruchtbare Verwendung.

Es ist nicht möglich, auf die grosse Zahl der Einzelergebnisse an dieser Stelle einzugehen. Näherer Betrachtung werden unterworfen die collinear veränderlichen Systeme, und zwar 1) die Bewegung derselben in allgemeinster Form, 2) ihre Bewegung unter der Bedingung, dass eine Gerade fest bleibt, ein Fall, der das affin veränderliche System in sich begreift, oder auch, dass ein Punkt des Systems unveränderlich bleibt, 3) die Bewegung unter der Voraussetzung, dass zwei Punkte fest bleiben, wodurch ähnliche und starre Systeme umfasst werden, oder, dass zwei Gerade eine unveränderliche Lage bewahren. An diese Betrachtungen schliessen sich noch zwei andere specielle Bewegungsformen.

Ein zweiter Abschnitt giebt die Resultate der analogen Untersuchungen für die Bewegung räumlicher Systeme.

Schn.

A. Ekcen. Stelling. Nieuw Arch. XV. 67-99.

Die hier behandelte Aufgabe lautet: Eine Ebene bewegt sich so über einer anderen Ebene, dass zwei Gerade der ersten beweglichen Ebene Tangenten an zwei festen Kreisen bleiben, welche in der zweiten unbeweglichen Ebene liegen. Diese Bewegung soll näher untersucht werden.

Durch eine einfache geometrische Betrachtung wird diese Aufgabe auf das ohne Gleiten erfolgende Abrollen eines Kreises auf einem andern Kreise, also auf die hypocykloidische Bewegung zurückgeführt. Diese wird alsdann auf analytischem Wege weiter untersucht und in Beziehung gebracht mit der Theorie der Krümmung ebener Curven. G.

A. Mannheim. Développements de géométrie cinématique. Soc. Philom. Mém. 51-62.

Die Arbeit beschäftigt sich mit den durch Refraction entstehenden Brennlinien ebener Curven. Ist (m) die Curve, welche zwei optische Mittel trennt, (α) die Enveloppe der einfallenden Strahlen, so wird, wenn cm einen einfallenden Strahl bedeutet, welcher (α) in α berührt, die Construction des Punktes α' gegeben, in welchem der gebrochene Strahl mc' die Katakaustik (α') berührt. An diese Construction schliesst sich eine Formel, welche den Einfallswinkel, den Brechungswinkel, den Brechungsexponenten, den Krümmungsradius der Curve (m) und das Segment $m\alpha$ mit dem Segment $m\alpha'$ verknüpft. Diese Formel, sowie die gegebene Construction, dient zum Ausgangspunkt für die Lösung der schwierigeren Frage: Wie ist der Krümmungsmittelpunkt der Brennlinie (α') zu finden? Aus den Gesichtspunkten der kinematischen Geometrie entwickelt der Verfasser eine Lösung dieses Problems und giebt eine Formel, welche den Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius von (α') mit den Krümmungsradien von (α) und (m) und den Grössen herstellt, welche die erste Formel in Verbindung bringt. Die Lösung dieser Frage führt den Verfasser zu dem geometrischen Ort der Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Curven ein constantes Verhältnis haben. Sind (a) und (a') die gegebenen beiden Curven und (m) der gekennzeichnete Ort, so wird aus den Krümmungsmittelpunkten der Evoluten von (a) und (a') der Krümmungsmittelpunkt der Evolute von (m) hergeleitet. Schn.

F. Buka. Bemerkungen zu der Grübler'schen Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen eines ebenen Systems. Schlömilch Z. XXXIII. 117-118.

Die von Herrn Grübler in Schlömilch Z. XXIX (F. d. M. XVI. 1884. 762) angegebene Construction der Polbahn eines bewegten ebenen starren Systems, welche auch in dem Lehrbuch der Kinematik von Burmester (S. 106-112) Aufnahme gefunden hat, gilt nicht in der Allgemeinheit, wie der Verfasser angenommen hat. Herr Buka deckt den Irrtum auf und zeigt die Beschränkung, unter der allein die gegebene Construction gültig ist.

Schn.

L. Burmester. Berichtigung zu Buka's Bemerkungen. Schlömilch Z. XXXIII. 190.

Die Bestimmung des Krümmungsmittelpunkts der Polbahn eines bewegten ebenen starren Systems erfordert die Betrachtung von vier aufeinander folgenden unendlich nahen Lagen des Systems. In der Grübler'schen Construction liegt nun die Fehlerquelle darin, dass irrtümlich angenommen wird, jeder der beiden Endpunkte einer Systemstrecke in vier unendlich nahen Lagen befinde sich auf je einem Kreise. Wenn demnach die Construction auch für die Polbahn eines Gelenkvierecks gilt, so hat sie doch nicht allgemeine Gültigkeit, wie nach Grübler's Vorgange Herr Burmester in seinem Lehrbuch der Kinematik Art. 50 angenommen hatte. Der dagegen in dem Lehrbuch Bd. I. S. 30 aufgestellte Satz, den Herr Buka, weil er mit jenem Irrtum in Verbindung stehe, als hinfällig bezeichnet, bewahrt seine Gültigkeit, weil bei diesem Satze nur drei unendlich nahe Lagen des Systems in Betracht kommen. Schn.

L. Burmester. Kinematische Flächenerzeugung vermittelst cylindrischer Rollung. Schlömilch Z. XXXIII. 304-31-.

Wenn ein gerader Kreiscylinder auf der Innenseite eines anderen geraden Kreiscylinders mit doppeltem Durchmesser rollt

so beschreibt jeder Punkt des ersteren eine Gerade, die senkrecht gegen die Axe der cylindrischen Bahnfläche gestellt ist. Eine beliebige Curve auf dem rollenden Kreiscylinder beschreibt daher eine normale Konoidfläche; diese schneidet die cylindrische Bahnfläche in einer Curve, und bei der betrachteten Bewegung rollt jene Curve auf dieser. Diese Gedanken werden auf einige besondere Formen von Konoidflächen angewandt.

Zwei Punkte der rollenden Cylinderfläche bestimmen eine Gerade; diese beschreibt bei der Bewegung, die vorausgesetzt wird, eine Fläche. Diese Fläche nennt der Verfasser Wringfläche und entwickelt aus der Art ihrer Entstehung einige Eigenschaften.

Denkt man von zwei Schraubenlinien s und l, welche parallele Axen haben, die eine mit der anderen fest verbunden und lässt s sich in sich selbst bewegen, dann vollzieht die Schraubenlinie l eine schraubenförmige Bewegung und erzeugt eine cyklische Schraubenfläche. Aus der genetischen Bestimmung dieser Fläche leitet der Verfasser andere Formen für ihre Entstehung ab. Als Specialfall der cyklischen Schraubenfläche wird dann die Schraubenregelfläche behandelt, welche durch schraubenförmige Bewegung einer Geraden erzeugt wird. Zur Charakterisirung der Richtung, wohin der Verfasser die Gedanken lenkt, möge ein Satz hier seine Stelle finden: „Die Schraubenregelfläche wird vermittelst Rollung einer Ebene P auf einer festen Kreiscylinderfläche Π durch eine mit P fest verbundene parallele Gerade l erzeugt, die schräg zu den Mantellinien der Kreiscylinderfläche ist. Die Axe der erzeugten Schraubenfläche ist auch Axe der festen Kreiscylinderfläche." Schn.

J. Réveille. Note sur un théorème de géométrie cinématique. S. M. F. Bull. XVI. 130-132.

Es rolle die Curve M auf der Curve F; O_1 sei der Punkt, in welchem sich beide Curven berühren, O_2 ein ihm unendlich naher Punkt auf M, welcher nach einer unendlich kleinen Verrückung von M in O'_2 übergehen mag. Denkt man durch O_1

und O_2 einen Kegelschnitt und verbindet alle seine Punkte O_1 und O_2, so entstehen in O_1 und O_2 projectivische Büs Der Büschel in O_2 geht nach der Verrückung in den ihm gruenten in O'_2 über. Seine Strahlen werden jetzt Normalen die Trajectorien, welche die Punkte des Kegelschnitts C beseb ben; es sind demnach die Durchschnittspunkte entsprechen Strahlen der beiden Büschel O_1 und O'_2 die Krümmungsmittelpun der Trajectorien. Diese liegen demnach auf einem Kegelsch C', welcher O_1 und O'_2 in sich enthält. Sind R und R' Krümmungsradien von C und C' im Punkte O_1, und werden R_M und R_F die Krümmungsradien von M und F bezeichnet. gilt die Relation

$$(1) \quad \frac{1}{R'} + \frac{1}{R} = 2\left(\frac{1}{R_M} + \frac{1}{R_F}\right).$$

Wird der Kegelschnitt C durch eine beliebige Gerade D und Tangente in O_1 an der Curve M ersetzt, so beschreiben Punkte dieser Geraden D Trajectorien, deren Krümmungscen auf C' enthalten sind, und der betreffende Wert von R' wi bestimmt durch die Gleichung

$$(2) \quad \frac{1}{R'} = 2\left(\frac{1}{R_M} + \frac{1}{R_F}\right).$$

Die beiden congruenten Büschel in O_2 und O'_2 bestimmen eine Kreis; er enthält die vier Schnittpunkte von C und C', und daraus wird für den Grenzfall geschlossen, dass C und C' parallel Axen haben.

Rückt die Gerade D in's Unendliche, so schneidet der Kegel schnitt C', welcher ihr entspricht, diese Gerade in den Kreis punkten der Ebene und wird daher der Kreis J, dessen Radiu durch (2) bestimmt ist. Man darf daher dem Theorem von Rivai dass die Krümmungsmittelpunkte der Trajectorien der Punkte einer Geraden D auf einem Kegelschnitte C' liegen, die Bemer kung hinzufügen, dass die Kegelschnitte C', welche allen Geraden D der Ebene entsprechen, zum gemeinsamen Osculationskreis in O_1 den Kreis J haben. Schn.

Pelisek Miloslav. Ueber den Ort der Axen derjenigen Schraubenbewegungen, durch welche eine Strecke in eine beliebige Lage im Raume gebracht werden kann. Hoppe Arch. (2) VII. 1-9.

Die Ueberführung einer Strecke ab in eine gleiche Strecke $a_1 b_1$ ist in Form einer Schraubenbewegung auf unendlich viele Arten möglich. Einer jeden Schraubenbewegung entspricht eine Schraubenaxe. Der Ort dieser Schraubenaxen ist eine konoidische Fläche dritten Grades. Ihre besondere Natur bildet den Gegenstand der Betrachtung. Daran schliesst sich eine Untersuchung über die Lage der Axen derjenigen Schraubenbewegungen, durch welche eine beliebige Gerade in eine willkürliche Lage gebracht werden kann. Diese Schraubenaxen bilden eine bestimmte lineare Congruenz. Schn.

E. W. Hyde. The directional theory of screws. Annals of Math. IV. 137-155.

In dieser Abhandlung zeigt der Verfasser in schlagender Weise, wie die Methoden der Ausdehnungslehre die kürzesten und naturgemässesten Mittel zur Begründung der Lehre von den Schraubenbewegungen oder „Schrauben" darbieten, wie sie namentlich durch Ball ausgebildet worden ist. (S. z. B. F. d. M. XIX. 1887. 960). Vor allem giebt er eine präcisere Definition der Schraube (S). Ist ε eine Einheitsstrecke, in deren Endpunkte e ein Ebenenstück η senkrecht steht, dessen Inhalt numerisch gleich 1 ist, so ist nach Grassmann $e\varepsilon$ ein Linienteil, und $\eta = |\,\varepsilon$ die Ergänzung von ε. Ist ferner a ein Zahlfactor, so ist nach Hyde

$$S = e\varepsilon + a\,|\,\varepsilon.$$

In mechanischer Auffassung bedeutet $e\varepsilon$ eine Kraft, $a\,|\,\varepsilon$ ein Kräftepaar (Dyname) in der Ebene η, mit dem Windungsparameter a. Formell ist $e\varepsilon$ ein äusseres, $a\,|\,\varepsilon$ ein inneres Product, und aus der Anwendung dieser beiden Arten von Multiplication erklärt sich die Einfachheit der nun folgenden Rechnungen zur Genüge. Nachdem nun zunächst die Summe beliebiger Strecken

(Kräfte) im Raume als „Schraube“ erkannt, und die Summe beliebig vieler und das Product zweier Schrauben bestimmt worden, stellt der Verfasser die Schraube als Vielfachensumme der Kanten eines Fundamental-Tetraeders und als lineare Function von fünf anderen Schrauben dar. Eine variable Schraube gehört zu einem System (Complex) r^{ter} Ordnung, wenn man sie $(6-r)$ Bedingungen unterwirft. Der Verfasser behandelt dann für die Fälle $r = 1, 2, 3$ die simultanen Systeme r^{ter} und $(6-r)^{ter}$ Ordnung, wobei auf die vereinfachte Behandlung der linearen Complexe Plücker's durch die Ausdehnungslehre hingewiesen und auch die Theorie des Ball'schen Cylindroids gegeben wird. Die Arbeit schliesst mit einigen Bemerkungen über polare und conjugirte Schrauben. Schg.

A. Ramisch. Momentaner Bewegungszustand eines in der Praxis viel angewandten Mechanismus. Hoppe Arch. (2) VI. 443-445.

Von zwei Ebenen ist jede mit einem curvenförmigen Schlitz von gleicher Breite versehen. Beide Ebenen drehen sich auf einer festen Ebene, die eine um einen Punkt *A*, die andere um einen Punkt *B*. In dem Raum zwischen beiden Schlitzen wird ein cylindrischer Stift mit kreisförmiger Basis gedacht, dessen Querschnitt genau die Breite beider übereinander greifenden Schlitze hat. Beide bewegliche Ebenen sind durch eine starre Stange *FG* gelenkartig mit einander verbunden. Wird nun die eine Ebene in Rotation versetzt, so wird durch die Stange *FG* auch die andere Ebene in Drehung kommen, und der Mittelpunkt *E* des Stiftes eine bestimmte Curve beschreiben. Die Construction der Bahnelemente von *E* bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Schn.

E. Ovazza. Sul calcolo delle deformazioni dei sistemi articolati. Torino Atti. XXIII. 384-401.

Im vorigen Jahrgange ist die Arbeit des Herrn Mohr kurz besprochen worden: „Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleu-

nigungspläne. Ein Beitrag zur graphischen Kinematik" (Civiling. XXXIII. 631-650, F. d. M. XIX. 1887. 892). Der dort angedeutete Gedanke, die Deformation der elastischen Systeme zu ermitteln, indem man von den kinematischen Theorien der zusammengesetzten Bewegung ausgeht, ist vom Verfasser ergriffen und benutzt worden, um zunächst die in den Knotenpunkten belasteten Gelenksysteme zu untersuchen und ihre Theorie zu vereinfachen. In den ersten sechs Paragraphen werden die Methoden erläutert, dann wird in § 7 zu dem ebenen Gelenksysteme aus elastischen Stäben übergegangen, dessen Knoten die Angriffspunkte der einzigen einwirkenden Kräfte sind. In § 8 werden die Deformationen der Länge der Stäbe gefunden, § 9 trägt den Einwirkungen der Temperatur Rechnung, § 10 giebt die zugehörige graphische Construction, § 11 die bezüglichen Rechnungen, deren Ergebnisse mit denen von Müller-Breslau, Winkler und W. Ritter in Einklang stehen. Die letzten Paragraphen (12-16) sind speciellen Fällen, Fehleruntersuchungen und der Ableitung des sogenannten Maxwell'schen Princips gewidmet. Auf die weitere Ausnutzung dieses Princips verspricht der Verfasser in späteren Arbeiten zurückzukommen. Lp.

G. Schouten. Algemeene eigenschappen van de zuiver rollende beweging van een omwentelingslichaam op een horizontaal vlak, toegepast op de beweging van een omwentelingslichaam om een vast punt van zyne as. Amst. Versl. en Meded. (3) V. 292-335.

In dieser Abhandlung wird nochmals die bekannte Aufgabe der Bewegung eines Umdrehungskörpers um einen festen Punkt seiner Axe oder auf einer horizontalen Ebene untersucht. Im Gegensatz zu den rein analytischen Auflösungen dieser Aufgabe, die man besitzt, wird hier eine graphische Methode benutzt, wobei den Constanten, die auftreten, so weit dies möglich ist, eine mechanische Bedeutung gegeben und so eine anschauliche Vorstellung ermöglicht wird. Im ersten Abschnitt werden

die ersten Integralgleichungen abgeleitet, im zweiten die allgemeinen Eigenschaften der rein rollenden Bewegung eines Umdrehungskörpers auf einer horizontalen Ebene behandelt, im dritten wird die Bewegung des Körpers um einen festen Punkt seiner Axe untersucht. Schliesslich zeigt der Verfasser, dass seine Resultate mit denen, welche andere Mathematiker für dieselbe Aufgabe erhalten haben, übereinstimmen. G.

E. Villié. Traité de cinématique à l'usage des candidats à la licence et à l'agrégation. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

H. Müller-Breslau. Berechnung statisch bestimmter ebener Träger mit Hülfe der geometrischen Bewegungslehre. Hannov. Zeitschr. XXXIV. 191-198.

Das von Herrn Müller-Breslau vorgetragene Verfahren besteht darin, dass ein statisch bestimmter, starrer, ebener Träger durch Fortnahme einer Starrheitsbedingung sich in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt. Um das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten, sind natürlich jetzt an Stelle zweier entgegengesetzten inneren Kräfte, die nicht mehr zur Wirksamkeit gelangen, äussere Kräfte einzuführen. Wendet man dann das Princip der virtuellen Verrückungen an, welchem man mit Hülfe der von Burmester eingeführten, sogenannten senkrechten Geschwindigkeiten eine besonders übersichtliche Form geben kann, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der in Frage stehenden Spannkraft. Drei Beispiele erläutern das Verfahren. F. K.

H. Müller-Breslau. Zur Theorie der ebenen Träger. Schweiz. Bauztg. XI.

Zurückweisung eines Prioritätsanspruches, den Herr Land im X. Bande der Schweizerischen Bauzeitung erhoben hatte.

F. K.

Capitel 3.
Statik.

A. Statik fester Körper.

MOHR. Die Theorie der Streckensystems. Civiling. XXXIV. 691-736.

Der Verfasser verfolgt mit dem vorliegenden Artikel den Zweck, mit dem Hülfsmittel der tetraedrischen Coordinaten und übrigens in elementarer Darstellung die Gesetze des Gleichgewichts und die Geometrie der Bewegung eines starren Körpers in unmittelbarem Zusammenhang zu entwickeln.

Nach kurzer Erläuterung der Begriffe Axe und Strecke, der Darstellung der Drehung eines Körpers, des Begriffs der Schiebungsgeschwindigkeit und der gegenseitigen Lage zweier Axen wird das Moment (p, q) zweier Axen p, q als das Product $a \sin \alpha$ definirt, wo a der kürzeste Abstand, α der Neigungswinkel ist. $P.a \sin \alpha$ heisst das Moment einer auf p befindlichen Strecke P bezüglich q; stellt P die Geschwindigkeit einer um p erfolgenden Drehung vor, so ist das Moment (P, q) die Schiebungsgeschwindigkeit der Axe q; ist hingegen P eine längs p wirkende Kraft, so ist der bezeichnete Ausdruck das Moment der Kraft in Bezug auf die Axe q. Endlich ist der Ausdruck $PQa \sin \alpha$ das Moment einer auf p befindlichen Strecke P und einer auf q befindlichen Strecke Q; stellt P eine längs p wirkende Kraft, Q eine Drehungsgeschwindigkeit um q vor, so ist er die Arbeitsgeschwindigkeit der fraglichen Kraft bei der Drehung. Erfolgen gleichzeitig mehrere Drehungen Q_1, Q_2, Q_3, so ist die resultirende Schiebungsgeschwindigkeit der Axe p gleich der Summe der Momente der Strecken Q bezüglich der Axe p. Und das Moment eines Systems von Kräften ist gleich der Summe der Einzelmomente bezüglich der Axe. Der Bewegungszustand eines Körpers ist nun, wie genau auseinander gesetzt wird, bestimmt, wenn man die Verschiebungsgeschwindigkeiten von sechs Axen

kennt, welche die Kanten eines Tetraeders bilden. Es ist also die Wirkung eines Systems von Drehungen oder Kräften völlig bestimmt, wenn man die sechs Momente bezüglich der Kanten eines Tetraeders kennt. Es seien nun x, y, z die Kanten eines rechtwinkligen Dreikants, von welchen durch eine Ebene die Länge $\sqrt{2}$ abgeschnitten werde; x', y', z' mögen die entsprechend gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders sein. Dann ist das Moment einer Strecke S, welche sich auf einer der Kanten befindet, nur bezüglich der gegenüberliegenden Kante von Null verschieden, und zwar gleich S. Trägt man nun auf jeder Tetraederkante das Moment eines Streckensystems bezüglich der gegenüberliegenden Kante ab, so stimmt das Moment des neuen, aus sechs Elementen bestehenden Systems nicht nur für die Tetraederkanten, sondern auch für beliebige Geraden mit dem des gegebenen Streckensystems überein. Die sechs auf den Tetraederkanten abgetragenen Strecken heissen die Coordinaten des gegebenen Streckensystems. Sollen die Drehungen oder Kräfte, welche durch dasselbe dargestellt werden, sich gegenseitig aufheben, so müssen offenbar die sechs Coordinaten gleich Null sein.

Auf Grund dieser Bedingung erörtert dann der Verfasser das Gleichgewichtssystem von 2, 3, 4, 5, 6 und 7 Strecken.

Den Schluss der Abhandlung bildet ein Verzeichnis der Literatur. F. K.

D. Turazza. Introduzione ad un corso di statica dei sistemi variabili. Ven. Ist. Atti. (6) VI. 701-723.

Der Aufsatz zerfällt in drei Artikel: 1) von der Sicherheit des Gleichgewichts, 2) das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, 3) das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bei einem System von Körpern, die irgendwie mit einander verbunden sind. In der Einleitung erklärt der greise Verfasser, dass die Arbeit eine Fortsetzung der vor mehreren Jahren von ihm veröffentlichten Elemente der Statik bilde. Damals habe er nur das Gleichgewicht der starren Körper behandelt. Die Absicht, die

variabeln Systeme in gleicher Weise zu bearbeiten, sei bisher nicht zur Ausführung gelangt; das Vorliegende solle eine Probe für die Darstellung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten sein. Bei dem Bestreben, einen der Statik gemässen Weg zur Herleitung der Gültigkeit dieses Princips zu finden, habe er keinen besseren Beweis entdecken können, als den bei Möbius; deshalb habe er die Gedanken dieses Gelehrten in gedrängter Form zusammengestellt. Die Abhandlung schliesst sich in der That den betreffenden Capiteln der Statik von Möbius (Capitel 9 und 10) auch in der Fassung der Sätze ziemlich genau an.

Lp.

E. Budde. Ueber die räumliche Verteilung der Dyaden von je zwei conjugirten Kräften, welche einer gegebenen Dyname äquivalent sind. Berl. phys. Ges. Verh. VII. 77-84.

Greift ein gegebenes System von Kräften an einem starren Körper an, so kann es auf die Form zweier sich kreuzenden Kräfte zurückgeführt werden. Der Verfasser zeigt auf höchst anschauliche Weise unter Einführung mehrerer neuer Kunstausdrücke, wie diese „Dyaden" sich kreuzender Kräfte, welche das Kräftesystem vertreten können, im Raume verteilt sind. Die Untersuchungen sind in dem zweiten Bande des inzwischen erschienenen Lehrbuchs des Verfassers (Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Berlin. G. Reimer) in die systematische Darstellung des Lehrgebäudes eingeführt worden (S. 576 ff.)

Lp.

A. Astor. Théorème de Minding. Nouv. Ann. (3) VII. 38-43.

Einfacher Beweis des Minding'schen Satzes: Wenn ein Körper in seinen verschiedenen Punkten durch Kräfte angegriffen wird, die von der Orientirung des Körpers unabhängig sind, so kann man ihn in unendlich viele Lagen derart überführen, dass das System dieser Kräfte eine einzige Resultante hat. Diese Resultante trifft immer eine Ellipse und eine Hyperbel, welche im Körper fest sind. (J. für Math. XV. 27.) Lp.

G. Bardelli. Proprietà stereometriche di un sistema di forze. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 167-171.

Der Zweck dieser Note ist die weitere Ausführung und Verallgemeinerung einiger geometrischen Eigenschaften eines Kräftesystems, die der Verfasser im III. Bande derselben Rendiconti veröffentlicht hat (vgl. F. d. M. III. 1871. 447 u. 448). Die Bemerkungen schliessen sich hauptsächlich an den folgenden Satz an, eine Verallgemeinerung des Möbius'schen Satzes aus der Statik: Wenn die n Kräfte eines im Gleichgewicht befindlichen Systems irgendwie in zwei Gruppen von m und $n-m$ Kräften geteilt werden, so ist die Summe der $\frac{1}{2}m(m-1)$ Tetraeder aus je zweien der Kräfte der ersten Gruppe als Gegenkanten gleich der Summe der $\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1)$ Tetraeder aus den zu je zweien combinirten Kräften der zweiten Gruppe. Dieser Satz kann rein arithmetisch als Eigenschaft einer symmetrischen Determinante ausgesprochen werden, in der die Diagonalglieder verschwinden, und wird für ein beliebiges Kräftesystem zu einem Chasles'schen Satze erweitert, der schon vor Chasles von Bordoni gefunden war. Lp.

E. Novarese. Proprietà stereometriche dei sistemi di forze. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 575-579.

In einem an Herrn Bardelli gerichteten Briefe beweist der Verfasser den im vorangehenden Berichte ausgesprochenen Lehrsatz nach einer andern Methode als der Entdecker desselben. Indem ferner als simultane „Invariante“ der beiden Gruppen S und S' der Kräfte der Ausdruck

$$AL' + BM' + CN' + A'L + B'M + C'N$$

definirt wird, wenn A, B, C, L, M, N die „Charakteristiken“ von S, die accentuirten Buchstaben die von S' bedeuten, ergiebt sich der Satz: „Wenn die simultane Invariante zweier Kräftesysteme Null ist, welche nicht einzeln im Gleichgewicht sind, auch nicht auf eine Einzelkraft oder ein Kräftepaar zurückführbar sind, so können die beiden Systeme sich nicht das Gleichgewicht halten.“ Da die simultane Invariante gleich der sechsfachen Summe der

aus je zwei Kräften als Gegenkanten construirten Tetraeder ist, so folgt, dass ein bezüglicher Satz bei Schell (Theorie der Bewegung und Kräfte, II. 28, unten) nicht genau ist. Endlich fliesst aus den im weiteren Verlaufe aufgestellten Formeln eine Anwendung auf die Geometrie der Complexe, insbesondere ein Beweis des Klein'schen Satzes, dass der von ihm aufgestellte Ausdruck für das gegenseitige Moment zweier linearen Complexe sich nur um gewisse Factoren der simultanen Invariante derselben Complexe unterscheide. Lp.

A. Eecen. Oplossing van prijsvraag No. 11. Nieuw Arch. XV. 57-66.

Die Preisfrage, welche hier gelöst wird, lautet folgendermassen: Wenn die auf ein Punktsystem wirkenden Kräfte in einer Ebene liegen und auf eine einzige Resultante gebracht werden können, wird, wenn jede Kraft eine beliebige, aber für alle gleiche Drehung in dieser Ebene um ihren Angriffspunkt erfährt, die Resultante stets durch einen bestimmten Punkt gehen? Man verlangt eine vollständige Untersuchung der Lage dieses Punktes für den Fall, dass gegebene Kräfte auf die Endpunkte eines Vielecks wirken.

Zunächst giebt der Verfasser einen analytischen Beweis für den Satz und wendet ihn sodann auf die folgenden besonderen Fälle an: 1) Die Kräfte sind einander parallel; 2) die Kräfte sind einander gleich; 3) die Ecken des Vielecks liegen auf dem Umfang eines Kreises; 4) die Kräfte wirken in der Richtung der Seiten des Vielecks, welches regelmässig ist; 5) das Vieleck ist ein regelmässiges Viereck. Schliesslich werden die erhaltenen Ergebnisse nochmals kurz zusammengestellt. G.

F. Franklin. Some theorems concerning the centre of gravity. American J. X. 368-370.

Bezeichnet man den Schwerpunkt der in den Punkten A, B, C, ... befindlichen Massen m_a, m_b, m_c, ... mit G, die Summe

Σm_a mit M, so finden die bekannten Gleichungen statt:

$$\text{(I.)}\quad M\Sigma m_a(GA)^2 = \Sigma m_a m_b (AB)^2,$$

$$\text{(II.)}\quad \Sigma m_a(OA)^2 = \Sigma m_a(GA)^2 + M(OG)^2.$$

Herr Franklin beweist nun andere Formeln, in denen statt der Strecken GA, AB, ... die Inhalte der Dreiecke GAB, ABC, ... oder der Tetraeder $GABC$, $ABCD$, ..., erscheinen, so dass man auch zu Räumen höherer Dimension aufsteigen kann. Man erhält so zwei Reihen von Formeln, entsprechend den Gleichungen (I.) und (II.), nämlich

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} M\Sigma m_a m_b (GAB)^2 = \Sigma m_a m_b m_c (ABC)^2, \\ M\Sigma m_a m_b m_c (GABC)^2 = \Sigma m_a m_b m_c m_d (ABCD)^2, \end{cases}$$

. . . .

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} \Sigma m_a m_b (OAB)^2 = \Sigma m_a m_b (GAB)^2 + M\Sigma m_a (OGA)^2, \\ \Sigma m_a m_b m_c (OABC)^2 = \Sigma m_a m_b m_c (GABC)^2 + M\Sigma m_a m_b (OGAB)^2, \end{cases}$$

. . . .

Die Beweise folgen aus Determinantenrelationen. Zuletzt wird auch noch die kubische Gleichung für die Hauptmomente des Systems im Schwerpunkte aufgestellt. Lp.

A. DE SAINT-GERMAIN. Sur l'extension à certains points de l'une des propriétés mécaniques du centre de gravité. C. R. CVII. 946.

Ein Lehrsatz, der mit dem König'schen Satze über die lebendige Kraft eines rotirenden Körpers im Zusammenhange steht. (Vergl. auch Gilbert, F. d. M. XVII. 1885. 884.)

Lp.

J. NEUBERG, A. R. JOHNSON. Solution of question 9080. Ed. Times XLVIII. 50-51.

Man bezeichne mit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ gegebene n Massen, mit $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ gegebene n Punkte, lege zunächst die Masse α_i in den Punkt A_i und suche den Schwerpunkt A_n; darauf lasse man A_0 fort, lege die Masse α_i in den Punkt A_{i+1} und suche den Schwerpunkt A_{n+1}; das nächste Mal verlege man α_i in A_{i+2} u. s. w., dann ist die Grenze der Punkte $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ der

Schwerpunkt der gegebenen Punkte, wenn man den Punkt A_k mit der Masse $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ belastet. Lp.

D. Biddle. Solution of question 2353. Ed. Times XLIX. 54-55.

Neue Behandlung der Aufgabe über die Milner'sche Lampe, über die man F. d. M. XIX. 1887. 745 (Tait, Cayley) vergleiche. Lp.

W. J. C. Miller, D. Biddle. Solution of question 4129. Ed. Times XLVIII. 67-77.

Drei gegebene Gewichte (schwere Massenpunkte) werden auf einer Kugelfläche befestigt, die auf horizontaler Ebene ruht. Die Gleichgewichtslage zu bestimmen. Lp.

T. P. Kirkman, D. Biddle, J. W. Sharpe. Solution of question 9228. Ed. Times XLVIII. 70.

Zwei Stäbe AC, BD von den Gewichten P und Q sind in einem Punkte D von AC durch ein Gelenk verbunden, ruhen mit den Enden A, B auf einer horizontalen Ebene und sind zwischen A und B durch einen Faden verbunden. Die Spannung T dieses Fadens ist dann

$$T = \frac{P \,.\, AC + Q \,.\, AD}{2AD(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)},$$

wo α und β die Winkel von CA und DB resp. bei A und B mit dem Faden bedeuten. Lp.

R. Marcolongo. Sull' equilibrio di un filo flessibile ed inestensibile. Napoli Rend. (2) II. 363-368.

Der Verfasser behandelt von neuem die Analogie zwischen dem Problem der Fadencurven und der Bewegung eines Punktes (zuletzt von Herrn Appell beleuchtet in Toulouse Ann. I, F. d. M. XIX. 1887. 919). Vertauscht man die Grössen der ersten Zeile mit den darunter stehenden der zweiten;

$$x,\quad y,\quad z,\quad s,\quad T\frac{dx}{ds},\quad T\frac{dy}{ds},\quad T\frac{dz}{ds};$$

$$q_1,\quad q_2,\quad q_3,\quad t,\quad p_1,\quad p_2,\quad p_3;$$

(deren Bedeutung die bekannte ist), setzt ferner $H = T + U$, so gehen die Gleichgewichtsbedingungen für den Faden über in

$$(3)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i = 1, 2, 3),$$

Gleichungen, welche mit den Bewegungsgleichungen in der Hamilton'schen Form zusammenfallen. Die Integration von (3) wird dann weiter zurückgeführt auf die von

$$(4)\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2 = (U+h)^2.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung eine vollständige Lösung mit den willkürlichen Constanten α_1, α_2, h, so sind die ersten Integrale der Gleichgewichtsfigur

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1,\quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2,\quad \frac{\partial W}{\partial q_3} = p_3,$$

die letzten:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2,\quad \frac{\partial W}{\partial h} = \tau - t.$$

Die ersten zwei geben die Gleichungen der Gleichgewichtscurve. Der Verfasser erläutert zuletzt diese Methode, indem er sie in vollem Umfange auf die gewöhnliche Kettenlinie anwendet.

Lp.

F. Kötter. Anwendung der Abel'schen Functionen auf ein Problem der Statik biegsamer unausdehnbarer Flächen. J. für Math. CIII. 44-74.

Das allgemeine Problem, von welchem der Verfasser bereits in seiner Dissertation („Ueber das Gleichgewicht biegsamer unausdehnbarer Flächen", F. d. M. XV. 1883. 797) einen speciellen Fall gelöst hat, formulirt er hier wie folgt: „Es ist ein aus einem biegsamen, unausdehnbaren, homogenen Material gefertigtes Stück einer Ebene gegeben, welches von zwei geraden Strecken *AB* und *CD* und zwei deren Endpunkte verbindenden krummen Linien *AC* und *BD* begrenzt ist. Mit den begrenzen-

den Geraden wird dieses Gebilde (oder „Tuch") in zwei Geraden *AB* und *ΓΔ* befestigt. Von all den Lagen, in welche das Gebilde dann noch gebracht werden kann, soll diejenige bestimmt werden, in welcher es unter dem Einfluss der Schwere unveränderlich verharren kann". Der von Herrn K. aufgestellte Satz, durch welchen das Problem mit einer ebenen Kettenlinie in Zusammenhang tritt, ist schon in dem Berichte über die Dissertation a. a. O. abgedruckt worden. In ihr war der Fall behandelt worden, dass das Tuch die Gestalt eines ebenen Sectors *BOD* hat, begrenzt von den Geraden *OB*, *OD* und geschlossen entweder von einem Kreisbogen *BD* mit *O* als Mittelpunkt, oder von einer Geraden *BD*. Beide Fälle führten zu Lösungen, in welche elliptische Functionen eingingen. Für einen beliebigen Sector ist übrigens der oben erwähnte Satz dahin zu modificiren, dass die Schwerpunktscurve einer Gleichgewichtslage des Tuchs identisch ist mit derjenigen Gleichgewichtslage des Schwerpunktsfadens, welche sich ergiebt, wenn jeder Punkt des letzteren gezwungen ist, auf einer bestimmten um *O'* beschriebenen Kugel zu bleiben, deren Radius (abgesehen von dem Falle, dass die Curve *BD* ein Kreis ist) von Punkt zu Punkt variirt (S. 46). In der gegenwärtigen Arbeit integrirt der Verfasser die Differentialgleichung (S. 47)

$$(2)\qquad A\frac{\psi+\psi''}{\sqrt{(1-\psi-\psi'^2)^3}}=\varrho_1^3$$

(ϱ_1 der Radiusvector, ψ eine Function des Polarwinkels φ), von der die Lösung der Aufgabe abhängt, für den Fall eines beliebigen Kegelschnittes mit dem Centrum *O*, also für einen Fall, welcher die früher untersuchten speciellen Fälle umschliesst. Die Rechnung, deren Einzelheiten in der Abhandlung selbst nachgelesen werden müssen, wird in geschickter Weise auf eine Reihe von Differentialen geführt. „Alle diese Differentiale lassen sich in einfacher Weise durch eine von Herrn Weierstrass eingeführte rationale Function zweier Wertepaare $x'y'$, xy darstellen, welche beide dem durch die Gleichung

$$y^4-2y^2(\alpha x+\beta)+x(x-\varkappa)(x-\lambda)=0$$

definirten Gebilde vom Range 3 angehören". Diese Function,

von Herrn Weierstrass mit $H(x'y', xy)$ bezeichnet, wird durch Herrn Kötter den sonstigen Bedingungen gemäss construirt und bildet den Mittelpunkt seiner analytischen Entwickelungen, durch welche zuletzt die Coordinaten entsprechender Randpunkte als Functionen eines Parameters, die Coordinaten beliebiger Punkte als Functionen zweier Parameter dargestellt werden.

Bedenkt man, dass die Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1867 die Preisfrage gestellt hatte, nach welcher „irgend ein bedeutendes Problem mit Hülfe der elliptischen oder der Abel'schen Transcendenten vollständig gelöst werden" sollte, und dass damals eine Arbeit (Ueber eine specielle Minimalfläche von H. A. Schwarz), welche die elliptischen Transcendenten verwendete, gekrönt wurde, so muss man sich einerseits freuen, dass gegenwärtig die Kenntnis der Abel'schen Transcendenten eine allgemeinere geworden ist, andererseits aber auch, dass es dem Geschick des Herrn Kötter gelungen ist, das von ihm aufgestellte Problem mit Hülfe jener Theorie vollständig zu lösen und damit eine durchgeführte Anwendung der Abel'schen Transcendenten zu liefern. Lp.

F. Kötter. Ueber das Problem der Erddruckbestimmung. Berl. phys. Ges. Verh. VII. 1-8.

Der Artikel enthält nur eine Skizze einer neuen Theorie des Erddrucks, indem der Verfasser die weitere Ausführung der entwickelten Grundzüge und ihre Anwendung auf die Beantwortung einzelner Fragen einer ausführlicheren Darstellung vorbehält. Herr Kötter hebt hervor, dass es sich für die Lösung des Erddruckproblems um die Bestimmung gewisser Grenzen handele, welche von den übrigen auf die Stützmauer einwirkenden Kräften abhängen. „Die Bilder von Kräften, welche die Mauer gegen den Erddruck im Gleichgewicht zu halten vermögen, füllen einen gewissen geschlossenen Körper. Die Oberfläche, welche den Grenzfällen entspricht, besteht aus zwei Teilen, von denen der eine dem Vorwärtsgleiten zugehört und die Gleichung $F_1(X, Y, M) = \alpha$ haben möge, während der andere

einem nach hinten gerichteten Gleiten entspricht und die Gleichung haben soll $F_2(X, Y, M) = \alpha$." Die Bestimmung dieser Grenzflächen durch Untersuchung der inneren Kräfte an einer beliebigen Stelle des von der Erde erfüllten Raumes ist der Gegenstand der Abhandlung. Lp.

Adolf Francke. Die inneren Kräfte eines durch Ebenen begrenzten Erdkörpers nebst Anwendung auf die Ermittelung des Druckes gegen Stütz- und Druckwände. Hannov. Zeitschr. XXXIV. 707-726.

Wenn ein Erdkörper von zwei sich in einer Horizontalen schneidenden Ebenen begrenzt wird, so kann man das Problem der Erddruckbestimmung wesentlich durch die Annahme vereinfachen, dass die inneren Kräfte an irgend einer Stelle proportional mit der Entfernung r von jener Schnittlinie sind, der Lage und Richtung nach aber abhängen von dem Winkel dieser Grösse zu einer der beiden fraglichen Ebenen oder zu der Horizontalen. Man gelangt dann zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades. Allerdings lassen sich von derselben bisher nur particuläre und singuläre Lösungen angeben, welche für die Lösung des Problems nicht ausreichen. Deshalb nimmt der Verfasser seine Zuflucht zu einer angenäherten graphischen Lösung, durch welche sich, nach dem Eindruck der beigefügten Zeichnungen, allerdings ohne allzu grosse Mühe eine verhältnismässig grosse Genauigkeit erreichen lässt.

Die Lösung beruht darauf, dass die conjugirten Axen der Stellungsellipse in der Beziehung stehen, dass jede von ihnen die Richtung des Druckes für die ihr conjugirte liefert. Ein Kreis durch den Mittelpunkt O dieser Ellipse hat die Eigenschaft, dass die Verbindungssehne der zweiten Schnittpunkte mit einem Paare conjugirter Axen durch einen festen Punkt J (Involutionsmittelpunkt) hindurchgeht. Ist letzterer bekannt, so kann man ohne weiteres für jede Richtung die conjugirte finden. Dabei ist selbstverändlich, dass man den Kreis auch wo

anders zeichnen kann, so dass man sich für alle Punkte der Ebene nur eines Kreises zu bedienen braucht. Ist a der Radius dieses Kreises, so liegt im Falle der Erddrucktheorie der Punkt J auf einem concentrischen Kreise mit dem Radius $a \sin\varphi$. Für alle Punkte einer Ebene, welche durch den Schnitt der Grenzebenen geht, ist offenbar die Lage conjugirter Richtungen dieselbe, und daher auch ihr Involutionsmittelpunkt.

Um nun den Erddruck wenigstens der Richtung nach zu bestimmen, hat man also zunächst einen beliebigen Kreis durch den Punkt O zu zeichnen, in welchem der Schnitt der Begrenzung die Ebene der Zeichnung trifft; dieser Kreis möge die Spur der einen Begrenzungsebene (b) in D, die andere (a) in E zum zweiten Male treffen. Nun zeichne man den concentrischen Kreis, auf welchem nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen die Involutionsmittelpunkte liegen müssen, die zu den einzelnen durch O gehenden Fahrstrahlen gehören. Man weiss, dass den beiden Begrenzungsrichtungen die Verticale conjugirt ist. Man kann daher die Involutionsmittelpunkte dieser Fahrstrahlen folgendermassen construiren. Durch O ziehe man eine Verticale, welche den erst construirten Kreis zum zweiten Male in G treffen möge; die unteren Schnittpunkte von EG und DG mit dem Kreise der Involutionsmittelpunkte sind dann die zu a und b gehörenden Involutionspunkte J_a und J_b. Zwischen diesen Punkten liegen dann die zu mittleren Fahrstrahlen gehörenden Involutionsmittelpunkte. Ist alles symmetrisch bezüglich OG, so kennt man auch den Involutionspunkt dieser Strecke, er liegt auf OG selbst und möge J heissen. OG erleidet senkrechten, d. h. horizontalen Druck; die Grösse desselben bestimmt der Verfasser wenigstens angenähert folgendermassen: Man ziehe die gerade Linie $J_a J$, welche den grossen Kreis zwischen G und E in S, zwischen D und G in F schneiden möge. Dann giebt OF die Richtung an, welche auf a und OG die Elemente der Druckrichtung OS haben. Die Tangente von S an den kleinen Kreis schneide den grossen Kreis in K, dann geben OF und OK das Intervall an, innerhalb dessen die Richtung der Elemente schwanken kann, denen die Druckrichtung OS zukommt. Dasselbe ist in

der vorliegenden Zeichnung so klein, dass man die durch *G* gehende Linie der constanten Druckrichtung *OS* durch *P* unbedenklich ersetzen kann durch eine Parallele zu *OF*, welche *a* in *N* schneiden möge. Auf das Prisma *NOG* wirken nun erstlich das Gewicht, welches nach Richtung und Grösse bekannt ist, ferner der auf *OG* wirkende horizontale Druck *R* und der ebenfalls der Richtung nach bekannte Druck *S* auf *GN*. Beide lassen sich also leicht bestimmen. Ist aber erst der Druck gegen eine durch *G* gehende Ebene bekannt, so kann man den Druck gegen irgend eine andere Ebene ohne weiteres construiren. Ist keine Symmetrie bezüglich der Verticalen vorhanden, so muss man für eine Gerade *OP* zunächst einen zwischen J_a und J_b liegenden Punkt *H* als Involutionspunkt versuchsweise annehmen. Dann ziehe man HJ_a, welche Linie den grossen Kreis in *S* und A_1 schneiden möge. Aehnlich wie vorher wird dann gefolgert, dass die Parallele *PA* zu OA_1 die Druckrichtung *OS* haben müsse. Wäre jetzt *H* der Involutionsmittelpunkt von *OP*, so müsste der Schnittpunkt H_1 von *PH* mit dem grossen Kreise die Richtung des auf *OP* wirkenden Druckes liefern. Dann könnte man die Grösse des Druckes wieder bestimmen wie vorher. Dieselbe Operation kann man auf der anderen Seite vornehmen und erhält so eine zweite Bestimmung der zu *OP* gehörenden Druckgrösse *R*. Stimmen beide überein, so ist *H* wirklich der Involutionsmittelpunkt. Im entgegengesetzten Falle erkennt man aus der Grösse der beiden Werte, nach welcher Seite man *H* zu verschieben hat, um zu einem richtigeren Resultat zu gelangen.

Diese Methoden wendet der Herr Verfasser im weiteren Verlaufe auf die Erddruckbestimmung für Wände an; bezüglich dieser Anwendung verweisen wir auf die interessante Abhandlung selbst.

F. K.

L. Nikolai. Beitrag zur Frage über den Seitendruck auf zwei Futtermauern, den eine zwischen ihnen enthaltene Erdmasse ausübt. Samml. d. Wegebau-Ing.-Inst. zu St. Petersburg. VIII. 1-32. (Russisch.)

Eine kurze Uebersicht der experimentellen und theoretischen

Untersuchungen der genannten Frage. Ausserdem werden vom Verfasser Formeln vorgeschlagen zur Berechnung des Maximums des Erddruckes auf die Futtermauern, des entsprechenden Winkels der Bruchebene mit der Verticale und des grössten Wertes der Momentensumme der angreifenden Kräfte auf's Umkanten.

Bb.

P. JANKOWSKY. Ueber die notwendige Tiefe des Fundamentes im sandigen Grunde. Das Princip von Poncelet und seine Folgerungen. Journ. d. Wegebau-Minist. (Russisch.) 1887.

C. SAVIOTTI. La statica grafica. Milano. Hoepli. I. Parte. Calcolo grafico. XII u. 177 S. 36 T. II. Parte. Statica grafica. Forze esterne. IX u. 300 S. 66 T. III. Parte. Statica grafica. Forze interne. VII u. 172 S. 24 Taf.

Dieses Werk bietet weit mehr dar, als sein Titel verspricht. Es enthält nämlich, neben der theoretischen Auseinandersetzung der graphischen Statik, eine ausführliche Entwickelung der Anwendungen derselben auf die Kunst der Constructionen und zum Teil auch auf die Maschinenlehre. Bei der grossen Fülle des Stoffes müssen wir uns auf eine kurze Uebersicht beschränken.

I. Teil. Graphischer Kalkül. 1. Capitel. Von den mit Vorzeichen behafteten Strecken, Flächen und Körpern.

2. Capitel. Operationen mit Strecken (Derivation und Integration eingeschlossen).

3. Capitel. Messung der Flächen.

4. Capitel. Schwerpunkte.

5. Capitel. Messung der Volumina; Berechnung der zum Bau einer Strasse notwendigen Erdbewegungen.

6. Capitel. Rechentafeln, Diagramme, Kartogramme u. dgl.

II. Teil. Graphische Statik. Aeussere Kräfte. 1. Capitel. Von den an discreten Punkten angreifenden Kräften. Zusammensetzung der Kräfte, Seilpolygone, Seilbüschel („fasci funicolari“, vom Verfasser eingeführt, siehe dessen Note: Sopra un nuovo

metodo di composizione delle forze in Rom. Acc. L. Atti 1879, F. d. M. XI. 628), Kräftepaare. Zerlegung der Kräfte. Reciproke Figuren; ihre Anwendung auf das Entwerfen von Dächern.

2. Capitel. Von den über alle Punkte eines ein-, zwei- oder dreidimensionalen Bereiches verteilten Kräften. Gleichgewicht eines gefesselten Körpers; Charniere, eingezapfte Körper. Systeme von Körpern im Gleichgewichte. Neutrales Gleichgewicht; Drehbrücken.

3. Capitel. Gleichgewicht mit Berücksichtigung der Reibung. Stabilität eines gestützten Körpers. Lage der kleinsten Stabilität; Anwendung auf Maschinen (Keule, Kloben, Schraube, Hebel u. s. w.). Systeme von gestützten Körpern; Bremsen, Kurbel u. s. w., Ketten und Seile.

4. Capitel. Stabilität gestützter Körper. Dämme. Schornsteine. Erddruck. Gewölbe. Seilcurven; Hängebrücken.

5. Capitel. Fachwerke.

6. Capitel. Wirkung der äusseren Kräfte auf die Querschnitte der Körper; Biegungs- und Torsionsmoment, schneidende Kraft. Diagramme. Körper mit krummliniger Axe. Bewegliche Lasten.

III. Teil. Graphische Statik. Innere Kräfte. 1. Capitel. Trägheitsmomente.

2. Capitel. Innere, widerstehende oder Molecularkräfte. Zug- und Druckkraft. Torsion. Schneidende Widerstandskraft. Beispiele.

3. Capitel. Elastische Formänderungen. Beispiele. Maximaleinsenkung der horizontalen Träger. Vi.

— —

W. Ritter. Anwendungen der graphischen Statik. Nach C. Culmann. I. Teil: Die im Inneren eines Balkens wirkenden Kräfte. Mit 65 Textfiguren und 6 Tafeln. Zürich. Meyer u. Zeller. XII u. 184 S. gr. 8°.

Culmann hatte die Absicht, die zweite Auflage seiner Graphischen Statik in zwei Bände zu trennen, von denen der I., 1875 erschienene, den theoretischen Teil, der II. die Anwen-

dungen enthalten sollte. Der II. Band gelangte nicht mehr zur Ausgabe, und es blieb nach Culmann's Tode unbekannt, nach welchem Plane er denselben zu behandeln gedachte. Die Fortschritte in der Entwickelung der graphischen Methoden seit der ersten Ausgabe liessen jedenfalls eine durchgreifende Umarbeitung als notwendig erkennen. So erscheint nunmehr in Vertretung des II. Bandes ein selbständiges Werk von dem Amtsnachfolger Culmann's unter dem obigen Titel. Es soll in fünf Teile zerfallen, von denen jeder ein abgerundetes Ganzes bildet, nämlich: I. Die im Inneren eines Balkens wirkenden Kräfte. II. Das Fachwerk. III. Der Erddruck und die Stützmauern. IV. Der continuirliche Balken. V. Der Bogen.

Der zunächst vorliegende I. Teil enthält zuerst die Culmann'schen Entwickelungen über innere Spannungen und behandelt sodann die Festigkeitslehre und die elastischen Formänderungen der Träger. In der Darstellung ist der richtige Standpunkt eingehalten, die rechnerische Methode da, wo sie rascher und sicherer zum Ziele führt, zur vollen Geltung gelangen zu lassen. Ist dies auch bei der Festigkeitslehre mehr als in den übrigen Teilen der graphischen Statik der Fall, so kommt andererseits in der Theorie der Trägheitsellipse, bezw. Elasticitätsellipse, in der zeichnerischen Bestimmung der Maximalspannungen und der Spannungstrajectorien, in der Mohr'schen Theorie der elastischen Linie u. s. w. die graphische Methode zu ihrem wohlbegründeten Recht. Die Darstellung, an welcher die Durchgereiftheit und Klarheit des Vortrages besonders hervorgehoben werden mag, ist durchaus in Culmann's Geiste gehalten, wie sich namentlich auch in der durchgängigen Verwertung der projectivischen Geometrie angenehm kennzeichnet. Hk.

Weitere Lehrbücher der Graphostatik.

J. Y. Gray and G. Lowson. The elements of graphical arithmetic and graphical statics. London and Glasgow. W. Collins, Sons, and Co.

Anzeige in Nature XXXVIII. 4-5.

M. Lévy. La statique graphique et ses applications aux constructions. 2e éd. IVe partie. Ouvrages en maçonnerie. Systèmes réticulaires à lignes surabondantes. Index alphabétique des quatre parties. Paris. Gauthier-Villars et Fils. IX + 350 S. u. 4 Taf. 8°.

Ausführliche Anzeige der Bände II-IV der zweiten Auflage dieses grossen Werks durch G. Koenigs in Darboux Bull. (2) XII_1. 281-283.

G. S. Clarke. The principles of graphic statics. 2nd ed. London. 174 S. 4°.

G. Leman. Leçons de statique graphique données à l'École d'application de l'artillerie et du génie de Bruxelles. Gand. 87 S. 8°.

R. Land. Ueber die Berechnung und die graphische Darstellung von Trägheits- und Centrifugalmomenten ebener Massenfiguren. Civiling. (2) XXXIV, auch besonders erschienen Leipzig. A. Felix. 8°.

Die vorliegende Schrift giebt eine weitere Ausführung der von Herrn Mohr begründeten Methode der graphischen Darstellung von Trägheits- und Centrifugalmomenten (Civiling. XXXIII, F. d. M. XIX. 1887. 921). Der Grundgedanke dieser Methode ist folgender: Denkt man sich durch den Schnittpunkt P der beiden Geraden, deren Centrifugalmoment gesucht wird, irgend einen Kreis gelegt, welcher von diesen Geraden in A' und B' zum zweiten Mal geschnitten wird, so ist das Centrifugalmoment der in einem Punkte Z vereinigten Punktmasse gleich dem statischen Moment einer in dem zweiten Schnittpunkte Z' der Geraden PZ und des Kreises vereinigten Masse bezüglich $A'B'$. Und zwar ist diese „Trägheitsmasse“ m_p gleich dem Quotienten aus dem polaren Trägheitsmoment J_p der gegebenen Masse und dem Durchmesser des Kreises. Handelt es sich um mehrere Einzelmassen oder eine continuirliche, in einer Ebene ausgebreitete Masse, so kann man die über die Peripherie des Kreises verteilte Trägheitsmasse m_p in ihrem „Trägheitsschwerpunkt“ T_p vereinigt

denken. Will man nach Bestimmung des „Trägheitsschwerpunktes" das Centrifugalmoment bezüglich zweier Geraden *PA*, *PB* oder das Trägheitsmoment bezüglich *PA* ermitteln, so braucht man nur m_p mit dem Abstande des Punktes T_p von $A'B'$ resp. der Tangente in A' zu multipliciren. Bezogen auf die Tangente in *P* als Abscissenaxe und den Durchmesser durch *P* als Ordinatenaxe, erhält man die Coordinaten x_t, y_t von T_p unmittelbar ausgedrückt durch das Centrifugalmoment J_{xy} bezüglich der beiden Coordinatenaxen und durch das Trägheitsmoment J_x in Bezug auf die Abscissenaxe vermittelst der Formeln

$$x_t = \frac{J_{xy}}{J_p} d, \qquad y_t = \frac{J_x}{J_p} d.$$

Man übersieht leicht, dass man an Stelle des Kreises durch *P* irgend einen Kreis in der Ebene benutzen kann; an Stelle der durch *P* gehenden Geraden hat man dann Parallelen durch irgend einen Punkt *O* (Pol) der Kreisperipherie zu benutzen, so dass man sich also für alle Punkte *P* der Ebene desselben Kreises und desselben Poles bedienen kann. Jedem Punkte *P* entspricht dann ein bestimmter Trägheitsschwerpunkt J_p. Wenn der zum Schwerpunkt gehörende Punkt T_s mit der Masse

$$m_s = \frac{T_p}{d} = \frac{F r_s^2}{d}$$

gegeben ist, kann man die zu *P* gehörenden Elemente sehr leicht construiren. Es ist bekannt, dass das Centrifugalmoment in Bezug auf zwei gerade Linien, welche sich in einem Punkte *P* mit dem Abstand *p* vom Schwerpunkte schneiden, gleich ist dem Centrifugalmoment in Bezug auf zwei parallele Geraden durch *S*, vermehrt um das Moment einer in *P* vereinigt gedachten punktuellen Masse, welche der gegebenen gleichkommt. Ebenso ist das polare Trägheitsmoment in Bezug auf *P* gleich der Summe zweier Trägheitsmomente in Bezug auf *S*, nämlich dem der gegebenen Masse und der in *P* vereinigten Masse *F*. Man kann also die Momente bezüglich der durch *P* gehenden Geraden auffassen als Momente bezüglich solcher Geraden, die durch *S* gehen. Der eine Bestandteil wird geliefert durch die statischen Momente der in T_s vereinigten Masse m_s, der andere durch die statischen

Momente der Punktmasse

$$m'_p = \frac{Fp^2}{d},$$

welche sich in dem Schnittpunkte P' des Kreises und der durch O gelegten Parallelen zu SP befindet. Die Masse m_p ist also gleich $m'_p m_s$, und der „Trägheitsschwerpunkt“ T_p ist der Schwerpunkt dieser beiden in P' und J_s befindlichen Massen. Man kann denselben sehr leicht construiren, wenn man den Radius i_s des polaren Trägheitsmomentes in Bezug auf S einführt, besonders einfach, falls $d = i_s$ gemacht wird.

Sind die Centrifugalmomente in Bezug auf drei durch denselben Punkt gehende Geradenpaare gegeben, so findet man den Trägheitsschwerpunkt folgendermassen: Man zeichne zunächst die den Geradenpaaren entsprechenden Sehnen, und in den Abständen, welche sich wie die Centrifugalmomente verhalten, ziehe man Parallelen. Die Verbindungslinien entsprechender Ecken der beiden auf diese Weise entstandenen Dreiecke schneiden sich in einem Punkte, dieser ist der gesuchte Trägheitsschwerpunkt T_p.

Conjugirte Axen werden dadurch definirt, dass ihr Centrifugalmoment gleich Null ist, und dass also ihre Sehne durch T_p gehen muss. Hieraus folgt unmittelbar eine einfache Construction der zu einer gegebenen conjugirten Axe. Die Hauptaxen sind conjugirte Axen, welche senkrecht auf einander stehen; ihre Sehne muss also ein Durchmesser sein. Sind A', B' die Endpunkte des durch T_p gehenden Durchmessers, so braucht man nur den Pol O mit A' und B' zu verbinden, um die Richtung der Hauptaxen zu erhalten.

Lässt man jetzt wieder O mit P zusammenfallen, so erkennt man nach dem Gesagten, dass T_p auf demjenigen Durchmesser liegen muss, welcher die Schnittpunkte A, B des Kreises und der beiden Hauptaxen von P verbindet, und dass die Strecken T_pA und T_pB, da sie die Abstände des Punktes T_p von den durch A und B gelegten Tangenten sind, sich wie die Hauptträgheitsmomente verhalten müssen. Daraus folgt, dass der geometrische Ort, welchen T_p beschreibt, während der Kreis sich

um P dreht, ohne seinen Radius zu ändern, derselbe ist, wie der eines Teilpunktes einer Strecke von gegebener Länge, deren Endpunkte auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten. Das ist aber eine Ellipse, deren Axen mit den Schenkeln des rechten Winkels zusammenfallen.

Teilt man jetzt für eine bestimmte Lage den Durchmesser AB, welcher den Punkt T_p enthält, durch einen inneren Punkt O_1 so, dass sich die Strecken O_1A und O_1B verhalten wie die Radien i_a und i_b der Trägheitsmomente bezüglich PA, PB, so ist das Verhältnis der Verbindungslinie von O_1 mit irgend einem Punkte C der Kreisperipherie zu dem Trägheitsradius i_c bezüglich PC unabhängig von der besonderen Lage des Punktes O. Macht man $d = i_a + i_b$, so wird O_1C direct dem Trägheitsradius i_c gleich. Dasselbe gilt von einem äusseren Punkte O_2; nur hat man dort den Durchmesser gleich der Differenz von i_a und i_b zu machen.

Wenn eine Figur eine Symmetrieaxe besitzt, d. h. eine Linie $P\mathfrak{S}$, welche alle Sehnen halbirt, die einer Richtung PR parallel sind, so ist das Centrifugalmoment in Bezug auf $P\mathfrak{S}$ und PR gleich Null. Zieht man also durch den Punkt O Parallelen zu diesen Linien, welche den Hauptkreis in $\mathfrak{S}'$ und R' schneiden mögen, so muss die Sehne $\mathfrak{S}'R'$ den Trägheitsschwerpunkt T_p von P enthalten. Schneiden sich in einem Punkte mehrere Symmetrieaxen, so kann man unschwer den Trägheitsschwerpunkt T_p construiren. Auch ergiebt sich ein hieraus leicht abzuleitender Satz über gewisse Kreissehnen.

Bewegt sich der Punkt P auf einer durch den Schwerpunkt SP gehenden Geraden, so bleibt die Parallele, welche man durch O zu SP ziehen kann, unveränderlich und mit ihr der Punkt P', in welchem der Kreis zum zweiten Mal getroffen wird. Da T_p auf der Verbindungsgeraden T_sP' liegt, so durchläuft T_p diese Strecke zweimal. T_p fällt auf P', wenn P ins Unendliche rückt, auf T_s, wenn P auf S fällt. Da T_p der Schwerpunkt der in T_s befindlichen Masse m'_s und der in P' befindlichen $m'_p = \frac{Fp^2}{d}$ ist, so teilt der Punkt T_p die Strecke T_sP' nach einem constanten

Verhältnis, wenn p ungeändert bleibt, d. h. wenn P sich auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt S bewegt. Bei dieser Bewegung von P beschreibt also auch T_p einen Kreis. Bewegt sich der Pol P auf irgend einer Geraden PR, so bleibt das Trägheitsmoment bezüglich dieser Geraden ungeändert, und damit das statische Moment bezüglich der Tangente in demjenigen Punkte R', in welchem die durch den Pol O zu PR gelegte Parallele den Grundkreis zum zweiten Male trifft. Da nun das statische Moment der in T_s befindlichen Masse m_s selbstverständlich constant ist, so gilt dies auch von dem Moment der in P' befindlichen Masse m'_p; bezeichnen wir also den Abstand des Punktes P' von der Tangente in R' mit h'_p, so hat $m'_p\,h'_p$ einen unveränderlichen Wert $a : m_s$. Es ist ferner

$$T_sT_p : T_sP' = m'_p : (m'_p + m_s) = a : (h'_p + a).$$

Demzufolge kann man den Punkt T_p folgendermassen construiren: zunächst verlängere man den zu R' gehörenden Kreisdurchmesser um die Strecke a über R' hinaus bis zum Punkte R_γ und ziehe durch diesen Punkt eine Parallele ϱ_r zu der Tangente τ_r im Punkte R'. Irgend eine Gerade durch P' möge diese beiden zuletzt erwähnten Geraden in Q'_ϱ und Q'_τ schneiden. Verbindet man nun Q'_ϱ mit T_s und zieht durch Q'_τ eine Parallele zu $Q'_\varrho T_s$, so ist der Schnittpunkt dieser Parallelen mit T_sP' der gesuchte Punkt T_p. Die Gerade $P'Q'_\tau$ wird den Kreis in einem zweiten Punkte Q' schneiden, und offenbar stehen die Punkte Q' und der Schnittpunkt T_q von T_sQ' und $T_pQ'_\tau$ in derselben Beziehung wie P' und T_p. Der Ort der Punkte P' (der Grundkreis) und der Punkte T_p stehen also in der Beziehung, dass die Verbindungslinien homologer Punkte durch einen festen Punkt (T_s) gehen, und dass sich homologe Geraden auf einer festen Geraden (τ) schneiden, d. h. also in collinearer Beziehung. Man gelangt demnach zu dem Resultat, dass sich der Trägheitsschwerpunkt auf einem Kegelschnitte bewegt, während der Pol auf einer beliebigen Geraden fortschreitet.

Nachdem der Verfasser im Anschluss hieran die Construction des Trägheitsschwerpunktes für einen beliebigen Pol durchgeführt hat, deren Einzelheiten wir hier nicht wiedergeben können, er-

örtert er in einem Schlusscapitel die Beziehungen zwischen Grundkreis und Trägheitsschwerpunkt einerseits und der Trägheitsellipse andererseits. F. K.

E. Lobscheid. Ueber den Schlusssatz des coroll. 2 zu problema 42 in Euler's Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Pr. Realgymn Barmen (No. 439). 14 S. 4°.

Euler berechnet an dieser Stelle die Hauptträgheitsmomente für den homogenen Würfel von der Kante a und macht, da dieselben gleich ausfallen, die Bemerkung: „Talis aequalitas in omnibus corporibus regularibus locum habere debet". Der Verfasser bestätigt diese Bemerkung durch Berechnung der Trägheitsmomente der fünf Platonischen Körper für die Hauptaxen nach einheitlicher Methode. Ist M die Masse, a die Kante eines solchen Polyeders, T sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine Hauptaxe, so findet Herr L. (die Dichte = 1 gesetzt) für das:

1) Tetraeder: $T = \frac{1}{20}Ma^2 = \frac{a^5}{240}\sqrt{2}$,

2) Oktaeder: $T = \frac{1}{10}Ma^2 = \frac{a^5}{30}\sqrt{2}$,

3) Ikosaeder: $T = \frac{1}{20}Ma^2(3+\sqrt{5}) = \frac{a^5}{24}(7+3\sqrt{5})$,

4) Hexaeder: $T = \frac{1}{6}Ma^2 = \frac{1}{6}a^5$,

5) Dodekaeder: $T = \frac{1}{300}Ma^2(95+39\sqrt{5}) = \frac{a^5}{120}(279+125\sqrt{5})$.

Lp.

S. T. Moreland. Special forms of the momental ellipsoid of a body. Annals of Math. IV. 49-53.

Sind a, b, c die Halbaxen des Centralellipsoids eines Körpers, M die Masse des letzteren, so liegen auf den Normalen zu den Kreisschnitten des Centralellipsoids in dem durch die Gleichung

$$(1) \qquad Md^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{b^2}$$

bestimmten Abstande d vom Mittelpunkte je zwei Punkte (im ganzen also vier), für welche die Kreisschnitte der zugehörigen Trägheitsellipsoide auf einander senkrecht sind. Die Bedingung für ihre Existenz ist also, dass die rechte Seite von (1) positiv oder Null sei. (Im letzteren Falle wandern die vier Punkte in den Mittelpunkt des Centralellipsoids.) Ist $\beta = \angle(d, c)$, und lässt man b sich ändern, während a, c, M constant bleiben, so ist der Ort jener vier Punkte die Lemniskate:

$$(2) \qquad d^2 = \frac{a^2-c^2}{Ma^2c^2}\cos 2\beta.$$

Indem der Verfasser die Axen des Schnitts der Ebene (ac) mit den Trägheitsellipsoiden dieser vier Punkte berechnet, findet er die bekannte Bedingung für die Punkte, in denen das Trägheitsellipsoid eine Kugel wird. Zuletzt wird darauf hingewiesen, dass wegen der Möglichkeit der gefundenen vier Punkte ein Schluss von Poinsot in seiner „Théorie nouvelle de la rotation des corps" p. 63 hinfällig wird. Die Frage, ob es ausser jenen vier Punkten in der Ebene (ac) noch andere von gleicher Eigenschaft im Raume giebt, bleibt eine offene. Lp.

W. S. B. Woolhouse. Solution of question 8922.
Ed. Times XLVIII. 72-74.

Eine dünne homogene viereckige Platte rotire um eine durch ihren Schwerpunkt gehende Axe. Sind y_1, y_2, y_3, y_4 die Abstände der Ecken von der Rotationsaxe (mit den zugehörigen Vorzeichen), k der Trägheitsradius, so folgt

$$6k^2 = -(y_1y_2+y_1y_3+y_1y_4+y_2y_3+y_2y_4+y_3y_4).$$

Lp.

E. Cesaro. Moment d'inertie du triangle et du tétraèdre.
Mathesis VIII. 183-186.

V. Lebeau. Moments d'inertie. Surfaces et centres de gravité des profils quelconques: formules par lesquelles

on les obtient. Tableaux des surfaces, poids, centres de gravité et modules de flexion des profils laminés employés dans l'industrie. Liège. 71 S. 4°. (autogr.)

Hacker. Statische Berechnung der Spannungen des Fachwerks im Raume bei schiefer Belastung. Z. f. Bauwesen. XXXVIII. 43-82.

Der Artikel bietet kein mathematisches Interesse dar.

F. K.

B. Hydrostatik.

H. G. Zeuthen. Forelaesninger over Hydrostatik. Zeuthen Tidss. (5) VI. 129-152.

Vorlesungen über Hydrostatik. Herr Zeuthen hat in diesen Vorlesungen eine ausgezeichnet klare und leichtfassliche Darstellung der Grundprincipien der Hydrostatik geliefert. Hier werde nur das Inhaltsverzeichnis gegeben, nämlich: I. Das Gleichgewicht der Flüssigkeiten. II. Der Druck, welchen Flüssigkeiten auf feste Flächen ausüben. III. Schwimmende Körper.

V.

S. B. Mukerjee. Elementary hydrostatics, with numerous examples and university papers. Calcutta. Thacker, Spink, and Co.

Anzeige in Nature XXXVIII. 76.

H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation. C. R. CVI. 1571-1575.

Der Herr Verfasser beweist den Satz:

Wenn ein fester Kern von n über einander gelagerten flüssigen Schichten verschiedener Dichtigkeit bedeckt ist, so können

die Trennungsflächen, falls das ganze System wie ein fester Körper rotiren soll, nur dann Ellipsoide sein, wenn sie auch homofocal sind. F. K.

A. B. Basset. On the stability of a liquid ellipsoid which is rotating about a principal axis under the influence of its own attraction. Lond. M.S. Proc. XIX. 46-56.

Der Verfasser klassificirt vorläufig die verschiedenen ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren rotirender flüssiger Massen, und untersucht ihr Verhalten gegenüber gewissen durch impulsiven Druck auf die freie Oberfläche hervorgebrachten Störungen von der Beschaffenheit, dass bei Beginn der gestörten Bewegung das Ellipsoid seine Gestalt nur insofern ändert, als die Axen andere Werte annehmen. Es wird zunächst als Kriterium für die Stabilität die Eigenschaft aufgestellt, dass die Energie ein Minimum sei, und dass es also nicht möglich ist, durch eine ellipsoidische Störung diese Energie zu vermindern. Der Verfasser teilt nun die impulsive Störung in zwei Teile, von denen der erste die Variation der Axen bewirkt, während der letztere eine Abweichung des Bewegungszustandes ohne Aenderung der Gestalt hervorruft. Es ist klar, dass Kräftepaare, welche im Sinne der Rotation wirken, eine Vermehrung der kinetischen Energie hervorrufen, und dass also diesen gegenüber die Bewegung stabil ist. Ist die Wirkungsweise eine andere, so ist offenbar unter Umständen eine Verminderung der Energie möglich. Beweist die Störung eine Axenänderung, so muss das Product abc ungeändert bleiben, und wir erhalten als Stabilitätsbedingung

$$\frac{\partial E}{\partial a}-\frac{c}{a}\frac{\partial E}{\partial c}=0 \text{ und } \frac{\partial E}{\partial b}-\frac{c}{b}\frac{\partial E}{\partial c}=0.$$

Stellen wir die Energie in der Form dar

$$E=\frac{M}{5}\left\{\frac{r^2}{(a-b)^2}+\frac{r'^2}{(a+b)^2}-2\pi\varrho abc\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\right\},$$

so bleiben bei der Störung r und r' ungeändert, und es handelt sich also um die Auffindung des Minimums der Function z von

x und y:

$$z = \frac{r^2}{(x-y)^2} + \frac{r'^2}{(x+y)^2} - 2\pi\varrho R^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(x^2+\lambda)(y^2+\lambda)\left(\frac{R^4}{x^2y^2}+\lambda\right)}},$$

wo R das gegebene Product der drei Axen ist.

Der Verfasser weist die Möglichkeit des Minimums für beliebige Werte von r und r' nach, indem er x, y, z als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes betrachtet und dann die durch die eben angeführte Gleichung dargestellte Fläche untersucht.

Die Minimumsbedingung wird nur für Maclaurin's Sphäroid analytisch formulirt, sie lautet, wenn e die Excentricität bezeichnet:

$$\frac{1}{\sin e}\left\{2-e^2-\frac{3}{8e^2}\right\}+\sqrt{1-e^2}\left(\frac{3}{8e}-\frac{5e}{8}\right)>0,$$

und ist für jeden Wert $1>e>0$ erfüllt.

Nimmt man dies mit dem ohne Beweis ausgesprochenen Resultat von Thomson und Tait zusammen, dass das Sphäroid instabil wird, wenn

$$e>\sin(54^\circ 21' 27'') = 0,\ 8127$$

ist, so erkennt man, dass die von den genannten Autoren betrachteten Störungen nicht von der hier betrachteten Art sein können. F. K.

O. Zanotti Bianco. Il problema meccanico della figura della terra esposto secondo i migliori autori: Parte seconda, libro primo. Figura d'equilibrio delle masse fluide rotanti e metodi per la determinazione della densità della terra. Firenze, Torino, Roma. Fratelli Bocca. 1885.

Der vorliegende Band (vgl. den Bericht über den ersten in F. d. M. XV. 1883. 862) giebt eine sowohl durch Klarheit als durch Vollständigkeit und Reichhaltigkeit ausgezeichnete Darstellung der bisher angestellten theoretischen Untersuchungen über die Gestalt der Erde und der Methoden für die Bestimmungen der mittleren Erddichte. Die Literatur ist überall angeführt, so dass ein Zurückgehen auf die Quellen ermöglicht wird; auch das Zahlenmaterial ist hinreichend angegeben.

Die ersten beiden Capitel behandeln das hydrodynamische Problem der Gleichgewichtsfigur einer flüssigen Masse, welche wie ein fester Körper um eine Axe mit constanter Geschwindigkeit rotirt. Zunächst wird vorausgesetzt, dass auf die Teile der Flüssigkeit eine nach dem Mittelpunkt gerichtete Kraft wirkt; dann, dass die Teile sich gegenseitig nach dem Newton'schen Attractionsgesetz anziehen. Unter Benutzung der im ersten Bande abgeleiteten Formel für das Potential eines Ellipsoides werden die beiden Beziehungen aufgestellt, welche zwischen den Axenverhältnissen und der Geschwindigkeit bestehen müssen, wenn ein Ellipsoid eine Gleichgewichtsfigur sein soll. Dieselbe wird discutirt, wobei natürlich der für den vorliegenden Zweck wichtigste Fall eines Rotationsellipsoids besondere Beachtung erfährt. Im zweiten Capitel wird das Gleichgewicht für variable Dichtigkeit behandelt, und zwar besonders der Fall, in welchem die Flächen gleicher Dichtigkeit sehr wenig von Kugeln abweichen. Es wird die Abplattung der Oberfläche und der übrigen Niveaufläche bestimmt.

Im letzten Capitel werden eingehend die Methoden zur Bestimmung der Erddichte auseinandergesetzt. Zunächst wird beschrieben, wie man mit Hülfe der Anziehung von Bergen die mittlere Dichte der Erde bestimmen kann. Dann folgt die Bestimmung der Erddichte aus Pendelbeobachtungen, welche am Fusse und auf dem Gipfel eines Berges angestellt sind, und aus Pendelbeobachtungen, die an der Erdoberfläche und in einiger Tiefe unter derselben gemacht sind. An vierter Stelle wird die Bestimmung der mittleren Dichte vermittelst der Drehwage besprochen. F. K.

Th. Schmid. Ueber das Gesetz der Veränderlichkeit der Schwere für das Jacobi'sche Gleichgewichtsellipsoid. Schlömilch Z. XXXIII. 188-190.

L. Matthiessen. Bemerkungen zu Schmid's Mitteilung: „Ueber das Gesetz der Veränderlichkeit der Schwere“ etc., S. 188 dieses Bandes. Schlömilch Z. XXXIII. 306-307.

Herr Schmid beweist, dass auf der Oberfläche eines Jacobi'-

schen dreiaxigen Gleichgewichtsellipsoids die Schwere proportional ist den Abschnitten der Normalen durch eine der Hauptebenen. Dieser Satz ist, wie Herr Matthiessen bemerkt, nicht neu, findet sich vielmehr schon in zweien seiner älteren Schriften [„Ueber die Gleichgewichtsfiguren homogener, freier rotirender Flüssigkeiten", Kiel 1857, und „Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten" etc., Kieler Univ.-Chron. 1859]. Aus den genannten Schriften führt Herr Matthiessen noch zwei weitere Resultate an, die sich auf die isodynamischen (isobaren) Flächen und Curven beziehen. Erstere sind concentrische Ellipsoide im Innern der Masse, deren Halbaxen sich verhalten wie die Quadrate der Halbaxen des Hauptellipsoides; letztere sind die Schnitte der eben erwähnten Flächen mit dem Hauptellipsoide.

Wn.

G. H. Bryan. On the waves on a viscous rotating cylinder, an illustration of the influence of viscosity on the stability of rotating liquid. Cambr. Proc. VI. 248-264.

Als Gleichgewichtsfigur für eine gleichförmig rotirende homogene Flüssigkeit, deren Molecüle sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, waren das Rotationsellipsoid und gewisse dreiaxige Ellipsoide (Jacobi) bekannt. Herr Poincaré (Acta Math. VII, 259-380, F. d. M. XVII. 1885. 864) hat weitere Gleichgewichtsfiguren gefunden und gleichzeitig Untersuchungen über die Stabilität angestellt. Er findet, dass das Gleichgewicht stabil ist, wenn die Energie ein Maximum oder ein Minimum ist, vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit keine Viscosität besitzt. Um den Einfluss der Viscosität auf die Stabilität zu untersuchen, hat Herr Bryan das vorliegende Beispiel gewählt, das er mit Hülfe Bessel'scher Functionen ausführlich discutirt. Wie man von vorn herein erwarten konnte, findet er, dass die Poincaré'sche Bedingung hier nicht mehr Gültigkeit hat.

St.

B. Martinecq. Guide des calculs de déplacement et de stabilité hydrostatique des navires. Paris. 200 S. u. 6 Taf. 8°.

Capitel 4.

D y n a m i k.

A. Dynamik fester Körper.

C. Neumann. Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper. Leipz. Ber. 22-88.

Auf der Oberfläche eines starren Körpers M seien zwei zu einander orthogonale Curvensysteme festgesetzt. Die Parameter v und w derselben mögen als Coordinaten dienen zur Bestimmung eines Punktes auf der Oberfläche. Analoge Bedeutungen mögen ferner v^* und w^* besitzen für einen zweiten starren Körper M^*. Sind nun beide Körper mit einander in Berührung, so wird die relative Lage der beiden Körper zu einander völlig bestimmt sein, sobald gegeben sind 1) die Coordinaten v, w und v^*, w^*, welche der Berührungspunkt auf der einen und auf der andern Oberfläche besitzt, 2) der Winkel ψ, unter welchem die beiden durch den Berührungspunkt gehenden Curven $v =$ const. und $v^* =$ const. gegeneinander geneigt sind.

Denkt man sich also den Körper M absolut festliegend, und den Körper M^* in irgend welcher Bewegung begriffen, bei welcher er mit M fortdauernd in Berührung bleibt, so wird diese Bewegung völlig bestimmt sein, sobald man die fünf Argumente

$$v,\ w,\ v^*,\ w^*,\ \psi$$

als bestimmte Functionen der Zeit sich vorstellt. Die augenblickliche lebendige Kraft T^* des Körpers M^* muss daher ausdrückbar sein durch diese fünf Argumente und durch deren Differentialquotienten nach der Zeit.

Ein derartiger Ausdruck der lebendigen Kraft T^* wird nun vom Verfasser [in (9), Seite 55] wirklich hergestellt, jedoch ohne Mitteilung der zu demselben führenden Rechnungen. Hingegen wird in den folgenden Paragraphen eine allgemeine Methode entwickelt, um diese und ähnliche Rechnungen möglichst zu erleichtern. N.

J. König. Ueber eine neue Interpretation der Fundamentalgleichungen der Dynamik. Math. Ann. XXXI. 1-42. Ungar. Ber. V. 131-179.

Der Verfasser charakterisirt die Aufgabe, welche er sich gestellt hat, folgendermassen (S. 3):

Für die einfachste aller Bewegungserscheinungen, die freie Bewegung eines einzelnen Punktes von der Masse m unter der Einwirkung einer Kraft P, hat man die folgenden beiden Sätze:

1) Die Grösse der Beschleunigung (oder auch der in die Richtung der Kraft fallenden Beschleunigungscomponente) ist P/m.

2) Beschleunigung und Kraft sind gleich gerichtet.

Es hat ein unbestreitbares Interesse, ein solches allgemeines Grundgesetz der Mechanik aufzustellen, das für die Bewegung eines unter dem Einfluss ganz beliebiger Kräfte stehenden Punktsystems bei der Annahme irgend welcher auch die Zeit und Geschwindigkeit enthaltenden Bedingungsgleichungen gültig ist, diese Bewegung vollständig bestimmt und dabei nur aus der Verallgemeinerung jener beiden Sätze besteht. Da der erste jener Sätze eine Gleichung, der zweite ein System von gleichberechtigten Gleichungen vertritt, die wieder in einem Maximums- oder Minimumssatze vereinigt werden können, wird dieses Grundgesetz sich dementsprechend aus zwei Teilen zusammensetzen.

In dem ersten Abschnitte, „einleitende Festsetzungen“, wird betont, dass bei Ermittelung des Grundgesetzes der Bewegung in erster Reihe die Invarianteneigenschaften der Bewegung zu fixiren sind. Der zweite Abschnitt führt eine Reihe neuer mechanischer Begriffe ein. Sind x_i, y_i, z_i die Coordinaten eines Systempunktes, m_i seine Masse, X_i, Y_i, Z_i die parallel zu den Coordinatenaxen genommenen Componenten der zur Zeit t auf m_i einwirkenden Kraft, so heisst die Summe:

$$\Sigma m_i(x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

die „Beschleunigungsenergie“ des Punktsystems, ferner die Summe

$$\Sigma(X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i') \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

das „Geschwindigkeitsvirial“ der wirkenden Kräfte; dasselbe ist

also der nach der Zeit genommene Differentialquotient der bis zum Zeitpunkte t geleisteten Arbeit. Ferner erhält die Summe

$$\Sigma \frac{1}{m_i}(X_i^2+Y_i^2+Z_i^2) = E \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

den Namen „Energem" des Kräftesystems, als charakteristische Eigenschaft des wirkenden (Kräfte-) Systems, welcher im bewegten Systeme die Energie entspricht. Ist ferner

$$M = \Sigma m_i, \; R^2 = M \,.\, E, \; X_i = M\alpha_i, \; Y_i = M\beta_i, \; Z_i = M\gamma_i,$$

so drückt die Gesamtheit der Coefficienten α_i, β_i, γ_i eine zweite Eigenschaft des Kräftesystems aus und wird als „Disposition des Kräftesystems" bezeichnet. Jedes Kräftesystem kann in einer und nur in einer Weise so in zwei partielle Systeme zerlegt werden, dass das eine dieser Systeme eine gegebene Disposition besitzt und die Summe der Energeme der beiden partiellen Systeme gleich dem Energeme des gegebenen Systems ist. Es folgen noch mehrere Sätze über die Dispositionen von Kräftesystemen, deren Aufzählung hier unmöglich ist.

Nach diesen Vorbereitungen werden im dritten Abschnitte die „Grundgesetze der Bewegung" aufgestellt. Man findet zunächst im § 15 (S. 27) die Sätze (erstes Gesetz):

Das Beschleunigungsvirial der freien Componente des auf das Punktsystem wirkenden Kräftesystems ist in jedem Zeitpunkte gleich dem Energem dieser freien Componente des Kräftesystems.

Unter allen Bewegungen, die den Zwangsgleichungen und dem in Bezug auf das Beschleunigungsvirial soeben ausgesprochenen Satze gemäss erfolgen könnten, findet in Wirklichkeit diejenige statt, für welche die Beschleunigungsenergie in jedem Zeitpunkte ein Minimum ist.

Zur Erklärung des Begriffes „freie Componente" diene die Bemerkung, dass beim Vorhandensein von Zwangsbedingungen das Kräftesystem für jeden Zeitpunkt in einer (und nur einer) bestimmten Weise so in zwei Componenten zerlegt werden kann, dass die eine dem Zwange unterworfen, die andere eine freie Componente ist.

In den folgenden §§ 15-17 wird nun gezeigt, wie dieses

Gesetz immer zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen der Bewegung und nur zu diesen führt; der § 18 dagegen deutet an, wie ein anderes Grundgesetz der Bewegung erhalten werden kann, wenn man die dem Beschleunigungsvirial und der Beschleunigungsenergie zukommenden Rollen mit einander vertauscht. Ein Satz, dem der erste Teil des Gesetzes fehlt, und welcher zwar notwendige, aber nicht hinreichende Angaben zur vollständigen Bestimmung der Bewegung enthält, lautet:

Bei der wirklich stattfindenden Bewegung ist das Beschleunigungsvirial in jedem Zeitpunkt grösser als bei jeder anderen Bewegung, welche den Zwangsgleichungen entspräche, und für welche die Beschleunigungsenergie in jedem Zeitpunkte dieselbe wäre, wie für die wirklich stattfindende Bewegung.

Es trennen sich bei der weiteren Behandlung die freie und die Zwangsbewegung:

Das Beschleunigungsvirial eines ohne Zwang wirkenden Kräftesystems ist in jedem Zeitpunkte gleich der Beschleunigungsenergie des Punktsystems; das Energem des wirklich auftretenden Kräftesystems ist kleiner als das jedes anderen Kräftesystems, dessen Beschleunigungsvirial gleichfalls in jedem Zeitpunkte der Beschleunigungsenergie des Punktsystems gleich ist.

Das Energem des Systems der Zwangskräfte ist ein Minimum, verglichen mit dem Energem aller jener Kräftesysteme, nach deren Hinzufügung zu dem ursprünglich gegebenen Systeme der wirkenden Kräfte die freie Bewegung des Punktsystems eine den Zwangsgleichungen entsprechende wäre. Lp.

— — —

D. Bobylew. Ueber die Transformation der Coordinaten in den Differentialgleichungen der Dynamik. Petersb. Abh. LVIII. No. 3. 1-21. (Russisch.)

In diesem Aufsatze werden Formeln abgeleitet, die in vielen Problemen der Mechanik zum Uebergange von den cartesischen Coordinaten zu von einander unabhängigen Variabeln und umgekehrt dienen, für den allgemeinen Fall, wo die Bedingungsgleichungen die Zeit explicite enthalten.

Mittels dieser Formeln drückt der Verfasser die lebendige Kraft T des Systems durch die Variabeln t, q und p aus, wo q unabhängige neue Variabeln sind und $p = \frac{\partial T}{\partial q'}$ ist, wenn $q' = \frac{dq}{dt}$; der erhaltene Ausdruck lässt sich als Summe zweier Glieder darstellen, von denen das erste eine homogene Function zweiten Grades von p ist, und das zweite eine p nicht enthaltende Function zweiten Grades von den partiellen nach t genommenen Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen.

Indem ferner die Existenz einer Kräftefunction vorausgesetzt wird, führt der Verfasser in den Ausdruck der „principalen Function" statt q cartesische Coordinaten ein, welche durch die Zeit explicite enthaltende Bedingungsgleichungen verbunden sind, und erhält: 1) Ausdrücke für die Projectionen der Geschwindigkeit durch die partiellen Differentialquotienten der principalen Function und 2) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher die principale Function, in cartesischen Coordinaten ausgedrückt, genügt. Ms.

G. K. Suslow. Ueber die partiellen Differentialgleichungen der Bewegung eines unfreien Systems. St. Petersburg. 64 S. (Russisch.)

Die Abhandlung besteht aus zwei Teilen.

Im ersten wird derjenige Fall untersucht, bei welchem die Veränderlichen, welche die Lage des Systems bestimmen, Bedingungsgleichungen unterworfen sind, also die Hamilton'schen Differentialgleichungen der Bewegung folgende sind:

$$(1) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $F_1(t, q_1, \ldots, q_n) = C_1, \ldots, F_k(t, q_1, \ldots, q_n) = C_k$ die gegebenen Bedingungsgleichungen bedeuten. Der Verfasser beschäftigt sich mit der Zurückführung der Integration des Systems (1) auf die Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_j \mu_j \frac{\partial F_j}{\partial t} + H = 0,$$

wo statt $p_1, \ldots, p_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ ihre Ausdrücke durch die partiellen Differentialquotienten der Function V und die Variabeln $t, q_1, \ldots, q_n$ aus den Gleichungen:

$$(3)\qquad p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} - \sum_j \mu_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(4)\qquad 0 = \sum_i \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F_j}{\partial t} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

eingeführt werden.

Ist $V(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \alpha$ die vollständige Lösung der Gleichung (2), so sind die Integralgleichungen des Systems (1) die Gleichungen (3) und

$$(5)\qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots, \frac{\partial V}{\partial \alpha_n} = \beta_n,$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ Constanten sind.

Ferner zeigt der Verfasser:

1) dass die Zahl der Veränderlichen in der Gleichung (2) um k Einheiten kleiner wird, wenn statt der Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_k$ die $F_1, F_2, \ldots, F_k$ als neue Variabeln eingeführt werden;

2) dass zwischen den Multiplicatoren λ und μ die Relation:

$$\lambda_j = -\frac{d\mu_j}{dt} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

stattfindet.

Der zweite Teil des Aufsatzes ist der Ableitung des Systems der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gewidmet, welchen die Kräftefunction genügen muss, die $n-1$ gegebene Integrale der Bewegung zulässt, nämlich:

$$F_1(q_1, \ldots, q_n) = C_1, \ldots, \quad F_{n-1}(q_1, \ldots, q_n) = C_{n-1},$$

wo $q_1, \ldots, q_n$ unabhängige, die Lage des Systems bestimmende Variabeln und $C_1, \ldots, C_{n-1}$ Constanten bedeuten.

Die theoretischen Schlüsse werden durch sehr einfache Beispiele beleuchtet. Ms.

H. Lamb. On reciprocal theorems in dynamics. Lond. M. S. Proc. XIX. 144-151.

Herr H. von Helmholtz hat in seiner Arbeit „Ueber die

physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung" (J. für Math. C. 137-166, 213-222, F. d. M. XVIII. 1886. 941) auf S. 218 ein „Gesetz der Reciprocität" ausgesprochen und begründet, das für jedes bewegte System gültig ist, welches dem Gesetze der kleinsten Wirkung unterworfen ist und umkehrbare Bewegungen hat. Der Verfasser des vorliegenden Aufsatzes macht darauf aufmerksam, dass man dieses Gesetz aus einer Formel in Lagrange's Mécanique analytique ableiten kann (S. 300 ff. der Bertrand'schen Ausgabe). Ausser dieser neuen Herleitung werden, wie dies schon bei Herrn v. Helmholtz geschehen ist, für verschiedene mechanische und physikalische Betrachtungen Folgerungen aus dem Gesetze in der gewählten Gestalt gezogen, die der Verfasser für etwas allgemeiner hält als die v. Helmholtz'sche. Zuletzt wird auch das zweite v. Helmholtz'sche Reciprocitätsgesetz (a. a. O. S. 222) auf die angeführte Lagrange'sche Gleichung als gemeinschaftliche Quelle zurückgeführt.

Lp.

R. Marcolongo. Teorema di meccanica. Palermo Rend. II. 193-196.

Im Anschluss an einen Satz von C. G. J. Jacobi (J. für Math. LX. 149, Ges. Werke V. 157, unten) beweist der Verfasser folgenden Satz: „Jedes Problem der Mechanik, bei welchem die geometrische Lage des Systems nur von drei Grössen abhängt und für welches besteht: 1) das Integral der lebendigen Kräfte, 2) eines der Flächenintegrale, 3) eines der Schwerpunktsintegrale bezüglich einer der Axen der Ebene, für welche der Flächensatz stattfindet, ist auf Quadraturen zurückführbar." Lp.

R. Marcolongo. Sul teorema di Poisson. Napoli Rend. (2) II. 419-423.

Wenn man von den Bewegungsgleichungen in der kanonischen Form

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s},$$

wo $H = T - U$ ist, T die halbe lebendige Kraft, U die Kräftefunction bezeichnet, zwei Integrale $H = h_1$ und $H = h_2$ kennt, die unabhängig von der Zeit und nach den willkürlichen Constanten gelöst sind, so giebt die Combination $H = (H_1, H_2) = h_3$ ein neues Integral der Bewegungsgleichung mit der willkürlichen Constante h_3. Hier steht nach Poisson (J. de l'Éc. Pol. cah. XV. 266) das Symbol (H_1, H_2) für

$$\sum_{s=1}^{s=n}\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_s}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial q_s} - \frac{\partial H_1}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial p_s}\right).$$

Aus diesem Satze hatte Poisson schon gefolgert, dass, wenn zwei Flächenintegrale bestehen, auch das dritte vorhanden ist.

Herr Marcolongo stellt nun ähnliche Betrachtungen über die Integrale bezüglich des Schwerpunktes an (nach Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 271). Als einzigen neuen Satz findet er: Wenn bei einem dynamischen Problem das Flächenintegral bezüglich einer der Coordinatenebenen und das Schwerpunktsintegral bezüglich einer der Axen dieser Ebene besteht, so besteht auch das entsprechende Integral für die andere Axe dieser Ebene. Folglich: Wenn bei einem mechanischen Problem zwei Flächenintegrale und ein Schwerpunktsintegral bestehen, so sind auch das dritte Flächenintegral und die beiden anderen Schwerpunktsintegrale vorhanden. Die Combinationen eines Schwerpunktsintegrales mit dem Integrale der lebendigen Kraft oder einem anderen Schwerpunkts- oder Flächenintegrale ergeben kein neues Resultat. Lp.

E. Betti. Sopra la entropia di un sistema Newtoniano in moto stabile. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV₂. 113-115, 195-198.

Die Bewegung des Systems heisst stabil, wenn der Wert der Jacobi'schen Function $\Phi = \frac{1}{2}\Sigma\frac{m_i m_s}{M}\cdot r_{is}^2$ unendlich viele Maxima und Minima annimmt, aber sich dabei immer innerhalb zweier endlichen Grenzen hält. Ist die Zeit, die vom ersten bis n^{ten} Maximum oder Minimum der Function Φ vergeht, t_n, so wird die sogenannte „mittlere Periode“ $\frac{t_n}{n-1}$ entweder von n unab-

hängig sein oder sich mit wachsendem n einem bestimmten Grenzwerte nähern. Für solche Systeme giebt der Verfasser in der ersten Mitteilung folgende Sätze: Bei den Veränderungen der Bewegung bleibt das Verhältnis des Kubus der mittleren Entfernung zum Product aus der Masse und dem Quadrate der mittleren Periode constant. Die Entropie des Systems ist gleich dem Logarithmus des Products aus der Masse und der mittleren Entfernung.

In der zweiten Mitteilung wird nachträglich bewiesen, dass der Clausius'sche Satz auf die in Rede stehenden Systeme anwendbar ist. Sbt.

J. Brill, R. Holmes, B. Easton. Solution of question 9054. Ed. Times XLVIII. 43.

Ein Massenpunkt m bewegt sich in einem conservativen Kräftefeld und erleidet die Einwirkung einer verzögernden Kraft, die der Geschwindigkeit proportional (kv) ist. Ist nun D die während der Zeit t zerstreute Energie, so ist

$$\frac{dD}{dt}+\frac{2k}{m}(D+V-E)=0,$$

wo V die potentielle Energie des Systems zur Zeit t und E die gesamte Energie des Systems zur Zeit $t=0$ bezeichnet.

Lp.

Fr. Schüler. Die Planetenbewegung. Hoffmann Z. XIX. 161-178.

Die Arbeit ist veranlasst durch eine zwischen dem Verfasser und H. Vogt in Hoffmann Z. XVIII. 581 ff. geführte Controverse, welche Bezug hat auf eine Programmschrift des ersteren: Die Falllinie und die Planetenbahnen als involutorische Punktreihen auf Grund des Princips der Erhaltung der Kraft, elementar behandelt. Freising 1881. — Es handelt sich hauptsächlich um die Frage, ob die in jener Arbeit aufgestellte Gleichung $\frac{Mm}{r}+\frac{Mm}{r'}=h$ hinreichend sei, um die Planetenbahnen als Kegelschnitte zu bestimmen. Lg.

E. Betti. Sopra una estensione della terza legge di Keplero. Palermo Rend. II. 145-147.

Beweis des Satzes: „Die Variationen der Bewegung und der Masse eines Newton'schen Systems ändern nicht das Verhältnis zwischen dem Kubus der mittleren Entfernung und dem Producte aus der Masse und dem Quadrate der mittleren periodischen Zeit.“ Lp.

R. Curtis, F. X. de Wachter, A. Harker. Solution of question 9070. Ed. Times XLVIII. 29-30.

Synthetische Beweise mehrerer Sätze über die Projectionen von Centralbewegungen, insbesondere der Bewegung in elliptischer Bahn. Lp.

G. Schouten. De regel voor den baanvorm en de eigenschappen der centrale beweging graphisch toegelicht. Amst. Versl. en Meded. (3) V. 14-43.

Siehe F. d. M. XIX. 1887. 930. G.

W. Velde. Ueber einen Specialfall der Bewegung eines Punktes, welcher von festen Centren angezogen wird. Diss. Kiel. 26 S. 4°.

R. Haussner. Die Bewegung eines von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetze angezogenen materiellen Punktes. Diss. Göttingen. 38 S. 8°.

O. Gerlach. Zur Theorie des Hodographen. Diss. Rostock. 67 S. 8°.

S. C. Föhre. Die Beschleunigung der Tangential-Bewegung von Planet zu Planet ist eine Summirung der Schwerkraft. Halle. 15 S. u. 1 Taf. (1887.)

A. Naggy. Sul moto di un punto in un mezzo resistente. Batt. G. XXVI. 369-374.

Der Verfasser legt seinen Betrachtungen über die Bewegung einer schweren Punktmasse im widerstehenden Mittel die Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Af\left(\frac{dx}{dt}\right),\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - Af\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

zu Grunde, macht also (abgesehen von dem einen Falle, dass $f(u)$ einfach proportional zu u ist) die Wirkungsweise des Widerstandes von der Wahl des Coordinatensystems abhängig. Die durchgeführten einfachen Beispiele haben daher nur den Wert von Rechenübungen. F. K.

O. Staude. Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche. Acta Math. XI. 303-332.

Die Abhandlung gehört einer Reihe von Arbeiten des Verfassers an, welche wegen ihrer functionentheoretischen Untersuchungen in die reine Analysis gehören (vergl. F. d. M. XIX. 1887. 486 und 944 ff., besonders aber die Abhandlung J. für Math. CV. 298. 1889), wegen ihrer Anknüpfung an die Bewegung eines materiellen Punktes auf gegebener Oberfläche aber in die Dynamik einzustellen sind.

Auch der vorliegende Aufsatz enthält in den beiden ersten Paragraphen zum Zwecke der Anwendungen die Hauptsätze des Verfassers über eine Gattung bedingt periodischer Functionen und über Grenzfälle, die hierbei auftreten. Danach wird aber das besondere mechanische Problem in Angriff genommen, dessen Lösung der Verfasser sucht. Ist nämlich mit der Auffindung der Jacobi'schen Integralgleichungen für eine gewisse Gruppe von Differentialgleichungen der Bewegung die Integration als solche erledigt, so bleibt das Umkehrproblem der Integrale übrig, d. h. die Darstellung der Variabeln q_1, q_2, bezw. gegebener Functionen derselben, durch die Zeit t. Diese Aufgabe ist selbst für die einfachen Fälle noch nicht allgemein behandelt, wo die Integralgleichungen die Variabeln q_1 und q_2 separirt enthalten. Auf Integralgleichungen, bei denen eine solche Verein-

fachung eintritt, führt die Bewegung eines schweren Pu
auf einer Rotationsfläche mit verticaler Symmetrieaxe. N
dem die hierher gehörigen Arbeiten über Bewegungen auf
sonderen Flächen, bei denen das Umkehrproblem auf ellipti
und hyperelliptische Functionen geführt hat, zusammenge
sind, wirft der Verfasser die Frage auf nach der allgeme
Lösung des Umkehrproblems für alle Rotationsflächen und g
die Ergebnisse seiner Arbeit in folgender Weise an.

Die Untersuchung umfasst alle Rotationsflächen, die
einer Horizontalebene in nicht mehr als zwei Parallelkreisen
schnitten werden, unter näher angegebenen Voraussetzun
(§§ 3 u. 8) und führt zu zwei Hauptresultaten. Das erste
selben besteht in dem Nachweis einer von der gegebenen R
tionsfläche unabhängigen Rotationsfläche dritter Ordnung (§
welche in der Verteilung ihrer Schnittcurven mit der gegeben
Rotationsfläche den Charakter der Bewegung eines schwe
Punktes auf dieser bestimmt und im besonderen die Stabili
oder Instabilität der Bewegung entscheidet. Dem anderen Hau
resultate zufolge sind für die beiden Normalformen (§§ 4 u.
jeder stabilen Bewegung eines schweren Punktes auf einer R
tationsfläche die Coordinaten des Punktes bedingt periodisch
Functionen der Zeit, welche durch zweifach unendliche trigono
metrische Reihen darstellbar sind. Hierbei ist noch hervorzuheben
dass eine durch ihre Differentialgleichungen erster Ordnung de
finirte Bewegung der betrachteten Art, ähnlich wie eine algebrai
sche Curve, aus mehreren Zweigen bestehen kann, von denen
zwei benachbarte unter Vermittlung von singulären Bewegungs-
formen (§ 6), etwa einer Curve mit Doppelpunkt oder isolirten
Punkt entsprechend, auch in einen einzigen Zweig verschmelzen
können. Auf specielle Beispiele zur Erläuterung dieser allge-
meinen Resultate ist nur in Kürze (§§ 7 u. 10) eingegangen
worden. Lp.

O. Staude. Das System der Wendeflächen bei gewissen Bewegungen eines Punktes in einer Ebene oder auf einer Rotationsfläche. Dorpat. Naturf.-Ges. Ber. 399-405.

Ist $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $U(r,z)$ die Kräftefunction für den Massenpunkt m, sind ferner h und k Integrationsconstanten, so beweist der Verfasser den Satz: Gilt für die Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene oder auf einer Rotationsfläche das Integral der lebendigen Kraft und das Integral der Flächen, so zerlegt die Ungleichung $2\{U(r,z)+h\}\{x^2+y^2\}-k^2 \gtrless 0$ die Fläche in ein erreichbares und ein unerreichbares Gebiet. Die Grenzen beider Gebiete bestimmt die gleich Null gesetzte linke Seite jener Ungleichung. Die Schnittcurven der hierdurch definirten Fläche mit der ebenen oder Rotations-Fläche, auf der die Bewegung stattfindet, sind die Enveloppen oder Wendecurven des betrachteten Systems von Bahncurven; deshalb wird die somit eingeführte Fläche als „Wendefläche" bezeichnet. Bei unbestimmten Werten von h und k stellt die Gleichung ein zweifach unendliches System von Wendeflächen dar; es umfasst für $k = 0$ das der Niveauflächen. Lp.

E. Oekinghaus. Die elliptischen Integrale der Bewegung eines schweren Punktes in der verticalen Parabel. Hoppe Arch. (2) VII. 34-53.

Bekanntlich führt die Aufgabe der Bewegung eines Massenpunktes auf einer Parabel mit verticaler Axe unter der Einwirkung der Schwere zu elliptischen Integralen zweiter Gattung für die Zeit. (Vergl. u. a. Glaisher, „Note on the time of descent down the arc of a vertical parabola". Quart. J. XIX. F. d. M. XV. 1883. 813). Indem der Verfasser eine passende Ellipse bestimmt, deren Bogen durch dasselbe Integral ausgedrückt wird, kann er die Zeit jenes Falls auf der Parabel durch die Länge des Ellipsenbogens messen. „Mit der Bewegung eines Punktes in der Parabel, deren Axe vertical nach oben gerichtet ist, steht demnach eine entsprechende gleichförmige Bewegung eines anderen Punktes in einer Ellipse derart in Wechselbeziehung, dass der Polarwinkel der Parabel zu jeder Zeit dem Focalwinkel des bezüglichen in der Ellipse gleich ist."

Für die Parabel mit vertical abwärts gerichteter Axe wird

eine gleiche Beziehung zu einer gewissen Hyperbel aufge
In diesem Fall müssen einige Grenzfälle genauer unters
werden.

In einem Anhange wird die Aufgabe ausgedehnt auf
Bewegung eines schweren Punktes auf einer Trochoide (
längerten oder verkürzten Cykloide), verglichen mit der Bo
länge der Fusspunktencurve eines Kegelschnitts (bezw. Hype
und Ellipse). Endlich wird das elliptische Integral erster (
tung mit Hülfe der Polargleichung einer solchen Fusspunk
curve ($r^2 = a^2\{1-k^2\sin^2\varphi\}$) optisch gedeutet, wonach z. B.
Beleuchtung der Curven vom Mittelpunkte aus dem Polarwin
proportional ist. (Eine schon öfter behandelte Frage.)

Lp.

E. Lampe. Ueber die Anwendung einer von Ga
gegebenen Reihenentwickelung bei der elementar
Behandlung von mechanischen Aufgaben. Berl. ph
Ges. Verh. VII. 47-52.

Die Entwickelung von $(1-\sin^2\alpha\sin^2x)^n$ nach den Cosin
der Vielfachen von x:

$$(1-\sin^2\alpha\sin^2x)^n = \cos^{4n}\frac{\alpha}{2}(A_0+2\Sigma A_k\cos 2kx),$$

$$A_k = \operatorname{tang}^{2k}\frac{\alpha}{2}\Sigma\binom{n}{i}\binom{n}{k+i}\operatorname{tang}^{4i}\frac{\alpha}{2} \quad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

wird für solche mechanischen Probleme empfohlen, die auf elli
tische Integrale erster oder zweiter Gattung führen, weil die
Entwickelung rasch convergirt. Als derartige Aufgaben werde
ausser dem Kreispendel angeführt und kurz behandelt die re
bungslose Bewegung eines schweren Massenpunktes auf eine
Parabel mit verticaler Axe, auf der Kardioide, der zweispitzige
Epicykloide, der Astroide. Lp.

Ph. Gilbert. Sur les différentes manières de traite
un problème de mécanique. Brux. S. sc. XII, A. 65-71.

„Zwei Massenpunkte, die auf zwei concentrischen Kreisen

ohne Reibung sich bewegen, unterliegen ihrer gegenseitigen Einwirkung, einer Function ihres Abstandes. Ihre Bewegung und den von ihnen ausgeübten Druck zu bestimmen." Der Verfasser behandelt diese Aufgabe durch die Betrachtung der tangentialen und der normalen Kraftcomponente, durch die Principe der lebendigen Kraft und der Flächen, endlich durch die Lagrange'schen Gleichungen. Die verschiedenen Methoden ergänzen sich gegenseitig. Mn. (Lp.)

W. Timpe. Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer schiefen Ebene mit Berücksichtigung der Drehung der Erde. Diss. Halle. 53 S. 8°.

W. Hoffmann. Ueber eine Bewegung eines materiellen Punktes auf einem Ringe, dessen Querschnitt ein Kegelschnitt ist. Diss. Halle. 25 S. 4°. (1887).

F. Roth. Ueber die Bahn eines freien Teilchens auf einer sich gleichmässig drehenden Scheibe. (Schluss.) Exner Rep. XXIV. 65-78.

F. Roth. Die Trägheitscurve auf wagerechter Ebene bei dem Vorhandensein eines Reibungswiderstandes, der von der zweiten Potenz der Geschwindigkeit abhängt. Exner Rep. XXIV. 648-659.

Im Jahrbuch sind seit dem Jahre 1883 (Bd. XV) die Arbeiten des Verfassers erwähnt worden. In rein mathematischer Hinsicht bestehen die Leistungen in der Integration linearer Differentialgleichungen für solche Fälle, in denen die Resultate allbekannt sind. Bezüglich der zu machenden Anwendungen auf die relative Bewegung eines Teilchens an der Erdoberfläche vermisst der Referent die Berücksichtigung der einschlägigen Literatur und kann nicht überall den Aussprüchen und Schlussfolgerungen des Verfassers beipflichten. Lp.

K. Weihrauch. Die elementaren Ableitungen des Satzes von der „ablenkenden Kraft der Erdrotation“. Met. Zeitschr. (2) V. 81-82.

Der Ausdruck für die ablenkende Kraft:

$$K = 2v\omega \sin\varphi$$

(v Horizontalgeschwindigkeit, ω Winkelgeschwindigkeit der Erde, φ geographische Breite) wird durch ein Verfahren erhalten, das demjenigen für das Foucault'sche Pendel nachgebildet ist. (Exner Rep. XXII. 480, F. d. M. XVIII. 1886. 865.)

Lp.

E. Cesaro. Formole relative al moto d'un punto. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 18-19.

Ausdehnung zweier von Herrn Siacci herrührenden Formeln (Torino Atti XIV. 946-952, F. d. M. XI. 1879. 654) für ebene und räumliche Curven auf $(n-1)$-fach gekrümmte Linien im Raume von n Dimensionen. Lp.

G. Dillner. Om Integration af differential-eqvationerna i N-kroppars problemet. Stockh. Öfv. 367-378.

Fortsetzung der Arbeiten des Verfassers über das N-Körper-Problem, die schon früher hier besprochen sind. K.

D. Bobylew. Eine Aufgabe der Dynamik eines Systems materieller Punkte. Chark. Ges. (2) I. 129-138.

n materielle Punkte sind gezwungen, auf einer in der xy-Ebene befindlichen Geraden zu bleiben. Alle Punkte werden nach dem Coordinatenanfang hin von Kräften angezogen, die den Massen und den Abständen vom Ursprung proportional sind; ausserdem finden zwischen je zwei Punkten gegenseitige Anziehungen statt, proportional dem Producte der Massen und den Entfernungen von einander. Die Lösung der Aufgabe über die Bewegung des Systems wird vollständig durchgeführt. (S. F. d. M. XIX. 1887. 941. Pfaff.) Bb.

H. AM ENDE. Ueber die Bewegung zweier materiellen Punkte, welche durch eine gewichtslose starre Gerade mit einander verbunden sind. Pr. Realgymn. Sprottau. (No. 208). 27 S. 4°.

Die Aufgabe wird für den Raum behandelt. Im ersten Teile wird von äusseren Kräften (mit Ausnahme der zu Anfang wirkenden Momentenkräfte) abgesehen. Im zweiten Teile nimmt der Verfasser die Schwerkraft als einzige continuirliche Kraft hinzu. Neue Ergebnisse sind nicht hervorzuheben. Lp.

A. HANDL. Das Mitnehmen durch Reibung. Poske Z. I. 107-110.

Der Verfasser will die ungenaue Erklärung vieler dahin gehörigen Versuche in den Lehrbüchern der Physik beseitigt haben (z. B. Kartenblatt mit Münze auf einer Fläche; das Kartenblatt wird weggeschnellt, die Münze fällt hinein). Zu diesem Zweck berechnet er den Weg, welchen der scheinbar ruhen gebliebene Körper in Folge der Reibung als bewegender Kraft in der Versuchsdauer t zurücklegen muss. Lp.

B. PALADINI. Sul moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un punto fisso. Pisa Ann. V. 167-226.

Der erste Teil der Abhandlung beschäftigt sich mit der vollständigen Durchführung der Integrationen, welche bei dem Probleme der Rotation eines starren symmetrischen Körpers um einen Punkt seiner Symmetrieaxe l vorkommen, wenn das Potential der auf denselben einwirkenden Kräfte die Form:

$$(a) \qquad H_1 \cos^2\theta + H_2 \cos\theta$$

hat. Hier bedeutet θ den Winkel von l mit einer festen Richtung λ; H_1 und H_2 sind constante Grössen. Es ergiebt sich, dass die Rotation als aus drei periodischen Bewegungen zusammengesetzt angesehen werden darf, nämlich: aus zwei gleichförmigen fortschreitenden Rotationen um l bezw. λ und aus einer Schwingungsbewegung der Hauptaxen des Körpers um die festen

Coordinatenaxen (von denen die z-Axe mit λ zusammenf

Was die kinematische Seite des Problemes betrifft, so red sich die betrachtete Bewegung auf das Rollen eines Ke dessen Axe l ist, auf einer Umdrehungsfläche der zweiten Ordn um λ, welche ein Ellipsoid, ein Paraboloid oder ein einschal Hyperboloid sein kann.

Der zweite Teil ist der Bewegung eines starren sym trischen Körpers in einer Flüssigkeit gewidmet, vorausges dass das Potential der einwirkenden Kräfte wie vorher Form (a) hat. Vi.

W. Hess. Ueber das Jacobi'sche Theorem von der setzbarkeit einer Lagrange'schen Rotation durch z Poinsot'sche Rotationen. Schlömilch Z. XXXIII. 292-305.

Die vorliegende Bearbeitung des Jacobi'schen Theor knüpft an die Halphen'sche Fassung desselben und an die Herrn Darboux gelieferte Behandlung an (Journ. de Math I. 403-430, F. d. M. XVII. 1885. 890). Während die Darbo sche Beweismethode sich zwar auf die Differentialgleichun der Bewegung und ihre ersten Integrale stützt, aber einfac synthetischer Natur ist, indem sie unter anderem die Eig schaften des Centralellipsoids benutzt, macht der Verfasser d Versuch einer rein analytischen elementaren Herleitung. Se Methode führt durch Einführung einer geringeren Anzahl v Bestimmungsgrössen und durch die Verwendung von Det minanten zu rascher Aufstellung derjenigen Elemente, welc die zwei Bewegungen um den Schwerpunkt aus der Bewegu des schweren Umdrehungskörpers entstehen zu lassen geeig sind. Die wirklich durchgeführte geschickte Bestimmung der Elemente der zwei Poinsot'schen Rotationen dient also dem Ve fasser zur Herleitung des Jacobi'schen Theorems. Lp.

E. J. Routh. On a theorem of Jacobi in dynamic Quart. J. XXIII. 34-45.

Auch diese Abhandlung geht auf das Halphen'sche Theore

und die Darboux'sche Beweisführung zurück, erwähnt jene Arbeiten aber nur, um dann einen eigenen Gang zu nehmen. Es sei

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K$$

die Gleichung des Trägheitsellipsoids für den festen Punkt des Körpers. Bedeutet T die lebendige Kraft, G das resultirende Moment, so hat man bekanntlich

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T,$$
$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G.$$

Der Verfasser construirt nun ein neues Ellipsoid

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = K',$$

wo gesetzt ist

$$A' = (\lambda A - A^2)i, \quad B' = (\lambda B - B^2)i, \quad C' = (\lambda C - C^2)i,$$

während gleichzeitig

$$A'^2 = (\mu A - A^2)j, \quad B'^2 = (\mu B - B^2)j, \quad C'^2 = (\mu C - C^2)j$$

ist. Dieses zweite Ellipsoid besitzt folgende Eigenschaften: 1) Die Winkelgeschwindigkeit um den Radiusvector, um den der Körper sich dreht, ist diesem Radiusvector proportional. 2) Die Länge des Lotes zur Tangentialebene im Endpunkte der augenblicklichen Axe ist constant. 3) Die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um dieses Lot zur Tangentialebene ist constant. Der Verfasser nennt dieses Ellipsoid das „conjugirte" (zum Trägheitsellipsoid). Zur invariabeln Linie wird die „conjugirte Linie" bestimmt und ihre Bewegung im Raume untersucht. Wir können dem Verfasser nicht in alle Einzelheiten seiner Untersuchung folgen, durch welche auch die Kreiselbewegung eine neue Beleuchtung erfährt, und deren Hauptinteresse in der Bestimmung der Bewegung jener „conjugirten Linie" liegt.

Lp.

G. Grofe. Ueber die Pendelbewegung an der Erdoberfläche. Diss. Dorpat. 39 S. 4°.

Der Dorpater Geograph und Meteorologe Karl Weihrauch, von dessen frühzeitigem Tode die betrübende Kunde beim Abfassen dieses Berichtes gerade eintrifft, hat sich mit der Aufgabe

der relativen Bewegung eines Körpers an der Erdoberfläche und besonders auch mit der Aufgabe der Theorie des Foucault'schen Pendels in jüngster Zeit wiederholt beschäftigt (vergl. F. d. M. XVII. 1885. 880, XVIII. 1886. 865). Auf seine Anregung ist daher auch wohl die Entstehung der vorliegenden Dissertation zurückzuführen, die bezeichnet ist als: „Eine zur Erlangung des Grades eines Magisters der angewandten Mathematik der physiko-mathematischen Facultät der Kaiserlichen Universität Dorpat vorgelegte Abhandlung", und die auf der Rückseite des Titels die vom Decan Weihrauch bescheinigte Druckgenehmigung trägt.

Der Verfasser fasst selbst in der Einleitung den Inhalt seiner viele Rechnungen umfassenden Arbeit, wie folgt, zusammen.

In der vorliegenden Arbeit ist die Bewegung eines physikalischen Pendels mit Berücksichtigung der Erdrotation innerhalb gewisser einschränkenden Bedingungen untersucht worden. Um den Einfluss der Erdrotation auf die Bewegung des Pendels berücksichtigen zu können, mussten zuerst die Gleichungen der relativen Bewegung eines festen Körpers, welcher einen fest mit der Erde verbundenen Punkt hat, aufgestellt werden. Als Form der Bewegungsgleichungen ist die kanonische oder die Hamilton'sche gewählt worden, welche zuerst von Bour (Journ. de Math. (2) VIII) aufgestellt worden ist. Die kanonische Form der Bewegungsgleichungen ermöglicht, die Integration derselben abhängig zu machen von dem vollständigen Integral einer partiellen Differentialgleichung, woraus durch Differentiation nach dazu geeigneten Constanten die Integrale der Bewegungsgleichungen erhalten werden.

Im vorliegenden Problem lässt sich die Integration der partiellen Differentialgleichung nur auf dem Wege der successiven Approximation bewerkstelligen. Die gebrauchte Approximationsmethode ist ihrerseits an die relative Kleinheit der Winkelgeschwindigkeit der Erde gebunden. Die Anwendung dieser Approximationsmethode ermöglichte, die weitläufigen Entwickelungen, welche mit der Variation der willkürlichen Constanten verbunden sind, zu umgehen.

Der Einfluss des Luftwiderstandes und der Elasticität des

Fadens auf die Pendelbewegung kann mit Hülfe der erwähnten Methode nicht berücksichtigt werden. Derselbe kann kaum in anderer Weise als mit Hülfe der Methode der Variation der Constanten ermittelt werden und ist von Hansen in der Abhandlung: „Pendelbewegung“ u. s. w. entwickelt worden (Neueste Schriften der Naturforscher-Gesellschaft in Danzig. 1853. Bd. V.)

Die Methode der Variation der Constanten in der Anwendung auf das Problem der Bewegung eines physikalischen Pendels auf der rotirenden Erde fand hier jedoch Berücksichtigung, soweit dieselbe sich auf eine wichtige Bemerkung von Serret bezieht. (C. R. LXXIV. 275.)

Von den besonderen Ergebnissen sei nur das folgende hervorgehoben. Sind ε_1 und ε_2 die Sinus der halben Winkel in der kleinsten und grössten Elongation des Pendels, und hat das Pendel zu Anfang der Bewegung gar keine Geschwindigkeit, so dass $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ (gleich der anfänglichen Entfernung aus der Gleichgewichtslage), so ist

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{\mu'}(1-\varepsilon_0^2)\omega \sin\lambda + \frac{n'\varepsilon_0}{2\mu'},$$

woraus zu ersehen ist, dass die kleinste Elongation ε_1 eine Grösse von der Ordnung ω ist, und zwar sowohl am Aequator als auch am Pol. [Es bedeutet λ die geographische Breite, n' den Wert

$$-\frac{C}{A}\omega\{\sin\vartheta_0 \cos\alpha_0 \cos\lambda + \cos\vartheta_0 \sin\lambda\},$$

C, A, μ', ϑ_0, α_0 Constanten.] Für den speciellen Foucault'schen Versuch, der im letzten Paragraphen nach der vorangehenden allgemeinen Theorie behandelt ist, wird die Uebereinstimmung der Resultate mit denen in der oben erwähnten Hansen'schen Abhandlung am Schlusse nachgewiesen. Endlich finde auch noch die zweite These hier Platz: „Das Princip der Erhaltung der Schwingungsebene kann nicht zur Erklärung des Foucault'schen Versuchs angewandt werden, wie es vielfach geschieht.“

Lp.

G. Egidi. Applicazione delle aste vibranti od oscillanti alle osservazioni dei moti sismici. Rom. Acc. Pont. d. N. L. Mem. III. 173-198.

Eine für praktische Zwecke geschriebene Abhandlung, in welcher nur wenige theoretische Erörterungen vorkommen; übrigens eine Fortsetzung der im II. Bande derselben Memorie veröffentlichten Abhandlung desselben Verfassers: Considerazioni ed esperienze sugli istrumenti ad aste vibranti ed oscillanti.

Lp.

H. Resal. Mouvement dans un milieu, dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse, d'un point matériel attiré par un centre fixe en raison de la vitesse. C. R. CVI. 1329-1336.

Wenn man einem Pendel von geringem Ausschlage, beispielsweise unter 15°, eine horizontale Geschwindigkeit von gleicher Grössenordnung mitteilt, so ist die Horizontalprojection eines Punktes des Pendels eine Ellipse mit der Projection des Aufhängepunktes als Mittelpunkt, deren grosse Axe in der Richtung der Bewegung mit einer verhältnismässig kleinen, dem Producte der Ellipsenaxen proportionalen Geschwindigkeit fortrückt. Bei der Ausführung des Versuches beobachtet man ausserdem, dass in Folge des Luftwiderstandes die grosse Axe allmählich abnimmt. Man kann sich daher die Frage vorlegen, ob dieser Widerstand keinen merkbaren Einfluss auf die Drehbewegung der Ellipse hat. Der Verfasser behandelt diese Aufgabe nach der Methode der Variation der willkürlichen Constanten, indem er von den bekannten Formeln für die Bewegung eines Punktes unter der Einwirkung einer der Entfernung proportionalen Kraft $k^2 r$ ausgeht und Entwickelungen in trigonometrische Reihen anwendet. Aus seinen Rechnungen folgt, dass bei der Bewegung eines nur wenig aus der Verticale abgelenkten Pendels der Luftwiderstand nur die Axen der Ellipse verkleinert und die Abplattung vergrössert, dagegen das Fortrücken des Scheitels nicht beeinflusst. Lp.

W. Massny. Ueber die Bestimmung der Fallbeschleunigung. Pr. Gymn. Gross-Strehlitz. 9 S. 4°.

Darstellung der bekannten Pendelmethoden. R. M.

P. Bräuer. Ueber die Bewegung des Pendels mit Cardanischer Aufhängung. Diss. Erlangen. 27 S. 8°.

A. Hossfeld. Das Fadenpendel, eine erweiterte Darstellung der Pendelbewegung. Diss. Marburg. 35 S. 4°.

E. Guyou. Sur une solution élémentaire du problème du gyroscope de Foucault. C. R. CVI. 1143-1146.

Unter vielfacher Beziehung auf die Arbeit des Herrn Gilbert: „Étude historique et critique du problème de la rotation d'un corps solide" (cf. F. d. M. X. 1878. 29) giebt der Verfasser einfache Ueberlegungen an, durch welche man ohne irgend welche Rechnungen die Haupterscheinungen des Gyroskops erläutern kann. Hierbei wird zuerst die Masse der Ringe vernachlässigt; dann wird der Einfluss derselben in Betracht gezogen. Der Verfasser findet die so abgeleiteten Ergebnisse in Uebereinstimmung mit den Rechnungsresultaten von Bour und Quet. Lp.

A. Baule. Note sur le gyroscope collimateur de M. le capitaine de vaisseau Fleuriais. Brux. S. sc. XII, B. 121-176; Addition. 177-184.

Beschreibung und Theorie dieses Instrumentes. In dem Nachtrage beweist der Verfasser das Vorhandensein eines merklichen Einflusses der Erdumdrehung auf das Instrument und giebt an, wie man ihn in der Praxis berücksichtigen kann.

Mn. (Lp.)

M. Koppe. Aufgaben über Trägheitsmomente. Poske Z. I. 161-163.

E. Lampe. Aufgaben über Trägheitsmomente. Poske Z. I. 163-164.

Aufgaben für Schüler, von denen die ersten zur Bildung des Begriffs hinleiten, während die zweiten die Bekanntschaft mit den Trägheitsmomenten von Kugel und Cylinder voraussetzen und mittels des Satzes von der Erhaltung der Energie die rollende Bewegung dieser Körper auf der schiefen Ebene zur Untersuchung bringen. Lp.

E. Lampe. Physikalische Aufgaben. Poske Z. II. 74-76.

Aufgaben, welche die Einübung des Trägheitsmomentes zum Ziel haben und die Berechnung der reducirten Pendellänge eines physikalischen Pendels von verschiedener Form und bei geänderter Lage der Aufhängeaxe verlangen, wenn die Schwingungsdauer constant bleiben soll. Lp.

G. B. Favero. Intorno ad un recente studio sulla gravità. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 310-313.

Der Verfasser wendet sich gegen die Arbeiten des Herrn Häussler über die Erklärung der Schwere, insbesondere gegen den Zahlenwert, den dieser für die Verminderung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde bei Erhebung eines Kilogramms um ein Meter ausgerechnet hatte. (Vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 930, XIX. 1887. 1043, 1044). Ohne auf das Wesen der Irrtümer des Herrn Häussler einzugehen, berechnet Herr Favero diese Verminderung und findet

$$\frac{T_1-T_0}{T_0}=\frac{5ph}{PR}\cos^2\lambda,$$

(λ geographische Breite, p das erhobene Gewicht, h die Hubhöhe in Metern, P das Gewicht und R der Radius der Erde). Dieser Wert stimmt, abgesehen von der Form, mit demjenigen überein, den der Referent in seiner Erwiderung gegen Herrn

Häussler angegeben hat (Exner Rep. XXII. 574). Herr F. scheint diese Entgegnung nicht bemerkt zu haben. Lp.

G. Schouten. No. 3 der prijsvragen van het jaar 1887 beantwoord. Nieuw Arch. XV. 188-232.

Die Aufgabe, welche hier behandelt wird, lautet: Ein gewöhnlicher Kreisring wird über eine horizontale Ebene fortgerollt. Es soll der Weg, welchen der Mittelpunkt des Ringes durchläuft, bestimmt und die Lage der Ringebene nach einiger Zeit gefunden werden, wenn dieselbe nicht horizontal ist. Dabei wird angenommen, dass weder rollende Reibung noch Luftwiderstand die Bewegung hindert, dass jedoch die gleitende Reibung gerade im Stande ist, die Verschiebung des Berührungspunktes zu verhindern.

Im ersten Teil der Abhandlung werden die allgemeinen Integralgleichungen bestimmt, im zweiten aus ihnen die Eigenschaften der rollenden Bewegung eines Umdrehungskörpers abgeleitet, im dritten die allgemeine Theorie angewandt auf die Bewegung eines linsenförmigen Körpers, wobei die Integrale auf elliptische oder hyperelliptische Functionen zurückgeführt und daraus die besonderen Eigenschaften dieser Bewegung abgeleitet werden. G.

K. Fuchs. Ueber die Rückwirkung der Flutbewegung auf den Mond. Exner Rep. XXIV. 328-329.

„Es besteht zwischen Flächengeschwindigkeit F und progressiver Geschwindigkeit v, im Falle kreisförmiger Bewegung und Geltung des Newton'schen Gesetzes, der Zusammenhang $\frac{1}{2}aM : v = F$. Wenn man unser Theorem acceptirt, dann kann man annehmen, dass Erde und Mond ursprünglich sehr nahe zu einander gelegen sind, dass aber die Flutbewegung sie so weit auseinander geschraubt hat, wie sie heute sich befinden.“

Lp.

K. Fuchs. Ueber den Einfluss der Flut auf die Bewegungen des Flutträgers und Fluterzeugers. Exner Rep. XXIV. 348-356.

Weitere Durchführung der im vorangehenden Berichte erwähnten Gedanken und Anwendung derselben auf das Sonnensystem. Lp.

F. August. Ueber die Bewegung von Ketten in Curven. Schlömilch Z. XXXIII. 321-336.

Herr A. fasst die allgemeinen Resultate seiner Untersuchung selber, wie folgt, zusammen: Wenn auf eine homogene Kette, welche entweder α) frei im Raume, oder β) ohne Reibung auf einer festen Fläche, oder γ) ebenso in einer festen Curve beweglich ist, gegebene äussere Kräfte wirken, welche nur von der Lage abhängen, und wenn die nötige Spannung in den Endpunkten durch geeignete Vorrichtungen hervorgebracht wird, so kann eine Bewegung derselben in einer Bahn, d. h. so, dass successive jedes folgende Element in die Stelle des vorhergehenden rückt, nur in einer der folgenden Weisen vor sich gehen:

A. In jeder mit der Beweglichkeit verträglichen Kürzesten, also α) im Raume in einer Geraden, und zwar wenn die Angriffslinie der Kraft in diese Gerade fällt, β) auf einer Fläche in jeder geodätischen Linie, und zwar wenn die Angriffslinie der Kraft in die Schmiegungsebene fällt, γ) auf der festen Curve bei beliebig gegebenen Kräften. Die Endspannungen können hierbei noch als beliebige Functionen der Zeit gegeben sein und die tangentiale Beschleunigung kann sich hierbei nach den verschiedensten Gesetzen ändern.

B. In den Fällen α) und β) ausserdem in gewissen anderen, nicht kürzesten Linien, aber immer nur mit constanter tangentialer Beschleunigung b. Gestalt und Lage dieser Bahnen ist bei gegebenen äusseren Kräften von der Grösse der tangentialen Beschleunigung b abhängig, aber unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit. Die Spannung ist bei jeder Lage und Geschwindigkeit für jeden Punkt der Kette bestimmt. — In den

Bahnen, für welche $b = 0$ ist, kann die Kette sich gleichförmig bewegen oder ruhen. (Gleichgewichtslagen.)

C. Wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind, kann die Kette jede mit ihrer Bewegungsfreiheit verträgliche Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit c und constanter Spannung c' beschreiben.

Wird in den Fällen β) und γ) auch noch Reibung vorausgesetzt, so modificiren sich diese Gesetze. Im Falle γ) ist der Einfluss der Reibung leicht zu berücksichtigen; im Falle β) bedürfte es noch einer grundlegenden Feststellung über den Einfluss der Reibung bei krummliniger Bewegung auf Flächen.

Lp.

P. Appell. Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe. Acta Math. XII. 1-50.

Ueber die Behandlung der Bewegungsgleichungen für einen biegsamen und unausdehnbaren Faden, welcher unter dem Einfluss äusserer Kräfte sich in einer Ebene bewegt, ist bereits in den C. R. CIII. 991-993 ein Bericht des Verfassers erschienen. Es ist deshalb in diesem Jahrbuche XVIII. 1886. 891 die Methode der Behandlung kurz gekennzeichnet worden, und es darf in dieser Beziehung auf jenes Resultat verwiesen werden.

Eine Anwendung, welche der Verfasser in vorliegender Schrift von jener Behandlung der Bewegungsgleichungen macht, bezieht sich auf die Frage, ob unter der Voraussetzung, dass die auf ein Element des Fadens wirkende äussere Kraft allein von der Lage dieses Elementes abhängig ist, die Bewegung des Fadens in einem Gleiten längs einer festen geometrischen Curve bestehen kann, oder mit anderen Worten, ob der Faden eine Gestalt scheinbarer Ruhe in der Ebene bilden kann. Diese Frage wird untersucht einmal unter der Voraussetzung, dass der Faden homogen, dann unter der Annahme, dass derselbe heterogen ist. An diese Untersuchung knüpft der Verfasser die Behandlung einer Aufgabe allgemeinerer Natur. Er verfolgt nämlich die Frage, ob eine Bewegung des Fadens existirt, welche sich in einem Gleiten längs einer unveränderlichen Curve darstellt,

während diese Curve ihrerseits einer Translationsbewegung unterworfen ist, und sucht unter solcher Voraussetzung die Bewegung des Fadens zu bestimmen.

Endlich wird angenommen, dass der Faden in einer Lage in stabilem Gleichgewicht sich befinde, und dass er aus dieser Lage dadurch entfernt werde, dass seinen Punkten sehr kleine Geschwindigkeiten erteilt werden. Unter solcher Voraussetzung macht der Faden kleine Oscillationen um seine Gleichgewichtslage. Die Untersuchung ihrer Natur bildet den Gegenstand des letzten Capitels der vorliegenden Arbeit. Schn.

E. Vallier. Note sur la détermination de l'angle de plus grande portée. Rev. d'Art. XXXI. 362-367.

Im Hinblick auf die jüngst wieder aufgeworfene Frage (vgl. Siacci, F. d. M. XIX. 1887. 954), ob unter gewissen Umständen der zum Maximum der Schussweite gehörige Abgangswinkel grösser als $\frac{1}{4}\pi$ sein könne, unternimmt Herr Vallier die Untersuchung des Gegenstandes mit Benutzung seiner früheren Forschungen im Gebiete der Ballistik (vgl. F. d. M. XV. 1883. 829, XVII. 1885. 900, XIX. 1887. 953). Er gelangt zu folgenden Ergebnissen, die von denen des Herrn Siacci abweichen:

Ein Geschoss mit schwachem ballistischen Coefficienten, d. h. von starkem Kaliber, von länglich-ogivaler Gestalt und beträchtlichem Gewicht dürfte vielleicht einen Winkel grösster Schussweite haben, der $\frac{1}{4}\pi$ übertrifft. Aber jedes Geschoss schwachen Kalibers (d. h. unterhalb 24 cm, wie aus den Versuchen hervorgeht) hat seine grösste Tragweite unterhalb 45°, und dieser Winkel grösster Tragweite fällt um so geringer aus, je stärker der ballistische Coefficient ist, d. h. je leichter das Geschoss ist.

Diese Folgerungen sind unabhängig von der analytischen Form des Luftwiderstandsgesetzes; sie setzen nur voraus, dass die ballistischen Formeln anwendbar sind, d. h. dass der Widerstand tangential wirke, und dass das Geschoss frei von unregelmässigen Bewegungen ist. Lp.

M. Křiwanek. Ueber die Winkel der grössten Schussweite und andere Fragen. Mitt. üb. Art. u. Genie. XIX. 49-60.

Wiedergabe der Abhandlung des Herrn Siacci aus der Rivista d'artiglieria e genio von 1887: „Sugli angoli di gittata massima ed altre questioni". Den Auszug aus dieser Abhandlung, der in Rom. Acc. L. Rend. (4) III, (1887) veröffentlicht wurde, haben wir F. d. M. XIX. 1887. 954 besprochen; das dort gegebene Referat reicht aus. Lp.

N. Sabudski. Ueber die Lösung der Probleme des indirecten Schiessens und über den Winkel für die grösseste Schussweite. St. Petersburg. IV u. 143 S. (Russisch.)

Das Werk besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil (S. 1-82) behandelt die Lösung der ballistischen Probleme, wenn der Elevationswinkel zwischen 14° und 65° liegt und der Luftwiderstand proportional der vierten Potenz der Geschossgeschwindigkeit ist. Der zweite Teil behandelt die Frage nach dem Abgangswinkel für die grösste Schussweite (S. 83-116).

Für die flachen Flugbahnen, d. h. bei Abgangswinkeln unter 15°, ist die Methode des italienischen Gelehrten Herrn Siacci zur Lösung der ballistischen Probleme geeignet; sie genügt aber nicht für gekrümmtere Flugbahnen.

Für gekrümmte Flugbahnen und für Anfangsgeschwindigkeiten bis etwa 240 $\frac{\text{met.}}{\text{sec.}}$ können die ballistischen Tafeln des Generals Otto dienen, da der Luftwiderstand gegen Langgeschosse bei Geschwindigkeiten unter 240 einfach proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit angenommen werden kann.

Die vom Verfasser aufgestellte Methode soll dazu dienen, die ballistischen Probleme zu lösen und Schusstafeln zu berechnen für Anfangsgeschwindigkeiten über 240m und für Abgangswinkel zwischen 14° und 65°.

Um überhaupt ein Mittel zu haben, die ballistischen Probleme zu lösen, drückt man gewöhnlich den Luftwiderstand durch einen Wert aus, den man proportional irgend einer Potenz der Ge-

schwindigkeit annimmt. Der General Mayewsky (Traité de Balistique, 1872), der den Luftwiderstand durch einen eingliedrigen Ausdruck proportional einer bestimmten Potenz der Geschwindigkeit darstellte, ermittelte als wahrscheinlichste Potenz für Langgeschosse nahezu genau die vierte, wenn er alle Resultate $\left(\text{von kleinen Geschwindigkeiten bis zu } 420 \frac{\text{met.}}{\text{sec.}}\right)$ der Versuche berücksichtigte, die in Russland (1868 und 1869) und in England über den Widerstand der Luft gegen die Bewegung der Langgeschosse angestellt waren. Herr Sabudski hat gefunden, dass die Herleitung des Generals Mayewsky betreffs der wahrscheinlichsten Potenz sich auf die Versuchsresultate stützt, welche in der Krupp'schen Fabrik (1882) über den Luftwiderstand gegen Geschosse von der jetzt gebräuchlichen Form gewonnen sind, und dass bei der Lösung der Probleme des indirecten Schiessens mit Anfangsgeschwindigkeiten von 240 bis 600 m es bequemer sei, eine ganze Potenz und zwar die vierte anzunehmen, aber man muss dann den Coefficienten des Luftwiderstandes verändern. Nach der Methode von Herrn Sabudski ist für jede Aufgabe dieser Coefficient bestimmt als arithmetisches Mittel aus den Coefficienten, die für alle Geschwindigkeiten berechnet sind, von der Anfangsgeschwindigkeit bis zu der geringsten Fluggeschwindigkeit um je $5 \frac{\text{met.}}{\text{sec.}}$ fallend.

Auf Grund des Luftwiderstandsgesetzes:

$$\varrho = A \frac{\Pi}{\Pi_0} \pi R^2 v^4,$$

(wo A einen Zahlencoefficienten, Π die Luftdichtigkeit beim jedesmaligen Schiessversuche, Π_0 die Luftdichtigkeit von 1,206 kg, $2R$ das Kaliber und v die Geschwindigkeit bedeutet) kommt Herr Sabudski zu den Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \frac{dv_1}{dt} = -g \frac{v_1^4}{\chi^4 \cos^3\theta}, \quad v_1 \frac{d\theta}{dt} = -g \cos^2\theta,$$

wo $v_1 = v \cos\theta$, $\theta =$ Tangentenwinkel, $g =$ Erdbeschleunigung, $P =$ Geschossgewicht und

$$\chi^4 = \frac{P}{A\pi R^2} \frac{\Pi_0}{\Pi}.$$

Werden diese Gleichungen integrirt, so erhält man die Formeln für die Coordinaten

$$(2)\quad x = \frac{\chi^2}{g}\int_p^{p_0}\frac{dp}{\sqrt{2\gamma-\xi(p)}},\quad y = \frac{\chi^2}{g}\int_p^{p_0}\frac{pdp}{\sqrt{2\gamma-\xi(p)}}$$

und die Formel für die Flugzeit

$$(3)\quad t = \frac{\chi}{g}\int_p^{p_0}\frac{dp}{(2\gamma-\xi(p))^{\frac{1}{2}}},$$

$$2\gamma = \frac{\chi^4}{(V\cos\theta_0)^4} + \xi(p_0),$$

wo $p = \operatorname{tg}\theta$, $p_0 = \operatorname{tg}\theta_0$, V = Anfangsgeschwindigkeit, θ_0 = Elevationswinkel und

$$\xi(p) = 4\int_0^p (1+p^2)^{\frac{3}{2}}dp = 4p + 2p^3 + \cdots$$

Um die Berechnung dieser Integrale zu erleichtern, hat Herr Sabudski eine Methode eingeführt, welche auf der Anwendung der Legendre'schen Tafeln für die elliptischen Integrale beruht. Wenn der Elevationswinkel bis zu 30° oder 35° steigt, so muss man $\xi(p) = 4p + 2p^3$ annehmen und kann mit genügender Genauigkeit unter Benutzung der Legendre'schen Tafeln die Integrale (2) und (3) berechnen, nämlich (Seite 34-50)

$$x = \frac{\chi^2}{g\sqrt{2L}}[F(\varphi) - F(\varphi_0)],$$

$$y = \frac{\chi^2\sqrt{2L}}{g}[P(\varphi) - P(\varphi_0)],$$

wo

$$\gamma = 2a + a^3,\quad a = \operatorname{tg}\lambda,\quad L = \sqrt{2+3a^2},$$

der Modul

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{a}{L}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\lambda-\theta)}{L\cos\lambda\cos\theta}},\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\lambda-\theta_0)}{L\cos\lambda\cos\theta_0}},$$

$$P(\varphi) = E(\varphi) - \Delta\varphi\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \frac{5-4k^2}{6}F(\varphi),$$

$F(\varphi)$ und $E(\varphi)$ sind nach der Legendre'schen Bezeichnung elliptische Integrale. Weiter:

$$(4) \qquad t = \frac{\chi}{g} \sqrt[4]{2k^2 L} \left\{ \sqrt{2 \operatorname{cotg} \beta} \, [P_1(\nu)]_{\nu}^{\nu_0} + [P(\omega)]_{\omega}^{\omega_0} \right\},$$

wo

$$k \sin \varphi = \sin \beta', \quad k = \sin \beta, \quad \Delta \varphi = \cos \beta',$$

$$\cos \nu = \sqrt{\operatorname{cotg} \beta \operatorname{tg} \beta'}, \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\operatorname{cotg} \beta'},$$

$$P_1(\nu) = \Delta \nu \operatorname{tg} \nu + \tfrac{1}{2} F(\nu) - E(\nu).$$

Wenn der Abgangswinkel 30° oder 35° übersteigt, so hat der Verfasser die Quadratur der Ausdrücke (2) und (3) in zwei oder drei Summen zerlegt und dadurch das Mittel gefunden, jede Quadratur durch die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung auszudrücken. Auf den Seiten 121 bis 136 giebt er das Resultat seiner Berechnungen in ballistischen Tafeln bei Elevationswinkeln zwischen 14° bis 65°.

Die vom Verfasser gegebenen Beispiele zeigen eine fast völlige Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Praxis.

Im zweiten Teile werden die Untersuchungen über die Frage des Winkels für die grösste Schussweite geführt (Seite 83 bis 116). Der französische Artillerie-Oberst Astier hat im Jahre 1877 einen Fall angegeben, in dem man erwarten kann, dass der Winkel der grössten Schussweite 45° übersteigt, den Fall nämlich, wenn der Luftwiderstand proportional v^4 ist und wenn v nicht zu gross ist (Revue d'artillerie, tome IX).

Herr Sabudski giebt (Seite 92-94) den strengen Beweis des Satzes, dass der Winkel für die grösste Schussweite 45° überschreiten muss, wenn der Luftwiderstand durch einen eingliedrigen Ausdruck dargestellt wird, welcher proportional der vierten oder einer höheren Potenz der Geschwindigkeit ist, und wenn das Verhältnis zwischen dem Luftwiderstand und Geschossgewicht klein ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Resultante des Widerstandes mit der Tangente der Flugbahn zusammenfällt. Der Verfasser gründet den Beweis des Satzes auf Integrationen, die er aus den Bewegungsgleichungen der Ge-

schosse unter der Voraussetzung herleitet, dass der Luftwiderstand proportional v^n ist. Bb.

Les canons pneumatiques Zalinski. Rev. d'Art. XXXI. 230-249.

Der Artikel stellt die Resultate zusammen, welche in Amerika mit Kanonen erzielt sind, die mit comprimirter Luft unter einem Drucke bis zu 70 Atmosphären arbeiteten und vorzugsweise zum Schleudern von Sprenggeschossen (mit Dynamit und Schiessbaumwolle) bestimmt sind. Lp.

F. Kötter. Beitrag zur theoretischen Ballistik. Berl. phys. Ges. Verh. VII. 27-32.

Durch die Aufpflanzung des Seitengewehrs (auf der rechten Seite) wird eine Linksabweichung der Geschosse herbeigeführt. P. du Bois-Reymond hat zur Erklärung dieser Erscheinung darauf hingewiesen, dass durch das Bajonett der Schwerpunkt des Gewehrs nach der rechten Seite des Laufes verlegt werde und daher die Pulverkraft eine Drehung des Gewehrs nach links bewirke. Der Verf. berechnet, unter Bezugnahme auf die von ihm in F. d. M. XVII. 1885. 902 angezeigte ungenaue Behandlung der Aufgabe durch Herrn Cranz, die Abweichung ohne eine Voraussetzung über die Entwickelung der Pulverkraft mit Hülfe der allgemeinen Principien der Mechanik, insbesondere des Satzes von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes und des Flächensatzes. Lp.

Meier. Ueber Verlegung des Treffpunktes nach der Höhe. Arch. f. Art. XCV. 289-293.

Herleitung der Formel

$$x = \frac{2a\sin\frac{1}{2}\beta \,.\, \cos(\alpha+\alpha'+\frac{1}{2}\beta)}{\cos\alpha \,.\, \cos\alpha'},$$

in welcher x die Verlegung durch einen Winkel β auf der Entfernung a, α den ursprünglichen Abgangswinkel, α' den Fallwinkel bezeichnen. Lp.

Lardillon. Transformation des tables balistiques de Grävenitz. Rev. d'Art. XXXII. 437-459.

Die hier gegebenen Tafeln sollen zur Ergänzung derjenigen dienen, die von Hrn. Siacci für Abgangswinkel zwischen 30° und 75° aufgestellt sind (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 901). Sie schreiten demgemäss von 1° bis 30° fort und sind nach den 18 typischen Bahncurven aufgestellt, welche v. Grävenitz nach den Anweisungen Euler's für den Fall berechnet hatte, dass der Luftwiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Lp.

S. Studien zur Mechanik des Langgeschoss-Fluges. Arch. f. Art. XCV. 1-74.

Der Verfasser hat die einschlagenden Abhandlungen von Magnus und Kummer gelesen und verfährt bei seinen Ueberlegungen als ein Praktiker, der sich die theoretischen Grundlagen nach seinen Anschauungen zu Nutze macht. Einen tieferen Wert können die „Studien" nicht beanspruchen. Lp.

Daehne. Neue Theorie der Flugbahn von Langgeschossen auf Grund einer neuen Theorie der Drehung der Körper. Berlin. Eisenschmidt. 63 S.

K. B. Bender. Die Bewegungserscheinungen der Langgeschosse und deren Beziehungen zu den Eigenschaften des Feldgeschützes der Zukunft. Darmstadt. A. Bergsträsser 1888. V + 120 S.

Das vorliegende Werkchen beabsichtigt, einen Beitrag zur Lösung der wichtigen Frage nach der geeignetsten Construction der Geschütze zu geben, und stützt sich dabei im wesentlichen auf Folgerungen, die an das Studium der Bewegungserscheinungen der Geschosse geknüpft sind. Es ist selbstverständlich, dass ausser dem eben bezeichneten Gesichtspunkte noch mancherlei

Gründe technischer und praktischer Art in Frage kommen, denen gegenüber ein Mathematiker kaum competent ist. Notgedrungen verzichten wir daher in dieser Besprechung auf eine Wiedergabe der Abschnitte XI-XIII mit den Ueberschriften: „Ein Feldgeschütz auf die Kriegslehre gegründet“. „Ein Feldgeschütz. Technische Grundsätze“. „Einheits-Feldgeschütz der Zukunft“. Wir beschränken uns auf die vorhergehenden Abschnitte, die sich mit der Bewegungslehre des Geschosses befassen und dem Titel der Abhandlung nach ja auch für den Verfasser die wichtigsten zu sein scheinen. Die Abschnitte I-IV geben eine klare Ableitung der Euler'schen Gleichungen für die drehende Bewegung eines starren Körpers, die auch für die Kreise der Nicht-Mathematiker, für welche das Werkchen berechnet ist, bei einigem guten Willen verständlich sein wird. Weniger einverstanden ist Referent mit dem Inhalt des folgenden Abschnittes, der sich mit der Integration der Gleichungen beschäftigt, so schon nicht mit der Trennung und gesonderten Behandlung der Drehung von der fortschreitenden Bewegung. Zunächst wird als eine der im Raum festen Axen die Richtung der Bahntangente genommen, die doch höchstens annäherungsweise als fest angenommen werden kann. Als Axe des Momentes wird die zur Richtung der Bahntangente und der Schwere senkrechte Richtung angesehen; trotzdem wird angenommen, dass die auf die Geschossaxe fallende Componente gleich Null, die Rotationsgeschwindigkeit p um die Geschossaxe also constant ist. Das Moment wird constant gleich M angenommen und, in einer uns nicht recht klar gewordenen Weise, in die beiden Componenten

$$M\cos pt, \qquad M\sin pt$$

für die beiden anderen im Körper festen Axen zerlegt. Die so gewonnenen Gleichungen für die beiden noch fehlenden Componenten der Rotationsgeschwindigkeit p und q lassen sich integriren. Der Verfasser discutirt die Werte von $\sqrt{q^2+r^2}$ und findet, dass dieselben periodisch sind; dasselbe gilt dann natürlich auch von der Neigung der augenblicklichen Drehungsaxe zur Geschossaxe. Die hieraus gezogene Folgerung, dass die Geschossaxe um die Bahntangente einen gemeinen Kreiskegel beschreibt, scheint uns unter

anderem auch auf einer Verwechslung von Bahntangente und augenblicklicher Drehungsaxe zu beruhen.

Abschnitt VI behandelt die Gründe für das Flattern der Geschosse und sucht ihre Wirkungen auch in Rechnung zu ziehen. Im Abschnitt VII wird der Einfluss des Windes auf die Seitenabweichung untersucht und ermittelt, dass sein Einfluss zu bedeutend ist, als dass aus Beobachtungsresultaten die regelmässige Abweichung constatirt werden könnte. Der achte Abschnitt beschäftigt sich mit dem „Unterschied der Anordnung des Dralls für Flachbahnwaffen und für Wurf-Feuer".

Der neunte Abschnitt bestimmt die Flugbahn für Langgeschosse. Zu Grunde gelegt wird die Vorstellung, dass der Luftwiderstand aus zwei Componenten bestehe, von denen eine gegen die Spitze des Geschosses, die andere senkrecht zur Axe gerichtet ist, jede proportional dem Quadrat der betreffenden Componente der fortschreitenden Geschwindigkeit. Indem der Verfasser noch die anziehende Kraft der Erde nach den beiden Componenten zerlegt, erhält er die Gesamtheit der Kraftcomponenten. Ist nun V die Geschwindigkeit, sind δ und ε die Neigungen von Geschossaxe und Bahntangente zum Horizont, so setzt der Verfasser die Beschleunigungen gleich

$$\frac{dV\cos(\delta-\varepsilon)}{dt} \text{ und } \frac{dV\sin(\delta-\varepsilon)}{dt},$$

was nur bei der thatsächlich nicht vorhandenen Constanz von δ richtig wäre. Aus diesem Grunde könnten wir den letzten Entwickelungen auch dann nicht zustimmen, wenn wir die Vorstellungen über die Wirkungsweise des Luftwiderstandes als richtig zugeben wollten. F. K.

F. Bashforth. Calculation of ranges, etc., of elongated projectiles. Nature XXXVIII. 468.

Unter Benutzung seiner alten Constanten, deren Abänderung abgelehnt wird, berechnet der Verfasser eine Schusstafel für ein bestimmtes Geschütz. Lp.

H. Putz. Mémoire sur les principes fondamentaux de l'application du calcul des probabilités aux questions d'artillerie. Rev. d'Art. XXXII. 213-240, 313-343.

Durch die in den C. R. veröffentlichten Untersuchungen des Herrn Bertrand über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Aufgaben der Artillerie ist der Verfasser dazu angeregt worden, seine Arbeit noch einmal durchzugehen, über welche F. d. M. XVI. 1884. 817 berichtet worden ist. Die Folgerungen, zu denen er in der gegenwärtigen Abhandlung gelangt, sind nicht wesentlich verschieden von denen des älteren Aufsatzes. Indem er dieselben jedoch ausschliesslich aus dem Principe des arithmetischen Mittels für Beobachtungsresultate ableitet, glaubt er sie in der einfachsten und allgemeinsten Form dargelegt zu haben.

Die Abhandlung zerfällt in sieben Capitel. Die ersten drei beschäftigen sich mit den Gesetzen der wahrscheinlichen Abweichungen bei der Untersuchung der Lage eines Punktes auf einer Linie, in einer Ebene und im Raume. Das vierte sucht den Einfluss der Anzahl der Versuche auf die Genauigkeit der daraus abgeleiteten Ergebnisse abzuschätzen. Das fünfte stellt die gewonnenen Formeln zusammen und giebt die zu ihrer Anwendung nötigen Tafeln. Im sechsten Capitel giebt der Verfasser eine Uebersicht über die praktischen Folgerungen seiner Theorie mit Bezug auf die Einrichtung der Schusstabellen und der Grundsätze beim Einschiessen.

Wir geben aus dem fünften Capitel die folgenden Resultate:

1) Im Falle der Untersuchung der Lage eines Punktes auf einer Geraden giebt die Formel

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \Theta(t)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei neuen Versuchen die zu befürchtenden Abweichungen (ξ) zwischen Grenzen eingeschlossen sind, welche durch die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{2a^2} = t^2 \text{ oder } \xi = \pm at\sqrt{2}$$

bestimmt sind.

2) In dem Falle der Untersuchung der Lage eines Punktes auf einer Ebene giebt die Formel

$$P = \int_0^t 2e^{-t^2} t\,dt = 1 - e^{-t^2} = \Phi(t)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei neuen Beobachtungen die Abweichungen (ξ, η) in dem Inneren einer Ellipse eingeschlossen bleiben, welche durch die Gleichung

$$\frac{b^2\xi^2 - 2c^2\xi\eta + a^2\eta^2}{2(a^2b^2 - c^4)} = t^2$$

dargestellt wird.

3) In dem Falle der Untersuchung der Lage eines Punktes im Raume giebt die Formel

$$P = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} t^2\,dt = \Theta(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, t e^{-t^2} = \Psi(t)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei neuen Versuchen die Abweichungen (ξ, η, ζ) in dem Inneren des Ellipsoids eingeschlossen bleiben, das durch die Gleichung

$$(b^2c^2 - g^4)\xi^2 + (c^2a^2 - h^4)\eta^2 + (a^2b^2 - f^4)\zeta^2 + 2(g^2h^2 - c^2f^2)\xi\eta + 2(h^2f^2 - a^2g^2)\eta\zeta + 2(f^2g^2 - b^2h^2)\xi\zeta = \Delta t^2$$

dargestellt wird, wo

$$\Delta = 2(a^2b^2c^2 - a^2g^4 - b^2h^4 - c^2f^4 + 2f^2g^2h^2)$$

ist. Die Grössen a^2, b^2, c^2, f^2, g^2, h^2 sind die Quadrate der mittleren Abweichungen:

$$a^2 = \frac{\Sigma\xi^2}{n-1}, \ldots, f^2 = \frac{\Sigma\xi\eta}{n-1}.$$

Lp.

A. Croizé. Note relative à la régularité des tirs d'expériences et aux règles à suivre pour déterminer le régime d'un tir avec une probabilité suffisante. Rev. d'Art. XXXII. 572-582.

Der Verfasser betrachtet: I. Die Begriffe der mittleren Abweichung, der wahrscheinlichen Abweichung, der mittleren qua-

dratischen Abweichung. II. Die zu beobachtenden Grössen. III. Die zu befolgenden Regeln, um den wirklichen Verlauf des Schiessens mit einer genügenden Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. IV. Die Minimalzahl der abzufeuernden Schüsse. V. Die zu befolgenden Regeln bei der Bestimmung des mittleren Verlaufes eines Schiessens. VI. Vergleichungen zweier Schiessen nach ihrem wirklichen oder nach ihrem mittleren Verlauf.

Lp.

G. KRALL. Zur Lösung ballistischer Aufgaben auf photographischem Wege. Mitt. üb. Art. u. Genie XIX. Notizen. 118-126.

Unter Bezugnahme auf die von Herrn P. Salcher veröffentlichten Resultate der „photographischen Fixirung der durch Projectile in der Luft eingeleiteten Vorgänge" (in „Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens" Heft 9. 1887) bespricht der Verfasser folgende vier Aufgaben: 1. Die Bewegung der Geschoss-Axe durch ein Lichtbild zu registriren. 2. Die Rotationsgeschwindigkeit des Geschosses in einem beliebigen Punkte seiner Bahn zu bestimmen. 3. Ermittelung der Geschossbewegung innerhalb des Rohres. 4. Ermittelung der Geschossbewegung innerhalb des Panzers.

Lp.

L. KUCHINKA. Der Comparateur-Régulateur von A. und V. Flamache zur Verification der ballistischen Chronographen. Mitt. üb. Art. u. Genie XIX. Notizen. 1-16.

Der Apparat, auf Zeitmessung durch Elektricität beruhend, dient 1) zur Vergleichung und absoluten Klassification der seiner Kontrolle unterzogenen Chronographen; 2) zur Bestimmung der Grösse und Beschaffenheit der die chronographischen Versuchsresultate behaftenden Fehler und zur Ermöglichung, die störenden Ursachen zu beseitigen oder den Fehlern bei den der Réglage folgenden Versuchen Rechnung zu tragen, die Resultate daher dementsprechend zu berichtigen. (Bearbeitung nach der „Revue militaire belge" II. 1885.)

Lp.

N. von Wuich. Theorie des Quadranten- (Klappen-) Aufsatzes. Mitt. üb. Art. u. Genie XIX. Notizen. 27-30.

Ermittelung der Lage des beweglichen Visirpunktes, wie sie einem bestimmten Elevationswinkel entspricht, in streng analytischer Behandlungsweise. Lp.

B. Monteux. Calcul des éléments d'un frein hydraulique à résistance constante et à orifices variables. Rev. d'Art. XXXI. 193-210.

Der Verfasser kritisirt die in der Praxis benutzte Formel $\frac{1}{2}mv^2 = R.l$, in der m die Masse des Systems (Kanone und Lafette etc.), v die Maximalgeschwindigkeit des Rückstosses bei Abwesenheit aller Widerstände, l die Weglänge beim Rückstosse, R den constant vorausgesetzten Widerstand einer hydraulischen Bremse bedeutet. Der Fehler dieser Formel bestehe darin, dass die Periode der Bewegung bis zur Erreichung der Maximalgeschwindigkeit nicht berücksichtigt sei. Durch Berücksichtigung dieser Periode gelange man, bei gegebener Weglänge l des Rückstosses, zu Widerständen, die kleiner seien, in einem durchgerechneten Beispiele statt $R = 12000$ kg zu $R = 9000$ kg. Nach diesen Ueberlegungen geht der Verfasser an die Lösung der von ihm gestellten Aufgaben, 1) den Widerstand der Bremse zu berechnen, 2) das Gesetz der Aenderung der Einströmungsöffnungen zu finden, durch welches die Constanz der Wirkung gesichert wird. Die entwickelte Theorie scheint mit den gemachten Erfahrungen besser übereinzustimmen als die bisherige. Lp.

H. Putz. Théorie mécanique du frein Lemoine appliqué aux affûts de campagne. Rev. d'Art. XXXII. 113-142.

Muika. Die Bremse von Lemoine und ihre Theorie. Mitt. üb. Art. u. Genie. XIX. Notizen. 149-156.

Diese in Frankreich bei 90 mm-Kanonen in Verwendung stehende Bremse wurde im Jahre 1885 in der Artillerie-Schiess-

schule zu Châlons mit Erfolg zur Anwendung gebracht, ferner während der grossen Manöver des ersten Armeecorps.

Zuerst wird eine Beschreibung dieser Bremse gegeben, sowie eine Schilderung ihres Wirkens beim Sperren der Räder, sowohl während des Marsches als auch beim Schiessen, in welchem letzteren Falle sie selbstthätig den Rücklauf des Geschützes beschränkt. Danach wird ihre Theorie entwickelt; dieselbe kommt auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurück. Die Wiedergabe dieses theoretischen Teiles der Arbeit ist deshalb nicht gut möglich, weil dazu eine umständliche genaue Beschreibung der Bremse erforderlich wäre. Der Artikel des Herrn Muika ist ein Auszug aus der Putz'schen Abhandlung. Lp.

Le Boulengé. Le chronographe Le Boulengé modifié. Rev. d'Art. XXXII. 189-192. Abänderung des Le Boulengé'schen Chronographen. Arch. f. Art. XCV. 561-563. Der modificirte Chronograph von Le Boulengé. Mitt. üb. Art. u. Genie. XIX. Notizen. 126-128.

Beschreibung der Abänderungen an diesem elektrischen Chronographen für Geschossgeschwindigkeiten bis zu 1000 m in der Secunde. Lp.

F. Siacci. Balistica. Seconda edizione interamente rifusa. Torino.

L. Sigaut. Étude sur l'organisation du tir dans les places. Rev. d'Art. XXXII. 268-288.

F. de Fonds-Lamothe. Note sur le pointage des canons de campagne. Rev. d'Art. XXXII. 289-294.

Percin. Au sujet d'un nouveau mode d'organisation du tir dans les places. Rev. d'Art. XXXII. 477-483.

E. Muzeau. Nouvel exercice préparatoire de tir sur but mobile. Rev. d'Art. XXXII. 536-543.

P. Frocard. De l'usage des télémètres pour le réglage direct du tir fusant. Rev. d'Art. XXXII. 241-251.

A. Cornu. Sur le réglage de l'amortissement et de la phase d'une oscillation synchronisée réduisant au maximum l'influence des actions perturbatrices. Réglage apériodique. C. R. CVI. 1206-1213.

Der Artikel bildet die Fortsetzung der beiden in C. R. CIV erschienenen Noten, über welche F. d. M. XIX. 1887. 968 berichtet ist. Eine Schwingung heisst „synchronisirt", wenn sie unter dem Einflusse einer periodischen Kraft in einen derartigen andauernden Zustand versetzt ist, dass die Phase unveränderlich bleibt. Aus den in den früheren Artikeln aufgestellten Formeln schliesst der Verfasser:

1. Die Grenzphase γ einer synchronisirten Schwingung ist von der Intensität u der synchronisirenden Einwirkung und von der Grenzamplitude β unabhängig.

2. Die Grenzphase ist der Periodendifferenz proportional.

3. Der Dämpfungscoefficient, den man bei dem schwingenden, zu synchronisirenden Systeme zur Compensation einer gegebenen Periodendifferenz $\Theta - T$ benutzen muss, ist durch die Phase definirt, welche man zwischen der synchronisirten Schwingung und der leitenden Einwirkung aufrecht erhalten will, und umgekehrt. Der Fehler in der Phase, der durch eine langsame Aenderung der Periodendifferenz veranlasst wird, nimmt ab, wenn der Dämpfungscoefficient zunimmt. Aus der Betrachtung der logarithmischen Spiralen, welche als Indicatrices der Synchronisation auftreten, schliesst Hr. C. weiter: Die Zeit, welche notwendig ist, um während des veränderlichen Zustandes, der Folge einer plötzlichen Aenderung der synchronisirenden Kraft, den periodischen Fehler der Phase auf einen gegebenen Bruchteil zu bringen, ist bei sonstiger Gleichheit der Umstände dem Dämpfungscoefficienten umgekehrt proportional. Der zu befürchtende Maximalfehler bei der Phase ist dem Sinus der Grenz-

phase proportional. Daher ist es wichtig, dem Dämpfungscoefficienten den grössten, mit den Versuchsbedingungen verträglichen Wert zu erteilen und die Grenzphase der Null nahe zu bringen. Vorschläge und Erläuterungen zu Versuchen bilden den Schluss der Note. Lp.

J. B. WEBB and S. JACOBUS. Effect of friction at connecting-rod bearings on the forces transmitted. Annals of Math. IV. 169-181.

Der Artikel ist dem wesentlichen Inhalte nach von technischem Interesse und erfordert zur Darstellung seines Inhaltes eine solche Menge verschiedener Bezeichnungen und Erklärungen, dass wir uns mit dem Hinweise hierauf begnügen müssen. Lp.

DAURRY. Sur la détermination de la force du vent en grandeur et en direction. Belg. Bull. (3) XV. 192-197.

HOUZEAU et FOLIE. Rapports. ibid. 11-13.

Vergleichung der Stromeinwirkung des Windes auf zwei Pendel, von denen das eine die schwingende Platte senkrecht, das andere schief zur Windrichtung hat. Mn. (Lp.)

E. BERTINET. Théorie élémentaire du cerf-volant. Reims. 69 S. 8° u. 1 Taf.

HOLZMÜLLER. Mechanisch-technische Plaudereien. Z. dtsch. Ing. XXXIII. 9-13.

A. AUDEBRAND. Étude sur le rendement du cheval d'Artillerie. Rev. d'Art. XXXII. 24-67, 143-164.

B. Hydrodynamik.

A. B. Basset. A treatise on hydrodynamics; with numerous examples. Two volumes. Cambridge. Deighton. Bell and Co. London. George Bell and Sons. XII + 264, XV + 328 p.

Das vorliegende Lehrbuch ist sehr umfangreich; es enthält die Ergebnisse der wichtigsten Forschungen in der mathematischen Theorie der Hydrodynamik neuerer Zeit; dabei ist es jedoch hauptsächlich der Bewegung von Flüssigkeiten gewidmet. Wie die Natur des Gegenstandes und die Ordnung der Themata es erheischt, so sind die höheren mathematischen Methoden und Functionen frei benutzt worden; gleichzeitig ist meistens alle nötige Hülfe geleistet, und für den Studirenden der reinen Mathematik dürften die in dem Lehrbuche sich findenden Anwendungen der verschiedenen Functionen von grossem Interesse sein. Die erhebliche Anzahl von Beispielen, die dem Studirenden zur Uebung vorgelegt werden, erhöht den Wert des Buches beträchtlich; der erfolgreiche Versuch zur Auffindung von Lösungen in gegebenen Fällen giebt Zutrauen und Kraft beim Unternehmen eigener Arbeiten, und dadurch ist jene Eigentümlichkeit des Buches hinreichend gerechtfertigt, wofern dies notwendig scheint. Eine kurze Uebersicht über den Inhalt kann nützlich sein.

Die beiden Bände enthalten 23 Capitel, von denen die letzten vier die Bewegung einer zähen Flüssigkeit behandeln. Im I. Capitel werden Ausdrücke für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sowohl bei festen als auch beweglichen Axen gefunden und die Continuitätsgleichung aufgestellt. Im II. Capitel werden die allgemeinen Bewegungsgleichungen einer vollkommenen Flüssigkeit bewiesen und verschiedene Transformationen derselben (von Weber, Clebsch, u. s. w.) erörtert. Das III. Capitel handelt von „Sources, Doublets, and Images“. Das IV. giebt eine allgemeine Besprechung der Wirbelbewegung und der cyklischen rotationslosen Bewegung, während die Erörterung der geradlinigen und der kreisförmigen Wirbel bis zum XIII. und XIV. Capitel bezw. verschoben wird. Im V. Capitel

werden conjugirte Functionen auf die Bewegung einer Flüssigkeit in zwei Dimensionen angewandt. Im VI. Capitel wird Kirchhoff's Lösungsmethode für Fälle discontinuirlicher Bewegung benutzt. Die Capitel VII, VIII, IX, X, XI beschäftigen sich mit der Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten; das VII. Capitel handelt von der Kinematik des Gegenstandes, wogegen in den vier anderen die Lagrange'schen und Hamilton'schen Gleichungen zur Erörterung der meisten Aufgaben gebraucht werden, welche bisher behandelt sind. Der zweite Band wird mit einer Besprechung der Kugelfunctionen und verwandter Functionen eröffnet, mit Einschluss der toroidalen Functionen sowie derjenigen, welche durch Verwandlung von x in ix bei der Bessel'schen Gleichung entstehen (Cap. XII). Capitel XV, dessen Vortrefflichkeit vielleicht besonders zu betonen ist, behandelt die Bewegung eines flüssigen Ellipsoids unter dem Einflusse seiner eigenen Anziehung, während Capitel XVI die stetige Bewegung zweier Massen rotirender Flüssigkeit untersucht. Dem Thema der Flüssigkeitswellen ist Capitel XVII gewidmet. Stabile und instabile Bewegung ist der Gegenstand von Capitel XVIII. Capitel XIX wird von der Theorie der Gezeiten angefüllt und bespricht die Gleichgewichtstheorie, die Theorie von Laplace und Airy's Kanaltheorie. Wie bereits erwähnt, handeln die übrigen Capitel von der Bewegung einer zähen Flüssigkeit. Alles in allem genommen, bildet das vorliegende Werk einen beachtenswerten Zuwachs englischer Lehrbücher. (Anzeige in Nature XXXVIII. 243-244). Gbs. (Lp.)

D. Bobylew. Ueber die Fortschritte der Hydrodynamik während der letzten 30 Jahre. Samml. des Wegebau-Ing.-Inst. St. Petersburg. VIII. 1-23. (1887 Russisch.)

A. Cayley. Note on the hydrodynamical equations. Edinb. Proc. XV. 342-344.

Wenn man D für $\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$ schreibt und

aus den Gleichungen

$$Du = \frac{\partial}{\partial x}\left(V - \frac{p}{\varrho}\right), \quad Dv = \frac{\partial}{\partial y}\left(V - \frac{p}{\varrho}\right), \quad Dw = \frac{\partial}{\partial z}\left(V - \frac{p}{\varrho}\right)$$

ohne Benutzung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$V - \frac{p}{\varrho}$ eliminirt, so erhält man Gleichungen, welche den Helmholtz'schen nicht äquivalent sind, welche aber, falls man sie vermittelst der ausgelassenen Gleichung transformirt, mit diesen Gleichungen übereinstimmen. Die Gleichungen werden in ihrer ursprünglichen Form erhalten, und es wird auf einen Quaternionen-Ausdruck in Herrn McAulay's Aufsatz Bezug genommen: „Some general theorems in quaternion integration“ (Mess. XIV. 1884. 26-37, F. d. M. XVI. 235). Cly. (Lp.)

P. G. Tait. Quaternion notes. Edinb. Proc. XV. 379-380.

a) bezieht sich auf eine alte Untersuchung des Verfassers, die in einem kurzen Auszuge in Edinb. Proc. VII. 143 abgedruckt ist und mit der vorangehenden Cayley'schen Note zusammenhängt.

b) enthält Zusätze zu dem Artikel des Verfassers „On quaternion integrals“ (Edinb. Proc. VII. 318 u. 784).

Cly. (Lp.)

A. N. Whitehead. On the motion of viscous incompressible fluids, a method of approximation. Quart. J. XXIII. 78-93.

Bei der Behandlung der Bewegung in reibenden Flüssigkeiten unterdrückt man meistens die quadratischen Glieder der Geschwindigkeiten, was darin seine Berechtigung hat, dass ja die Vorstellungen über die Reibung streng gültig nur für kleine Geschwindigkeiten sind.

Der Verfasser entwickelt in dem vorliegenden Artikel eine Methode für die Ableitung einer zweiten Näherung.

Ist

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$P = \frac{p}{\varrho} + \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

so können die Differentialgleichungen der Bewegung geschrieben werden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2(v\zeta - w\eta) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

mit zwei ähnlichen Gleichungen für v und w, und

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Für den Fall, dass die Bewegung von der Zeit unabhängig ist, sind die Ableitungen nach t gleich Null. Es sei nun für diesen Fall u_0, v_0, w_0, P_0 eine erste Näherung dieser Gleichungen, welche den Grenzbedingungen Genüge leistet, so dass die Gleichungen gelten

$$-\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\right) = 0 \text{ etc.,}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0.$$

Eine genauere Lösung $u_0 + u_1$, $v_0 + v_1$, $w_0 + w_1$, $P_0 + P_1$ erhält man dann durch die Gleichungen

$$-\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) = -2(v_0\zeta_0 - w_0\eta_0) = -2A_0 \text{ etc.,}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0.$$

Aus denselben folgt zunächst

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 2\left(\frac{\partial A_0}{\partial x} + \frac{\partial B_0}{\partial y} + \frac{\partial C_0}{\partial z}\right) = 2K_0.$$

Bezeichnet man nun mit $d\tau'$ ein Volumenelement der Flüssigkeit mit den Coordinaten x', y', z' und mit σ die Entfernung des Punktes (x, y, z) von demselben, so kann

$$P_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{K'_0 d\tau'}{\sigma} + \Pi_1$$

gesetzt werden, wo die Integration über die ganze Flüssigkeit

zu erstrecken ist, und Π_1 der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial z^2} = 0$$

genügt. Ebenso erhält man für die Correcturen der Geschwindigkeitscomponenten Gleichungen, von denen hier nur die erste angegeben werden soll:

$$\frac{\mu u_1}{\varrho} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial P_1'}{\partial x'}\frac{d\tau'}{\sigma} + \frac{1}{2\pi}\int A_0'\frac{d\tau'}{\sigma} + \frac{\mu U_1}{\varrho},$$

wo

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = 0$$

ist. Aus der Gleichung der Continuität erhält man hieraus nach einigen Umformungen folgende Beziehung zwischen U_1, V_1, W_1:

$$\frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial P_1}{\partial n} - 2(A_0 \cos nx + B_0 \cos ny + C_0 \cos nz)\right)\frac{dS}{\varrho}.$$

Da das Integral auf der rechten Seite ein Oberflächenintegral ist, so genügt die linke Seite, wie es sein muss, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0.$$

In den bisher behandelten Fällen ist P_0 constant; infolge dessen genügen hier u_0, v_0, w_0 ebenfalls der angeführten partiellen Differentialgleichung, und die Grössen ξ_0, η_0, ζ_0 sind die Ableitungen einer Function ψ, welche derselben Differentialgleichung genügt. Deshalb wird hier

$$K_0 = 2(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2) = \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial z^2}$$

und

$$P_1 = 2\psi^2 + \Pi_1.$$

Der Druck wird

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2}\varrho(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) + 2\varrho\psi^2 + \varrho\Pi_1.$$

Mit Hülfe der vorstehend skizzirten allgemeinen Untersuchungen behandelt der Verfasser mehrere specielle Fälle, zunächst die Bewegung einer Flüssigkeit, welche eine Kugel vom Radius s

umgiebt, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe rotirt. Durch Kugelcoordinaten ausgedrückt, lauten die entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit

$$R = -\tfrac{1}{4}\frac{\varrho\omega^2 a^3}{\mu}\frac{a^4}{r^3}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)^2 P_2(\cos\vartheta),$$

$$\Theta = \tfrac{1}{4}\frac{\varrho\omega^2 a^3}{\mu}\frac{a^4}{r^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\Phi = \frac{\omega a^2}{r^2}\sin\theta.$$

Bezüglich des Durchflusses durch eine lange Röhre, welche zum Schluss behandelt wird, bemerken wir, dass der Eintritt quadratischer Glieder durch eine Einführung von P an Stelle von p bewirkt wird, dass es also befremdlich wäre, wenn durch die Berücksichtigung quadratischer Glieder eine Aenderung des Resultates bewirkt würde. F. K.

A. N. Whitehead. Second approximation to viscous fluid motion. Quart. J. XXIII. 143-152.

Für die Bewegung eines Stromes reibender Flüssigkeit, welcher ein kugelförmiges Hindernis trifft, sucht der Verfasser eine zweite Annäherung, wie in dem soeben besprochenen Artikel allgemein angegeben und für zwei specielle Probleme durchgeführt ist. Vernachlässigt man die quadratischen Glieder, so erhält man für die Componenten der relativen Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens in Richtung des Kugelradius und in der senkrecht darauf stehenden Richtung in der Meridianebene die Werte:

$$u = V\left(-\tfrac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}+\tfrac{3}{2}\frac{a}{r}-1\right)\cos\theta,$$

$$v = V\left(-\tfrac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}-\tfrac{3}{4}\frac{a}{r}+1\right)\sin\theta.$$

Durch Reihenentwickelung findet der Verfasser für die Correctionsglieder bei Berücksichtigung der zweiten Potenzen die Werte

$$u_1 = -\tfrac{3}{16}\frac{\varrho V^2 a}{\mu}\left(\frac{a}{r}-1\right)^2\left(\frac{a^2}{r^2}+\frac{a}{r}+2\right)\tfrac{1}{2}(3\cos^2\vartheta-1),$$

$$v_1 = -\tfrac{3}{16}\frac{\varrho V^2 a}{\mu}\left(\frac{a}{r}-1\right)\left(\frac{a^3}{r^3}+\frac{a^2}{2r^2}+\frac{a}{2r}+2\right)\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Denselben haftet, wie der Verfasser hervorhebt, der Nachteil an, dass sie im Unendlichen nicht den Wert Null annehmen.

F. K.

---

de Saint-Venant et Flamant. De la houle et du clapotis. Ann. des ponts et ch. XV. 705-808.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Teile. Der erste von de Saint-Venant herrührende Abschnitt behandelt die historische Entwickelung der Wellenlehre, der zweite von Flamant herrührende Teil giebt eine Uebersicht des jetzigen Standpunktes der Wellenlehre, an deren Abfassung der erstgenannte Autor durch seinen zu frühen Tod gehindert wurde.

Der erste Teil bespricht zunächst die ältesten Versuche zur Lösung des Wellenproblems von Newton und Daniel Bernoulli. Dann gelangen die Arbeiten von Laplace und Lagrange zur Besprechung. Nach einer kurzen Bemerkung über de la Coudraye und Brémontier gelangt der Verfasser zu Poisson und Cauchy, denen sich unmittelbar Ostrogradski anschliesst. Die Arbeit von de Corancez (1818) erwähnt der Verfasser besonders deshalb, weil in ihr die Theorie der bestimmten Integrale und der trigonometrischen Reihen zur Anwendung gelangt, welche der Verfasser als Schüler Fourier's kennen gelernt hatte. Es werden die Arbeiten der Gebrüder Weber erwähnt; den Schluss des fünften Abschnittes bildet die Besprechung der Untersuchungen von Emy.

Im sechsten Abschnitt werden die Untersuchungen besprochen, welche von englischen Gelehrten angestellt sind, von Russel, Kelland, Airy, Stokes und Rankine. Den siebenten und achten Abschnitt füllen die in Frankreich seit 1862 angestellten Untersuchungen, im neunten endlich werden Beobachtungen und Experimente besprochen. In drei angehängten Noten kommen die Theorie von Laplace, Lagrange und Poisson zur ausführlichen Darstellung.

Im zweiten Teile werden zunächst die Differentialgleichungen aufgestellt von welchen das Problem abhängt, dann kommt

die Gerstner'sche Wellenbewegung in einem unendlich tiefen Ocean zur Besprechung. Danach werden die Gleichungen abgeleitet, welche Boussinesq für die Wellenbewegung in einem Kanal von endlicher Tiefe aufgestellt hat. Den Schluss bilden zwei Abschnitte über die Zusammensetzung zweier Wellen. F. K.

E. Riecke. Beiträge zur Hydrodynamik. Gött. Nachr. 347-357.

Im ersten Abschnitt wird zunächst die Bewegung eines Flüssigkeitsstromes gegen eine ruhende Kugel auf äusserst interessante Weise abgeleitet. Die Flüssigkeitsbewegung wird dann zeichnerisch erläutert durch Aufzeichnung der Strömungslinien und derjenigen Gestalten, welche ein Teil der Flüssigkeit — nämlich ein solcher, welcher zu irgend einer Zeit eine zur Strömungsrichtung senkrechte Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel bildet — am Ende gleicher Zeitabschnitte annimmt. Giebt man dem ganzen System eine Bewegung, die gleich gross, aber entgegengesetzt der Strömung der Flüssigkeit im Unendlichen ist, so gelangt man zur Lösung des Problems der bewegten Kugel in einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit. Die Bahnen, welche jetzt ein einzelnes Flüssigkeitsteilchen durchläuft, kann man nun so construiren, dass man die der erteilten Geschwindigkeit und den betreffenden Zeitpunkten entsprechenden Wegstrecken von den Schnittpunkten der Strömungslinien und Gestaltcurven nach der passenden Richtung abträgt. Die so entstehenden Bahnlinien eines einzelnen Teilchens sind schleifenförmige Curven.

Im zweiten Abschnitt behandelt der Verfasser eine Flüssigkeitsbewegung in einem Gebiet von zwei Dimensionen, welche durch die Strömungsfunction definirt wird

$$\mathfrak{W} = -\frac{m}{\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} - \frac{m}{2\pi a}x.$$

Dieselbe stellt eine Bewegung mit zwei ruhenden Wirbelcentren dar, bei welcher im Unendlichen die Flüssigkeit mit der Ge-

schwindigkeit $\frac{m}{2\pi a}$ im Sinne der y-Axe strömt. Durch die Fläche $\mathfrak{W} = 0$ wird die Flüssigkeit in zwei Bestandteile verschiedenen Bewegungscharakters zerlegt. Innerhalb derselben erfolgt eine Circulation um die beiden Wirbelcentren, während der andere Teil die Fläche $\mathfrak{W} = 0$ wie einen festen Körper (Wirbelkörper) umfliesst. Giebt man nun wieder dem ganzen System eine Geschwindigkeit entgegengesetzt derjenigen im Unendlichen, so hat man es mit der Bewegung zweier Wirbel in einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit zu thun. Dann verhält sich der eine die Wirbelcentren umschliessende Kern gegenüber der übrigen Flüssigkeit, wie ein in letzterer fortschreitender fester Körper.

Der dritte Abschnitt beschreibt Experimente über das Strömen in quadratischen Platten, welche Herr Krüger angestellt hat. Eine quadratische Hohlplatte von 75,5 mm Seitenlänge und 6,4 mm Höhe wurde dadurch hergestellt, dass Glasplatten in die ausgekehlten Seiten eines Rahmens eingelassen wurden. Der Rahmen war an zwei gegenüberliegenden Ecken in Kanälen durchbrochen, durch welche Flüssigkeit aus einem Reservoir R zu- und in ein zweites Reservoir R_1 abströmen konnte. Beide wurden auf constanter Niveaudifferenz gehalten. Um die Strömungslinien zur Anschauung zu bringen, wurden auf den Grund der Platte Fuchsinkrystalle geklebt. Bei geringen Druckhöhen (2 mm) verhielten sich die Strömungslinien wie galvanische Linien; aber schon bei einem Druck von 3 mm bildeten sich Wirbel, welche sich bei wachsendem Drucke mehr und mehr ausdehnten.

F. K.

P. Molenbroek. Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. Wiedemann Ann. XXXV. 62-76.

Für das Gebiet zweier Veränderlichen führt der Herr Verfasser als unabhängige Veränderliche die Grössen λ und μ ein, welche durch die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varkappa e^{-\lambda}\cos\mu, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varkappa e^{-\lambda}\sin\mu$$

definirt sind, in welchen $\varkappa$ die Geschwindigkeit an der freien Grenze ist, so dass für letztere $\lambda = 0$ wird. Auf zwei Wegen leitet der Verfasser dann die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\frac{\partial y}{\partial \mu} = e^{-\lambda}(v\cos\mu - w\sin\mu),$$
$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = +\frac{\partial y}{\partial \lambda} = e^{-\lambda}(v\sin\mu + w\cos\mu),$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \varkappa v, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \varkappa w$$

ab, wo

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} = \frac{\partial w}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial v}{\partial \lambda} = -\frac{\partial w}{\partial \mu}$$

ist. Ist $f(\lambda, \mu) = \text{const.}$ die Gleichung einer festen Grenze, so muss für letztere sein

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} v + \frac{\partial f}{\partial \mu} w = 0;$$

an der freien Grenze muss ausser λ auch $v = 0$ sein. Die Anwendung dieser Formeln führt Herrn Molenbroek nicht auf neue Fälle strahlenförmiger Flüssigkeitsbewegung. Auch für ein Gebiet von drei Dimensionen nimmt der Herr Verfasser eine Umformung der Gleichungen vor, indem er als Unabhängige die aus den folgenden Gleichungen bestimmten Grössen λ, μ, ν einführt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{\lambda}\cos\mu, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{\lambda}\sin\mu\cos\nu, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = e^{\lambda}\sin\mu\sin\nu.$$

Bekanntlich bleiben die in Frage kommenden Differentialgleichungen dann nicht mehr linear, und so wird denn auch Herr Molenbroek auf eine recht complicirte Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades mit einer Grenzbedingung für $\lambda = 0$ geführt, die ebenfalls vom zweiten Grade ist. Herr Molenbroek sagt selbst, dass seine Untersuchungen ihn nicht zu brauchbaren Lösungen geführt hätten. F. K.

N. Quint. De wervelbeweging. Diss. Amsterdam. van Heteren. 138 S.

J. C. van den Berg. De wervelbeweging. Diss. Haarlem. Boekhandel. 154 S.

Zwei Dissertationen über denselben Gegenstand, die unabhängig von einander gearbeitet sind und sich ergänzen. Um ein Bild ihres Inhaltes zu geben, führen wir die Titel der einzelnen Abschnitte an. Die erste Arbeit umfasst die folgenden: Einleitung. Capitel I. Grundsätze der Wirbelbewegung. Capitel II. Parallele gerade Wirbelfäden, Wirbelebenen, Wirbelcylinder. Capitel III. Wirbelringe. Capitel IV. Einfluss der Reibung. Capitel V. Experimentelle Untersuchungen. Capitel VI. Die Wirbelatomhypothese (von Thomson). Den Schluss bildet eine Zusammenstellung der zum Gegenstande gehörenden Literatur.

Die zweite Dissertation ist folgendermassen eingeteilt: Einleitung (über die hydrodynamischen Grundgleichungen). Capitel I. Betrachtung der Flüssigkeitsbewegung nach Helmholtz. Capitel II. Eigenschaften der Wirbelbewegung. Capitel III. Untersuchungen von Hankel und Thomson. Capitel IV. Bestimmung der Geschwindigkeit aus der Rotationsbewegung. Capitel V. Allgemeine Eigenschaften von parallelen, geraden Wirbelfäden; Anwendungen auf einen und auf zwei Wirbelfäden. Capitel VI. Bewegung von drei und mehr parallelen geraden Wirbelfäden. Capitel VII. Wirbelcylinder. Capitel VIII. Kreisförmige Wirbelfäden. Die obengenannte Literaturangabe wird ergänzt durch die Anführung einiger englischen und deutschen Abhandlungen. Besonders die Bewegung von drei und mehr parallelen geradlinigen Wirbelfäden ist hier nach Gröbli's Untersuchungen eingehend auseinandergesetzt und durch Zeichnungen erklärt. Zusammen geben beide Dissertationen eine ziemlich vollständige Uebersicht aller theoretischen Untersuchungen, die über die Wirbelbewegung angestellt sind. G.

C. Chree. Vortex rings in a compressible fluid. Edinb. M. S. Proc. VI. 59-68.

Der Artikel bespricht die Wirkung der Zusammendrückbarkeit bei einer Flüssigkeit auf die Bewegung kreisförmiger Wirbelringe. Eine besondere Sorgfalt wird darauf verwandt, den Einfluss der relativen Grösse vernachlässigter Glieder bei den Formeln abzuschätzen. Gbs. (Lp.)

L. Lecornu. Sur les mouvements giratoires des fluides. C. R. CVI. 1654-1657.

Sind bei einer symmetrischen Flüssigkeitsbewegung um eine Axe u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit in Richtung des Radius, der Kreistangente und der Axe, so sind die Componenten der Wirbelbewegung bestimmt durch die Gleichungen

$$2A = -\frac{1}{r}\frac{\partial(vr)}{\partial z},\quad 2B = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r},\quad 2C = \frac{1}{r}\frac{\partial(vr)}{\partial r},$$

und die Differentialgleichungen der Wirbellinien lauten

$$\frac{dr}{-\frac{\partial(vr)}{\partial z}} = \frac{r^2 d\theta}{\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}} = \frac{dz}{\frac{\partial(vr)}{\partial r}},$$

von welchen sich unmittelbar das eine Integral

$$vr = \omega r^2 = \text{const.}$$

ergiebt. Sind die Projectionen der Wirbellinien concentrische Kreise, so ist A gleich Null; sind die Wirbellinien selbst Kreise, so ist $A = C = 0$, und $vr = \omega r^2$ hat in dem ganzen Gebiet denselben Wert. Nach einem bekannten Satze ändert sich die Drehungsgeschwindigkeit so, dass sie proportional mit dem Product aus der Dichtigkeit und der Entfernung zweier benachbarten Teilchen der Wirbellinie bleibt. Es hat also in dem eben bezeichneten Falle für jede Wirbellinie der Ausdruck

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}}{\varrho r}$$

einen von der Zeit unabhängigen Wert. Bei einer incompressiblen Flüssigkeit kann also, wenn in einem Augenblick dieser Ausdruck für alle Wirbellinien denselben Wert hat,

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} = 2kr$$

gesetzt werden, wo k einen constanten Factor bezeichnet. Die Gleichung der Continuität lautet hier

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0.$$

Man kann also

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad w = -kr^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

setzen, wo φ der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

genügt. Lösungen dieser Gleichung sind

$$\varphi = b((z+a)^2 - r^2\log r) \quad \text{und} \quad \varphi = -b\sqrt{r^2+(z+a)^2}.$$

Bei der zweiten Lösung liegen die Trajectorien der Teilchen auf den Rotationsflächen

$$\tfrac{1}{4}kr^4 - b\sqrt{r^2+(z+a)^2} = \text{const.}$$

Die aufsteigende Bewegung wird von der absteigenden getrennt durch die Fläche

$$r^2\sqrt{r^2+(z+a)^2} = \frac{b}{k}.$$

F. K.

A. E. H. Love. Vortex motion in certain triangles. American J. XI. 158-171.

Hängt eine Flüssigkeitsbewegung von zwei Dimensionen ab, so kann man die Bewegung, falls das Gebiet die unendliche Halbebene ist, in welcher sich ein Wirbel befindet, darstellen durch die Gleichung

$$\Psi + i\Phi = \frac{m}{2\pi}\ln\frac{Z-Z_0}{Z-Z_0'},$$

wo Φ das Geschwindigkeitspotential, Ψ die Strömungsfunction, Z die aus den Coordinaten gebildete complexe Veränderliche, Z_0 der Wert von Z für den Wirbel und endlich Z_0' die Conjugirte von Z_0 ist. Will man die entsprechende Aufgabe für ein beliebig begrenztes Gebiet z lösen, so hat man für Z nur diejenigen Functionen von z zu setzen, vermittelst deren das gegebene Gebiet auf die unendliche Halbebene abgebildet wird, und für Z_0 den Wert dieser Function für z_0, sowie für Z_0' wieder die conjugirte Grösse zu Z_0. Für gewisse Dreiecke lässt sich nun Z durch elliptische Functionen von z darstellen, nämlich

wenn die Winkel sind

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}; \quad \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}; \quad \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}.$$

Der Verfasser stellt für diese vier Fälle $\Psi + i\Phi$ dar, indem er den unter dem Zeichen ln stehenden Ausdruck durch σ-Functionen ausdrückt. F. K.

G. H. Bryan. The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity. Lond. R. S. Proc. XLV. 42-45.

Auszug aus einer Schrift, welche wahrscheinlich in den Transactions erscheinen wird. Cly. (Lp.)

V. A. Julius. Over de trillende beweging van een vervormden vloeistofbol. Amst. Versl. en Meded. (3) V. 139-148.

Der Verfasser knüpft an die Untersuchungen von Rayleigh über die schwingende Bewegung einer Flüssigkeitskugel an, welche eine unendlich kleine Formänderung erfahren hat und der Wirkung der Molecularkräfte überlassen ist. Während hierbei die Formänderung symmetrisch ist in Bezug auf eine Mittellinie, zeigt er weiter, dass die Auflösung des allgemeineren Falles einer willkürlichen Störung wahrscheinlich zu demselben Ergebnis führt. Dieser Punkt wird hier näher untersucht. Der Verfasser nimmt an, dass die unzusammendrückbare Flüssigkeit frei von Wirbelbewegung ist, und also ein Geschwindigkeitspotential besitzt Die Gleichungen werden mittels Kugelfunctionen in Reihen entwickelt. Aus den erhaltenen Resultaten wird gefolgert, dass in der That bei einer willkürlichen Formänderung jeder Punkt der Kugeloberfläche eine zusammengesetzte schwingende Bewegung erhält, welche ebenso wie bei einer symmetrischen Formänderung in eine Reihe von einfachen schwingenden Bewegungen zerlegt werden kann, deren Schwingungsdauer bekannt ist. Auf diese Weise ist die Behauptung Rayleigh's bestätigt. G.

A. E. H. Love. On Dedekind's theorem concerning motion of a liquid ellipsoid under its own attract Phil. Mag. (5) XXV. 40-45.

Herrn Dedekind's Reciprocitätssatz und sein Ellipsoid b den Gegenstand der Forschung des gegenwärtigen Aufsa Eine Wiedergabe des Brioschi'schen Beweises für das Recip tätstheorem eröffnet ihn; dann folgen zwei Beweise für die Ellipsoid geforderten Bedingungen. Gbs. (Lp.)

A. E. H. Love. On the motion of a liquid elli cylinder under its own attraction. Quart. J. XXIII. 153-

Für die beiden Axen des Cylinderquerschnittes und die Coefficienten der Stromfunction, welche eine homogene quadrati Function der Coordinaten sind, und für die Geschwindigkeit, welcher sich die Axen drehen, hat man zunächst die Gleichu ab = const.; eine Gleichung erhält man aus der partiellen Di rentialgleichung für die Strömungsfunction. Zwei weitere Gl chungen fliessen aus der Bedingung, dass stets dieselben Teilc in der Oberfläche bleiben sollen; endlich die letzten beiden der Bedingung, dass der Druck in der Oberfläche constant i Diese sechs Differentialgleichungen mit der Zeit als unabhängig Veränderlichen werden dann integrirt, so weit sich diese In gration in geschlossener Form durchführen lässt. F. K.

A. E. H. Love. The oscillations of a mass of grav tating liquid in the form of on elliptic cylinder whic rotates as if rigid about its axis. Quart. Journ. XXII 158-165.

Bezeichnet man mit V_1 das Potential, mit ω die Rotation geschwindigkeit, mit p und ϱ wie gewöhnlich den Druck und di Dichtigkeit, so genügt die Function

$$\psi = V_1 - \frac{p}{\varrho} + \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

mit der Nebenbedingung, dass an der Oberfläche p constant sein soll. Setzen wir fest, dass die Bewegung aus einzelnen Gliedern, die mit e^{+int} multiplicirt sind, zusammengesetzt ist, so ist für einen einzelnen Bestandteil die Normalverschiebung

$$\lambda=\frac{1}{4\omega^2-n^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu}-\frac{2\omega}{n}i\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right),$$

wo die Ableitung sich auf Normale und Umgrenzung des Cylinders bezieht. Wird

$$U_1=V_1+\tfrac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

gesetzt, und u_0 derjenige Wert genannt, welchen dieser Ausdruck bei der stationären Bewegung hat, so ist

$$U_1=U_0+\lambda\frac{\partial U_0}{\partial\nu}+v',$$

wo v' das Potential der Oberflächenverteilung λ ist. Setzen wir

$$x+yi=\cosh(\eta+i\xi),$$

so kann gesetzt werden:

$$\psi=\Sigma(\alpha_m\cosh m\eta\cos m\xi+\beta_m\sinh m\eta\sin m\xi).$$

Der Verfasser entwickelt nun auch die übrigen Grössen in derselben Weise und erhält so schliesslich zwei homogene lineare Gleichungen für α_m und β_m. Dieselben geben dann, wenn η_0 der Wert von η an der Oberfläche ist, und

$$A=\frac{1}{4\pi}\cosh m\eta_0,\qquad A'=\frac{1}{4\pi}\sinh m\eta_0,$$

$$B=\sinh m\eta_0\left[m\frac{ab}{(a+b)^2}-e^{-m\eta_0}\cosh m\eta_0\right],$$

$$B'=\cosh m\eta_0\left[m\frac{ab}{(a+b)^2}-e^{-m\eta_0}\sinh m\eta_0\right]$$

gesetzt wird, für n die Gleichung

$$(4\omega^2-n^2)[n^4AA'-n^2(AB'+A'B+4\omega^2A.A')+BB'].$$

A und A' sind positiv; sollen nun die Wurzeln dieser Gleichung reell sein, so muss auch BB' positiv sein. Der Verfasser leitet hieraus weiter als Bedingung für die Stabilität der stationären

Bewegung die Bedingung

$$3b > a$$

ab. Es muss also die Excentricität $< \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0{,}9428$ sein.

F. K.

A. B. Basset. On the steady motion of an annular mass of rotating liquid. American J. XI. 172-181.

Zur Bestimmung der Lage eines Punktes in dem Querschnitt eines Ringes mit kreisförmiger Mittellinie bedient sich der Herr Verfasser gewisser Coordinaten ξ, η, welche mit den Cylindercoordinaten z, $v = \sqrt{x^2+y^2}$ durch die Gleichung verbunden sind:

$$z + iv = a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\xi + i\eta).$$

Für kreisförmigen Querschnitt wäre an der Oberfläche $e^{-\eta}$ constant $= b$; der Verfasser nimmt an, dass der Querschnitt sehr klein ist im Vergleich zum Radius der Ringöffnung und setzt dann die Gleichung der Oberfläche in der Form an:

$$e^{-\eta} = b(1 + \Sigma\beta_n \cos n\xi),$$

wo β_n unendlich klein von der Ordnung von b^n ist. Das Potential der Masse wird dann weiter nach den von Hicks eingeführten Toroidalfunctionen entwickelt, und zwar für äussere wie für innere Punkte. Die Constanten der Entwickelung ergeben sich daraus, dass beim Durchgang durch die Fläche V sich höchstens um eine Constante, $\frac{\partial V}{\partial n}$ gar nicht ändern kann. Aus der bekannten Oberflächenbedingung für das Gleichgewicht rotirender flüssiger Massen ergiebt sich dann bei der hier beobachteten Genauigkeit β_1, während sich aus der Bedingung, dass der Druck im Innern überall positiv sein soll, eine beschränkende Beziehung zwischen b und der Winkelgeschwindigkeit ableiten lässt.

F. K.

Lord Rayleigh. On the stability or instability of certain fluid motions. Lond. M. S. Proc. XIX. 67-74.

Eine von zwei Coordinaten abhängende Bewegung, welche in einem von zwei zur x-Axe parallelen Geraden begrenzten

Raum vor sich gehen kann, erhält man durch die Gleichungen

$$U = f(y), \quad V = 0.$$

Eine gestörte Bewegung $U + u$, v soll nun so angenommen werden, dass u und v proportional mit e^{ikx} und e^{int} sind. Dann gilt die Gleichung

$$\left(\frac{n}{k} + U\right)\left(\frac{d^2v}{dy^2} - k^2 v\right) - \frac{d^2U}{dy^2} v = 0.$$

Es soll nun in dem ganzen Gebiet $\frac{d^2U}{dy^2} = 0$ sein; es soll aber $\frac{dU}{dy}$ für zwei Werte von y unstetig werden und die Sprünge Δ_1 und Δ_2 erleiden, während U selbst stetig bleibt, so dass das ganze Gebiet in drei Gebiete zerfällt, in welchen einzeln betrachtet eine constante Vorticität herrscht.

Dann lautet die Differentialgleichung für v

$$\frac{d^2v}{dy^2} = k^2 v,$$

mit den Grenzbedingungen, dass an den festen Wänden, d. h. wenn $y = 0$, oder $y = b_1 + b' + b_2$ ist, $v = 0$ wird; während für die beiden Unstetigkeitsstellen $y = b_1$ und $y = b_1 + b'$ der Sprung von $\frac{\partial v}{\partial y}$ definirt ist durch die Gleichungen

$$\left(\frac{n}{k} + U\right)\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \Delta_1 . v \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{n}{k} + U\right)\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \Delta_2 . v.$$

Der Verfasser setzt in den drei Gebieten

$$v = v_1 = \sinh ky, \quad v = v_2 = v_1 + M_1 \sinh [k(y - b_1)],$$
$$v = v_3 + M_2 \sinh [k(y - b_1 - b')]$$

und erhält dann drei Nebenbedingungen, weil $v = 0$ wird für $y = 0$, nämlich

$$\sinh k(b_1 + b' + b_2) + M_1 \sinh k(b_2 + b') + M_2 \sinh kb_1 = 0,$$
$$(n + kU_1)M_1 - \Delta_1 \sinh kb_1 = 0,$$
$$(n + kU_2)M_2 - \Delta_2(M_1 \sinh kb' + \sinh k(b_1 + b')) = 0.$$

Damit diese Gleichungen sich nach M_1, M_2 auflösen lassen, muss zwischen den Coefficienten eine Gleichung bestehen, welche in n vom zweiten Grade wird. Die Stabilität fordert, dass die Dis-

criminante dieser Gleichung

$$B^2-AC = \{k(u_1-u_2)\sinh[k(b_2+b'+b_1)] \\ +\Delta_1\sinh kb_1\sinh k(b_2+b')-\Delta_2\sinh kb_2\sinh k(b_1+b')\}^2 \\ +4\Delta_1\Delta_2\sinh^2 kb_1\sinh^2 kb_1$$

positiv werde. Der Verfasser untersucht mehrere besondere Fälle nach dieser Hinsicht. F. K.

H. Hugoniot. Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini. (Seconde Partie.) Journ. de Math. (4) IV. 153-167.

In dem ersten Teil der Arbeit (F. d. M. XIX. 1887. 980) hatte der Verfasser die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung unter Benutzung der Euler'schen Differentialgleichungen abgeleitet, in dem vorliegenden zweiten Teile soll dieselbe Aufgabe gelöst werden unter Benutzung der Differentialgleichungen von Lagrange, welche bekanntlich die augenblicklichen Coordinaten eines Flüssigkeitsteilchens als Functionen der Zeit und des anfänglichen Ortes enthalten. Dann wird aber die Bedeutung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine doppeldeutige, und man wird daher gut thun, um Verwirrung zu vermeiden, beide genau zu präcisiren. Man kann die Fläche S aufsuchen, welche zur Anfangszeit alle diejenigen Teilchen enthält, die zur Zeit t auf der Trennungsfläche der beiden Bewegungen liegen. Nennt man dann dn das Stück, welches man auf der Normale im Zeitelement dt durchlaufen muss, um zu der Fläche für $t+dt$ zu gelangen, so kann man offenbar in einem gewissen Sinne $\frac{dn}{dt}$ als Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnen. Man kann aber auch $\frac{dn'}{dt}$ als Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnen, wenn dn' dasjenige Stück bezeichnet, welches man auf der Normale der augenblicklichen Trennungsfläche durchlaufen muss, um zu der für $t+dt$ zu gelangen. Bezeichnen nun x, y, z die anfänglichen Coordinaten, u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 die zur Zeit t in den beiden Gebieten, so gelten für die Differenzen $U=u_1-u_2$,

$V = v_1 - v_2$, $W = w_1 - w_2$ an der Fläche die Gleichungen

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0;$$

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0;$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Da nun diese Gleichungen für alle Punkte der Fläche S gelten, so hat man zunächst die Gleichungen

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}} = \frac{\mu}{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}},$$

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}} = \frac{\mu}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}},$$

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}} = \frac{\mu}{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}},$$

wo λ, μ, ν die Richtungscosinus der Normale von S sind. Ferner erhält man durch totale Differentiation nach t aus den genannten Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t}\right),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)$$

u. s. w.; aus ihnen folgt weiter

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Unter Benutzung der Differentialgleichungen erhält man dann die folgende Gleichung, in welcher θ die Determinante der Grössen u, v, w nach x, y, z ist:

$$\frac{1}{\lambda}\,\theta F'(p)\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left[\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\right]$$

$$+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left[\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\right]$$

$$+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left[\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\right]$$

und zwei andere, welche aus derselben hervorgehen, indem wir

links $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, λ durch $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, μ

resp. $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$, ν ersetzen. So erhält man schliesslich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem erst bezeichneten Sinne

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)^2=\frac{1}{\theta^2 F'(p)}\left[\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\right)^2\right.$$

$$+\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\right)^2$$

$$\left.+\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\right)^2\right].$$

Bezeichnet man nun mit λ', μ', ν' die Richtungscosinus der Normale von S', mit A, B, C die Ausdrücke

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}$$

u. s. w.; so gelten zunächst die Gleichungen

$$\frac{\lambda'}{A}=\frac{\mu'}{B}=\frac{\nu'}{C}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\lambda'A+\mu'B+\nu'C=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Es ergiebt sich dann weiter für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im zweiten Sinne der Ausdruck

$$\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2 = \frac{\theta^2\left(\frac{dn}{dt}\right)^2}{(\lambda' A+\mu' B+\nu' C)^2} = \frac{\theta^2\left(\frac{dn}{dt}\right)^2}{A^2+B^2+C^2} = \frac{1}{F'(p)} = \frac{dp}{d\varrho}$$

oder

$$\frac{dn'}{dt} = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}},$$

also genau derselbe Wert, wie er sich aus der ersten Abhandlung ergeben hatte. F. K.

K. Wagner. Ueber die Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit, welche begrenzt ist von zwei in gegebener Rotation befindlichen Flächen. Diss. Tübingen. 70 S. 8°.

J. Boussinesq. Complément à la théorie des déversoirs en mince paroi, qui s'étendent à toute la largeur du lit d'un cours d'eau: influence, sur le débit, des vitesses d'arrivée des filets fluides. C. R. CVII. 513-519, 538-543.

Im Jahre 1887 (vergl. F. d. M. XIX. 1006 ff.) hatte Hr. Boussinesq den Abfluss durch Oeffnungen in dünner Wand untersucht, unter der Annahme, dass an der Stelle stärkster Contraction die einzelnen Flüssigkeitsfäden denselben Krümmungsmittelpunkt haben. Dabei ist jedoch die kleine Geschwindigkeit unberücksichtigt geblieben, mit welcher die Flüssigkeit oberhalb der Abflussöffnung ankommt. Das erfordert eine Correctur des gewonnenen Resultates. Bezeichnet h die Druckhöhe, ε die Erhebung des am meisten contrahirten Querschnittes über der Kante der Wand, $n\varrho g(h-\varepsilon)$ einen gewissen Druck, k die Wurzel der Gleichung

$$\left[\frac{1}{k^2(1+n)}-1\right]^{-1} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\log k}+\frac{1}{1-k}\right),$$

ist ferner

$$m = [k\sqrt{1+n}-(k\sqrt{1+n})^3]\,\frac{\log k}{k-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^{\frac{3}{2}},$$

so hatte sich früher die Abflussmenge

$$q = mh\sqrt{2gh}$$

ergeben. Bei Rücksicht auf die mittlere Ankunftsgeschwindigkeit U ergiebt sich

$$q = h\sqrt{2gh}\, m\left(1 + \tfrac{3}{2}\nu \frac{U^2}{2gh}\right),$$

wo

$$\nu = \left(1 - \frac{\varepsilon}{h}\right)^{-1}(1+n)^{-1}$$

$$\cdot \left[\frac{2(1+n)(1+a)^2 + [1-3k^2(1+n)](1-2a)^2}{3[1-k^2(1+n)]} + \lambda a\right],$$

$$\lambda = \frac{-2}{\log k}\left[\frac{k}{1-k} + \frac{2}{\log k} + \frac{1+k}{2k^2\log k} + \frac{1-k^2}{(k\log k)^2}\right]$$

und endlich, wenn W_1 die Ankunftsgeschwindigkeit an der Oberfläche ist, $a = \frac{W_1}{U} - 1$. Ist H die Tiefe der ankommenden Schicht, so kann auch

$$q = m\left(1 + \tfrac{3}{2}\nu m^2 \frac{h^2}{H^2}\right) h\sqrt{2gh}$$

geschrieben werden. F. K.

U. Masoni. Su di una nuova formola proposta pel calcolo della portata nelle bocche a stramazzo. Nap. Rend. (2) II. 73-79.

Unter Benutzung des von Boussinesq zuerst angewandten Principes des gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunktes der Strömungslinien im contrahirten Querschnitt und des Princips des grössten Abflusses von Belanger, berechnet der Verfasser für die Abflussmenge den Wert

$$Q = 0{,}5216\,(1+k_0)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g}\,(H-\varepsilon)^{\frac{3}{2}},$$

wo

$$k_0 = \frac{u^2}{2g(H-\varepsilon)}$$

und u die Ankunftsgeschwindigkeit, H die Druckhöhe ist, und ε dieselbe Bedeutung wie bei Boussinesq hat. Bezeichnet $H+p$

die Tiefe des Wassers, so ist die zuströmende Wassermenge $u(H+p)$, und daraus ergiebt sich

$$k_0 = 0{,}272 \frac{(H-\varepsilon)^2}{(H+p)^2}.$$

Setzen wir jetzt

$$Q = mH\sqrt{2gH},$$

so erhalten wir

$$m = 0{,}5216 \left\{1 + \tfrac{3}{2}\, 0{,}272 \left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)^2 \frac{H^2}{(H+p)^2}\right\} \left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Nach Bazin ist $\frac{\varepsilon}{H} = 0{,}13$ und also

$$m = 0{,}423\left(1 + 0{,}31 \frac{H^2}{(H+p)^2}\right).$$

F. K.

H. Minkowski. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Berl. Ber. 1095-1110.

Bezieht man die Bewegung eines Körpers auf ein in dem Körper festes Coordinatensystem, so sind die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit p, q, r unabhängig von der Wahl des Coordinatenanfangspunktes, hingegen sind die Componenten der fortschreitenden Geschwindigkeit u, v, w eines Punktes abhängig von den Componenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ des Anfangspunktes, also abhängig von der Wahl dieses letzteren Punktes. Die Bewegung kann man sich entstanden denken durch eine impulsive Einzelkraft mit den Componenten $u = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{u}}$, $v = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{v}}$, $w = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{w}}$ und ein impulsives Kräftepaar mit den Componenten $\mathfrak{p} = \frac{\partial T}{\partial p}$, $\mathfrak{q} = \frac{\partial T}{\partial q}$, $\mathfrak{r} = \frac{\partial T}{\partial r}$. Von diesen sechs Grössen sind die drei ersten unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes. Drückt man nun die lebendige Kraft T durch die sechs Grössen u, v, w, p, q, r aus, so erhält man eine Darstellung, welche unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes ist, und welche ausserdem unmittelbar in zwei von nur je drei Grössen abhängende Bestandteile zerfällt:

$$T = E(u, v, w) + G(p, q, r).$$

Die Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sind solche linearen Functionen der s Grössen u, v, w, p, q, r, dass der Punkt mit den Coordin

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial q}-\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial r}\right),\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial r}-\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial p}\right),\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial p}-\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial q}\right)$$

eine von der Wahl des Anfangspunktes unabhängige Bedeu hat. Macht man ihn zum Coordinatenanfangspunkt, so we die Grössen

$$\mathfrak{u}-\frac{\partial E}{\partial u},\quad \mathfrak{v}-\frac{\partial E}{\partial v},\quad \mathfrak{w}-\frac{\partial E}{\partial w}$$

die Ableitungen einer homogenen quadratischen Func $-F(p, q, r)$ nach p, q, r, und die Grössen

$$\mathfrak{p}-\frac{\partial G}{\partial p},\quad \mathfrak{q}-\frac{\partial G}{\partial q},\quad \mathfrak{r}-\frac{\partial G}{\partial r}$$

stellen sich als die nach u, v, w genommenen Ableitungen $F(u, v, w)$ dar. Es zerfällt also nicht nur die lebendige Kraft, s dern die augenblickliche Bewegung in zwei Teile, nämlich ers in einen Teil, für welchen $p = q = r = 0$ ist, d. h. eine re Verschiebung mit den Componenten $\frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial E}{\partial v}, \frac{\partial E}{\partial w}$, und ei zweiten Teil, für welchen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ist, d. h. e Bewegung, deren Impuls ein impulsives Kräftepaar mit den Co ponenten $\frac{\partial G}{\partial p}, \frac{\partial G}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial r}$ ist.

Die letztbezeichnete Bewegung, sowie der zur erstbezeich neten Bewegung gehörende Impuls lassen sich leicht verfolg unter Einführung gewisser Linien. Es mögen ξ, η, ζ die Ri tungscosinus zweier Halbgeraden zu den im Körper festen Ax sein, welche durch die beiden Punkte

$$\pm\left(\zeta\frac{\partial F}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right),\quad \pm\left(\xi\frac{\partial F}{\partial\zeta}-\zeta\frac{\partial F}{\partial\xi}\right),\quad \pm\left(\eta\frac{\partial F}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)$$

gezogen sind; diese Geraden sollen der zur Richtung $\xi:\eta$ gehörende erste resp. zweite Radius des Körpers heissen. Durch das impulsive Kräftepaar entsteht dann eine Schraubenbewegun um den zur Richtung $p:q:r$ gehörenden Radius mit d Drehungsgeschwindigkeit $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ und der Steigu

$-\frac{2F(p, p, r)}{p^2+q^2+r^2}$. Ganz analog reducirt sich der Impuls der Verschiebungsgeschwindigkeit $\frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial E}{\partial v}, \frac{\partial E}{\partial w}$ auf eine impulsive Kraft längs dem zu der Richtung u, v, w gehörenden zweiten Radius und ein impulsives Kräftepaar $\frac{2F(u, v, w)}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$ um diesen Radius.

Der zweite Abschnitt der Arbeit beschäftigt sich mit den stationären Bewegungen, welche möglich sind, falls weder auf den Körper noch auf die Flüssigkeit äussere Kräfte wirken. Es ist wesentlich, dass unter der gemachten Voraussetzung bei jeder möglichen Bewegung die impulsive Einzelkraft sowohl als das in einer auf derselben senkrechten Ebene wirkende impulsive Kräftepaar in der räumlichen Lage und in der Intensität von der Zeit unabhängig sind, und dass auch die Arbeit des Impulses, also die kinetische Energie constant sind. Die Grösse des Impulses ist bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$u^2+v^2+w^2 = J^2,$$
$$u\mathfrak{p}+v\mathfrak{q}+w\mathfrak{r} = JJ_1.$$

Die stationären Bewegungen sind dadurch ausgezeichnet, dass bei gegebenem Impulse die erste Variation der kinetischen Energie verschwindet.

Im dritten Abschnitte drückt der Verfasser zunächst die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit durch die Componenten der impulsiven Einzelkraft und deren Ableitungen nach der Zeit aus. Da ferner $J^2 = u^2+v^2+w^2$ constant ist, so kann man u, v, w, p, q, r durch zwei Grössen e_1, e_2 und die Differentialquotienten nach der Zeit ausdrücken. In dem Zeitelement dt möge irgend ein fixirter Punkt (a, b, c) in Richtung der unveränderlichen Axe des Impulses den Weg

$$d\sigma = \frac{1}{J}\{u(\mathfrak{u}+cq-br)+v(\mathfrak{v}+ar-cp)+w(\mathfrak{w}+bp-aq)\}dt$$

und eine fixirte Richtung (α, β, γ) um diese Axe den Weg

$$d\sigma_1 = J\frac{up+vq+wr-(\alpha u+\beta v+\gamma w)(\alpha p+\beta q+\gamma r)}{(u^2+v^2+w^2)-(\alpha u+\beta v+\gamma w)^2}dt$$

zurücklegen.

Ferner drücke man mit Hülfe der Constanz der lebendigen Kraft

$$T = L$$

das Zeitdifferential durch die Differentiale von e_1, e_2 aus. Sind nun die Stellungen der unveränderlichen Axe, d. h. e_1, e_2, am Anfang und am Ende einer Periode bekannt, so ist der wirkliche Weg dadurch bestimmt, dass

$$\Psi = 2Lt - J\sigma - J_1\sigma_1$$

ein Minimum werden muss.

Dadurch ist nun aber nach bekannten Sätzen von Hamilton und Jacobi das Problem auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Variabeln reducirt. Ist von dieser eine Lösung bekannt, welche ausser einer additiven eine zweite willkürliche Constante M enthält, so erhält man die noch fehlenden Integrale durch blosse Differentiationen. Es sei Ψ die Differenz der Lösung für beliebige e_1, e_2 und für die constanten Anfangswerte e_1^0, e_2^0, so ist

$$\frac{\partial\Psi}{\partial L} = t, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial M} = 0,$$

$$\sigma_1 = -\frac{\partial\Psi}{\partial J_1}, \quad \sigma = \frac{1}{J}(-\Psi + 2Lt - J_1\sigma_1).$$

Hierdurch ist aber die Lage des Körpers bestimmt. Es bleiben dann also in jedem Falle noch die beiden Aufgaben zu lösen, erstens die Auffindung eines allgemeinen Integrals der partiellen Differentialgleichung, zweitens die Lösung des Umkehrproblems.

Zum Schluss der Abhandlung verweist der Verfasser auf die Beziehung seiner Resultate zu denen von Clebsch und Weber.

F. K.

G. H. Halphen. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. Journ. de Math. (4) IV. 5-81.

Der Verfasser schickt der Behandlung des durch den Titel bezeichneten Gegenstandes eine eingehende Untersuchung über die Darstellung der Rotation eines festen Körpers durch elliptische Functionen voraus. Er geht aus von der Thatsache, dass die Ausdrücke

$$\frac{\sigma(u-\omega_a)\,\sigma(v-\omega_a)}{\sigma(u)\,\sigma(v)}\,e^{\eta_a(u+v-\omega_a)},\quad C\,\frac{\sigma(u+v-\omega_a)\sigma(\omega_a)}{\sigma(u)\,\sigma(v)}\,e^{\eta_a(u+v-\omega_a)},$$
$$\frac{1}{C}\,\frac{\sigma(u-v-\omega_a)\sigma(\omega_a)}{\sigma(u)\,\sigma(v)}\,e^{\eta_a(u-v-\omega_a)}$$

die Eigenschaften haben, welche den Ausdrücken
$$\cos(az),\quad \cos(ax)+i\cos(ay),\quad \cos(ax)-i\cos(ay)$$
zukommen, wenn x, y, z drei auf einander senkrecht stehende Richtungen bezeichnen, a eine vierte Richtung. Legt man dem Index a seine drei Werte bei, so gelangt man zu drei Richtungen a, b, c, von denen zunächst nachgewiesen wird, dass sie senkrecht auf einander stehen, so dass die genannten Formeln dazu dienen, die Bewegung eines Coordinatensystemes gegen ein anderes zu bestimmen.

Der zweite Abschnitt ist rein analytisch und behandelt die Zerlegung von gewissen Summen in Producte. Dieselben gelangen zur Anwendung im III. Abschnitt, welcher von der Zusammensetzung zweier der eben bezeichneten Bewegungen handelt, d. h. von der gegenseitigen Bewegung zweier Coordinatensysteme, die sich gegen ein drittes in der eben bezeichneten Weise bewegen. Im Abschnitt IV. wird der Nachweis geführt, dass durch die bezeichneten Formeln, wenn u eine lineare Function der Zeit ist, eine Poinsot'sche Bewegung dargestellt wird, d. h. eine Bewegung, welche durch das Rollen einer Ebene auf einer Fläche zweiter Ordnung repräsentirt werden kann, die gezwungen ist, in einem constanten Abstande von dem Mittelpunkte der Fläche zu bleiben. Der V. Abschnitt definirt den Begriff der Concordanz zweier Poinsot'schen Bewegungen. Der Abschnitt VI. behandelt eine Form der Umkehrung elliptischer Integrale.

Nach diesen Vorbereitungen gelangt der Verfasser im VII. Abschnitt zu seinem eigentlichen Probleme. Es werden die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen angegeben, und zwar in der Form, welche Clebsch ihnen gegeben hat, indem er die Componenten der impulsiven Einzelkraft und des impulsiven Kräftepaares als abhängige Veränderliche einführte; die drei allgemeinen Integrale werden angeführt. In dem Falle, welchen der

Verfasser weiter behandelt, nämlich wenn $2T$ die Form
$p(x_1^2+x_2^2)+p'x_3^2+2q(x_1y_1+x_2y_2)+2q'x_3y_3+r(y_1^2+y_2^2)+r'y_3^2$
hat, existirt, wie Clebsch nachgewiesen hat, ein viertes algebraisches Integral $y_3 = \text{const.}$ In Folge dessen lässt sich mit Hülfe des Theorems vom letzten Multiplicator die Auffindung der beiden noch fehlenden Integrale auf Quadraturen zurückführen. Zunächst lässt sich $\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2$ als ganze Function vierten Grades von x_3 darstellen, so dass das vorliegende Problem auf elliptische Functionen führt. Die Grössen $x_1 \pm ix_2$ fordern eine Quadratur, weil ja $x_1^2+x_2^2$ sich ohne Quadratur aus dem Integral

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = \text{const.}$$

berechnen lässt. Ferner lassen sich aus dem Integral der lebendigen Kraft und aus $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = \text{const.}$ y_1+iy_2, y_1-iy_2 ohne weitere Quadratur bestimmen. Indem die Axe des Impulses zur z-Axe im Raume genommen wird, erhält man zunächst die Richtungscosinus der im Körper festen Axen zu der letzteren, und daraus dann nach kurzer Rechnung die Richtungscosinus der Hauptaxe des Körpers gegen die beiden anderen im Raume festen Axen. Zwei von den Coordinaten des in dem Körper festen Anfangspunktes sind ohne Quadratur zu finden, die dritte führt auf Integrale zweiter Gattung. Eine erste Betrachtung der gewonnenen Formeln führt auf das Resultat, dass die Bewegung zusammengesetzt werden kann aus:

1) einer Schraubenbewegung um die Axe des Impulses,
2) einer Rotation um die Axe des Körpers und
3) einer periodischen Bewegung.

Es werden nun zunächst die Constanten discutirt, namentlich die Elemente der elliptischen Darstellung durch die gegebenen Constanten ausgedrückt.

Ein Vergleich der Formeln für die Richtungscosinus mit denjenigen, welche für die Zusammensetzung der Bewegung zweier Poinsot'schen Bewegungen aufgestellt sind, führt nun zunächst zu einer Zerlegung der in Frage stehenden Bewegung in zwei einfachere, von denen die eine direct eine Poinsot'sche ist, während die andere sich zerfällen lässt in eine Poinsot'sche Be-

wegung und in eine Rotation um eine Axe. So gelangt der Verfasser zu dem folgenden bemerkenswerten Theorem:

„Beschreiben zwei Axensysteme X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 um die gemeinschaftlichen Symmetrieaxen zweier Flächen zweiter Ordnung in Concordanz befindliche Poinsot'sche Bewegungen, dreht sich ferner ein drittes System von Axen A, B, C, dessen dritte Axe stets mit der Z_1-Axe zusammenfällt, um die letztere mit der Geschwindigkeit

$$\frac{d\psi}{dt} = M \cos(Z_1 Z),$$

so stellt bei passender Wahl der Constanten M die relative Bewegung von A, B, C gegen X, Y, Z die Rotation des festen Körpers bei der Bewegung in der Flüssigkeit dar. Ist der Körper ein Rotationskörper, so wird $M = 0$ und die Bewegung zerfällt dann nur in zwei Poinsot'sche Bewegungen."

F. K.

F. Kötter. Beitrag zur Lehre von der Bewegung eines festen Körpers in einer incompressiblen Flüssigkeit. Hoppe Arch. (2) VI. 157-167.

Der Verfasser dehnt einige der Resultate, die Dirichlet für eine in einer incompressiblen Flüssigkeit sich bewegende, homogene Kugel gefunden hat, auf den Fall aus, in dem die Massenverteilung der Kugel nicht mehr homogen ist. An Stelle der Kugel kann zugleich ein beliebiger Körper treten, der zwei sich schneidende Symmetrieaxen besitzt, in denen sich je zwei Paare von Symmetrieebenen unter rechtem Winkel schneiden, d. h. ein Körper, der den hydrodynamischen Charakter der Kugel hat.

Die Untersuchung, die zu mehreren interessanten Resultaten führt, stützt sich auf die von Kirchhoff für die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit aufgestellten Gleichungen [Journ. für Math. LXXI, F. d. M. II. 1869-1870. 731; vergl. auch Kirchhoff, Mechanik, Vorlesung 19, und Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen, p. 376]. Sind u, v, w die Geschwindigkeiten, welche der Anfangspunkt eines im Körper festen rechtwinkligen Coordinatensystems parallel diesen Axen besitzt, p, q, r die Drehungs-

geschwindigkeiten des Körpers um diese Axen, so muss der Teil der lebendigen Kraft, welcher von der Flüssigkeit herrührt, die Form haben:

$$\tfrac{1}{2}\{M'(u^2+v^2+w^2)+L(p^2+q^2+r^2)\}.$$

Daraus ergiebt sich, dass der Einfluss der Flüssigkeit auf die Bewegung des festen Körpers derselbe ist, als wäre mit dem Körper eine Masse M' verbunden, deren Schwerpunkt der Kugelmittelpunkt und deren drei Trägheitsmomente gleich L sind. Führt man diese fictive Masse M', die als mitgeführte Masse bezeichnet wird, an Stelle der Flüssigkeit ein, wählt dann den Schwerpunkt S der so erhaltenen Gesamtmasse zum Anfangspunkt des im Körper festen Systems, die Hauptträgheitsaxen dieses Punktes zu Coordinatenaxen, so nimmt die lebendige Kraft des ganzen Systems die Form an

$$T=\tfrac{1}{2}\{(M+M')(u^2+v^2+w^2)+P_1p^2+Q_1q^2+R_1r^2\}.$$

Aus dieser Form von T folgt, wenn man zu einem im Raume festen Axensystem übergeht, folgendes Resultat: „Bei der Bewegung eines festen Körpers, dessen Gestalt den hydrodynamischen Charakter einer Kugel hat, in einer incompressiblen, reibungslosen unendlichen Flüssigkeit beschreibt ein gewisser zwischen seinem Mittelpunkt und seinem Schwerpunkt gelegener Punkt (der obige Punkt S) dieselbe Bahn, welche der Schwerpunkt eines aus der eignen und der mitgeführten Masse gebildeten Körpers unter Einfluss derselben äusseren Kräfte im leeren Raume beschreiben würde“. Dies Resultat wird auf die Fälle angewandt, wo keine äussere Kraft wirkt, oder wo allein die Schwere wirkt; im letzteren Falle wird durch das Vorhandensein der Flüssigkeit nur die Constante der Beschleunigung verringert. In den beiden genannten speciellen Fällen wird auch die zu der fortschreitenden Bewegung hinzukommende Rotation des Körpers discutirt. Wirken keine Kräfte, so erfolgt die Rotation ebenso wie im leeren Raume. In einer schweren Flüssigkeit dagegen rotirt der Körper in derselben Weise wie im leeren Raume ein gewisser schwerer Körper rotiren würde, von welchem ein vom Schwerpunkt verschiedener Punkt befestigt ist.

Wn.

A. M. Liapunow. Ueber constante Schraubenbewegungen eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. Chark. Ges. (2) I. 7-60. (Russisch.)

Der Verfasser beschäftigt sich mit der Lösung der Frage über die Stabilität der constanten Schraubenbewegungen eines starren Körpers in einer Flüssigkeit, d. h. solcher Bewegungen, wo die Axe der Schraube unbeweglich, die Winkelgeschwindigkeit und der Schraubengang constant sind.

Ueber die Flüssigkeit werden hier dieselben Annahmen gemacht, wie von Kirchhoff bei der Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers in einer unbegrenzten Flüssigkeit; ausserdem wird angenommen, dass sowohl auf den Körper, als auf die Flüssigkeit keine Kräfte wirken.

Alle constanten Schraubenbewegungen eines starren Körpers in einer Flüssigkeit werden durch Lösung der Aufgabe über das Maximum oder Minimum der lebendigen Kraft der Bewegung des starren Körpers und der Flüssigkeit erhalten, vorausgesetzt, dass entweder die Winkelgeschwindigkeit und der Schraubengang bekannt, oder dass die Werte des Vectors und des kleinsten Moments der die Bewegung hervorbringenden Impulse gegeben sind. Demnach entsprechen jedem bestimmten Werte (λ) des Verhältnisses der Winkelgeschwindigkeit zum Vector der Impulse zwei Gruppen von Schraubenbewegungen: in einer derselben haben die Winkelgeschwindigkeit und der Vector eine Richtung, in der anderen eine entgegengesetzte.

Im allgemeinen Falle enthält jede Gruppe drei Bewegungen, deren Axen zu einander senkrecht sind. Diese drei Bewegungen entsprechen den drei Wurzeln der kubischen Gleichung in μ:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} A_{11}-\mu, & A_{12}, & A_{13} \\ A_{12}, & A_{22}-\mu, & A_{23} \\ A_{13}, & A_{23}, & A_{33}-\mu \end{vmatrix} = 0,$$

wo die Coefficienten A in bestimmter Weise aus λ und den Coefficienten im Ausdrucke T der lebendigen Kraft der Bewegung des starren Körpers und der Flüssigkeit gebildet sind.

Indem der Verfasser auf die in Frage stehenden Bewegungen den Satz von Routh in: „The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies“ (4th ed. 1884. p. 52, 53) anwendet, gelangt er zu folgenden Schlüssen:

Von den drei constanten Schraubenbewegungen, welche bei gegebenem Werte von λ ein in einer Flüssigkeit sich bewegender starrer Körper haben kann (die Wurzeln der Gleichung (1) verschieden vorausgesetzt), macht die der kleinsten Wurzel μ der Gleichung (1) entsprechende Bewegung T zu einem absoluten Minimum bei bekannten Werten des Hauptvectors h und des kleinsten Moments f der Impulse, und die Bewegung ist unbedingt stabil für alle möglichen Störungen; die Bewegung, welche der mittleren Wurzel der Gleichung (1) entspricht, kann T unter gewissen Bedingungen bei bekanntem h und f auch in ein Minimum verwandeln, doch nur in ein relatives, und die Bewegung ist zugleich unbedingt stabil für alle Verrückungen, so lange sie nicht in den Grenzfall übergeht (d. h. den, wo zwei oder drei Wurzeln der Gleichung (1) gleich werden) für Bewegungen, die T in ein Minimum verwandeln; die der grössten Wurzel der Gleichung (1) entsprechende Bewegung kann T nie zum Minimum machen.

Ist aber die kleinste Wurzel der Gleichung (1) der mittleren gleich, und entsprechen dazu jedem Werte von $\frac{f^2}{h^2}$, welcher zwischen bestimmten Grenzen liegt, nur zwei Bewegungen, so verwandelt jede von ihnen T unter denselben Bedingungen in ein absolutes Minimum, und die Bewegung ist unbedingt stabil für jede Störung.

Zum Zwecke einer vollständigeren Lösung der Frage über die Stabilität der constanten Bewegungen eines Körpers in einer Flüssigkeit bildet der Verfasser dann die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung, und indem er sich mit der ersten Annäherung begnügt, erlangt er ausser den vorigen, die Stabilität betreffenden Resultaten noch die folgenden: Die der grössten Wurzel von (1) entsprechende Bewegung ist stabil bei genügend grossem Werte von λ^2, dagegen ist die der mittleren Wurzel

entsprechende Bewegung bei genügend grossem Werte von λ^2 labil; die Bewegung, welche folgt, wenn die grösste und die mittlere Wurzel gleich sind, ist im allgemeinen labil.

In der Abhandlung werden auch einige Specialfälle discutirt.

Ms.

A. B. BASSET. On the motion of a sphere in a viscous liquid. Lond. Phil. Trans. CLXXIX. 43-64.

Der Verf. bezieht sich auf den Aufsatz von Stokes (1850) „On the effect of the internal friction of fluids on pendulums" und auf spätere Untersuchungen von Meyer, Overbeck, v. Helmholtz und Piotrowski, sowie von Stearn. Er stellt sich die Aufgabe, die Lösung für eine Kugel zu finden, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegt, und zwar in den folgenden Fällen: 1) wenn die Kugel sich geradlinig unter der Einwirkung einer constanten Kraft wie der Schwere bewegt; 2) wenn die Kugel von einer zähen Flüssigkeit umgeben ist, um einen festen Durchmesser in Umdrehung gesetzt wird und dann sich selbst überlassen bleibt. Während der ganzen Untersuchung werden Glieder mit den Quadraten und Producten der Geschwindigkeiten vernachlässigt.

Cly. (Lp.)

A. E. H. LOVE. The motion of a solid in a liquid when the impulses reduce to a couple. Cambr. Proc. VI. 270-281.

Vergl. Halphen, Sur le mouvement d'un solide dans un liquide, (oben S. 996) und Halphen, Traité des fonctions elliptiques. T. II. Chap. 4.

St.

L. FENNEL. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer tropfbaren Flüssigkeit. Diss. Marburg. 43 S. Pr. Städt. Realsch. zu Cassel.

Bekanntlich lassen sich die sämtlichen Integrale der sechs Kirchhoff'schen Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitscomponenten eines in einer incompressibeln Flüssigkeit beweg-

lichen Körpers finden, sobald man ausser den drei allgemeinen Integralen irgend ein viertes von t freies Integral kennt. Ein solches existirt nach Clebsch, wenn die lebendige Kraft des ganzen Systems auf die Form

$$2T = A_1u^2 + B_1v^2 + C_1w^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

gebracht werden kann, vorausgesetzt, dass zwischen den sechs Coefficienten die Relation

$$AA_1(C_1 - B_1) + BB_1(A_1 - C_1) + CC_1(B_1 - A_1) = 0$$

besteht. Schon Clebsch hat das betreffende Integral aufgestellt, aber die Darstellung der in Betracht kommenden Grössen als Functionen der Zeit nicht unternommen. Unter der beschränkenden Annahme, dass eine Integrationsconstante, nämlich der Wert des Ausdrucks

$$\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r}$$

gleich Null ist, hat Herr Weber sämtliche Componenten der Geschwindigkeit sowie die neun Richtungscosinus durch Thetaquotienten dargestellt, deren beide Argumente lineare Functionen der Zeit sind. Diese Quotienten lassen sich natürlich auch als hyperelliptische Functionen eines Grössenpaares darstellen, welches dann die oberen Grenzen für die hyperelliptischen Integrale liefert, deren Summe je einer der linearen Functionen der Zeit gleich wird. Bezeichnet man mit μ und ν zwei willkürliche Constanten, mit δ_1, δ_2, δ_3 die Ausdrücke

$$\frac{\mu}{A} + \nu, \quad \frac{\mu}{B} + \nu, \quad \frac{\mu}{C} + \nu,$$

so sind diese oberen Grenzen bestimmt als Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\alpha_1^2}{x - \delta_1} + \frac{\alpha_2^2}{x - \delta_2} + \frac{\alpha_3^2}{x - \delta_3} = 0.$$

Bezeichnen l, m, n gewisse Integrationsconstanten, deren Summe gleich 1 ist, so erhält man die beiden Stellen δ_4, δ_5, an welchen der Radicand jener hyperelliptischen Integrale ausser für δ_1, δ_2, δ_3 verschwindet, durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{l}{\delta - \delta_1} + \frac{m}{\delta - \delta_2} + \frac{n}{\delta - \delta_3} = 0.$$

Und zwar muss, damit die Grössen p, q, r reell sein können, zwischen den Grössen x und δ_4, δ_5 folgendes Verhältnis stattfinden:

$$x_1 < \delta_4 < x_2 < \delta_5.$$

Es ergeben sich also im ganzen vier Fälle:

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & \delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3, \\ \text{II.} & \delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5, \\ \text{III.} & \delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 < x_2 < \delta_5 < \delta_3, \\ \text{IV.} & \delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 < x_2 < \delta_3 < \delta_5. \end{array}$$

Wenn jetzt zwei der Grössen δ einander gleich werden, verwandeln sich die hyperelliptischen Integrale in elliptische, und die Thetareihen mit zwei Argumenten verwandeln sich in einfach unendliche Thetareihen. Sehen wir von dem Falle ab, dass δ_2 einer der Grössen δ_1 und δ_3 gleich wird, und der Körper den Charakter eines Rotationskörpers annimmt, so sind hier zwei Gruppen von Fällen zu unterscheiden, nämlich solche, wo die Gleichheit zweier δ die Constanz eines x mit sich führt, und solche, bei denen das nicht der Fall ist. Die erste Gruppe umfasst vier, die andere fünf Fälle. Auf Grund der Beziehungen, welche Rosenhain im ersten Capitel seiner berühmten Abhandlung über vierfach periodische Functionen mitgeteilt hat, führt der Verfasser die Rechnung in allen neun Fällen vollständig durch. In den vier ersterwähnten Fällen bleibt die Richtung einer der Hauptaxen des Körpers stets dieselbe, sie ist beständig die Rotationsaxe, und die fortschreitende Bewegung erfolgt senkrecht zu dieser Richtung. Die Richtungscosinus und die Componenten der Geschwindigkeit stellen elliptische Functionen dar, deren Argument von der Zeit linear abhängt; die Coordinaten des Anfangspunktes des in dem Körper festen Systems werden durch ein Integral zweiter Gattung bestimmt. In den fünf anderen Fällen treten ausser einfach unendlichen Thetareihen noch Exponential-, resp. trigonometrische Functionen auf, deren Argumente ebenfalls lineare Functionen der Zeit sind.

F. K.

B. PALADINI. Sul movimento di rotazione che pre[...] nel vuoto od in un fluido incompressibile un co[...] a forze di potenziale $H_1 \cos^2\theta + H_2 \cos\theta$. Rom. Acc. Rend. IV$_1$. 187-196.

Die Rotation eines schweren Körpers um einen festen Pu[...] ist bekanntlich stets dann auf Quadraturen zurückzuführen, we[...] das Potential V der wirkenden Kräfte nur von dem Win[...] abhängt, welchen die Rotationsaxe mit einer festen Richtung [...] Raume bildet. Die bezüglichen Gleichungen für die Zeit t [...] die beiden Euler'schen Winkel φ und ψ lauten, wenn $\omega =$ c[...] gesetzt wird:

$$t - t_0 = A\int \frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}, \qquad \psi - \psi_0 = \int \frac{(Cr_0\omega - g)d\omega}{\sqrt{F(\omega)}},$$

$$\varphi - \varphi_0 = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right)(t - t_0) - \int \frac{(Cr_0 - g\omega)\,d\omega}{\sqrt{F(\omega)}},$$

und zwar bedeuten A, A, C die Hauptträgheitsmomente, h u[...] g die Constanten der lebendigen Kraft und des Flächensatze[...] r_0 die Componente der Rotationsgeschwindigkeit um die A[...] des Körpers, und endlich $F(\omega)$ die Function

$$(2A(V+h) - ACr_0^2)(1-\omega^2) - (Cr_0\omega - g)^2.$$

Ist

$$V = \frac{H_1\cos^4\theta + H_2\cos^3\theta + H_3\cos^2\theta + H_4\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

so führt das Problem ersichtlich auf elliptische Integrale. D[...] Verfasser drückt nun die Winkel φ und ψ durch ϑ-Functione[...] aus, deren Argument eine lineare Function der Zeit ist. Fü[...] den Fall $H_3 = -H_1$, $H_4 = -H_2$ vereinfacht sich der Ausdruck von V auf die Form

$$V = +(H'_1\cos^2\theta + H'_2\cos\theta).$$

Unter dieser Voraussetzung stellt der Verfasser die neun Richtungscosinus durch die Functionen Θ, Θ_1, H, H_1 dar und gewinnt dabei das folgende bemerkenswerte Theorem. Die Bewegung des Körpers kann ersetzt werden durch das Rollen eines mit ihm coaxialen Kegels auf einer Rotationsfläche, welche die durch den Aufhängungspunkt gehende feste Richtung zur Axe

hat. Die Fläche ist ein Ellipsoid, ein Paraboloid oder ein einschaliges Hyperboloid, je nachdem r_0 grösser, gleich oder kleiner als $\frac{\sqrt{2AH'_1}}{A-C}$ ist. Die Basiscurve des Kegels im Abstande r_0 von A hat die Gleichung

$$\varrho^2 = \frac{2}{A}(H'_1\cos^2\theta + H'_2\cos\theta + h - \tfrac{1}{2}Cr_0^2),$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + r_0(t_0 - t) + \int \frac{Cr_0(Cr_0^2-2h) - H'_2 g - (2H'_1 g + r_0 CH'_2)\omega}{2H'_1\omega^2 + 2H'_2\omega + 2H - Cr_0^2} \frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}.$$

Dass die Bewegung des Körpers in einer Flüssigkeit im wesentlichen identisch ist mit der im leeren Raume, kann man leichter ableiten als der Herr Verfasser, wenn man die Ueberlegung benutzt, dass die lebendige Kraft der Flüssigkeit offenbar auch die Form

$$A'(p^2+q^2) + C'r^2$$

haben muss, und dass also der Einfluss der Flüssigkeit lediglich in einer Modification der Grössen A und C bestehen kann.

F. K.

E. Gerlach. Zur Theorie des Segelns. Pr. (No. 99) Luisenstädt. Oberrealschule Berlin. 32 S. u. 1 Taf. 4°.

Anlass zur Verfassung der vorliegenden Arbeit war die Frage, ob es möglich sei, segelnd eine grössere Geschwindigkeit als die des treibenden Windes zu erreichen. Der Verfasser legt seinen Berechnungen die Vorstellung zu Grunde, dass der Druck von Flüssigkeiten gegen feste Wände, entsprechend den Untersuchungen von Lord Rayleigh und Kirchhoff, durch die Formel

$$N = \frac{\zeta_1\gamma_1 F_1}{2g}\,\frac{(4+\pi)\cos\vartheta}{4+\pi\cos\vartheta}\,w^2$$

gegeben werde, wo w die relative Geschwindigkeit, ϑ die Richtung des Stromes gegen die Normale, F_1 die getroffene Fläche, γ_1 das Gewicht des Kubikmeters der Flüssigkeit, ζ_1 eine Constante bedeutet. Diese Formel wendet der Verfasser zur Berechnung des Winddruckes auf das Segel eines Schiffes an. Bildet die Fahrtrichtung mit der Kielrichtung den Winkel α, so setzt er ferner den Widerstand des Wassers in Richtung des

Kieles $Kv^2\cos\alpha$ und in Richtung senkrecht zur Breite $K_2v^2\sin\alpha$. Ferner wird mit γ der Winkel zwischen dem wahren Wind und der Fahrtrichtung bezeichnet, der Winkel zwischen der letzteren und dem scheinbaren Wind mit β; endlich mit δ der Winkel zwischen der Segelnormale und der Schiffsrichtung. Dann bestehen zwischen der Schiffsgeschwindigkeit v, der wahren Windgeschwindigkeit a und der scheinbaren Windgeschwindigkeit w die rein geometrischen Gleichungen

$$\frac{v}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{w}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\beta};$$

ferner erkennt man, dass

$$(9) \qquad \alpha+\beta = \delta+\vartheta.$$

Setzt man

$$\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\zeta_1\gamma_1F_1}{2g}:K = \varkappa \quad \text{und} \quad K_2:K = \lambda,$$

so erhält man aus dem Gleichgewicht der Kräfte folgende Gleichungen:

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\delta = \lambda\operatorname{tg}\alpha,$$

$$(6) \qquad \cos\alpha\sin^2(\beta-\gamma) = \varkappa\,\sin\gamma\cos\delta\cos\vartheta:\left(1+\frac{\pi}{4}\cos\vartheta\right).$$

Endlich ergiebt sich für das Verhältnis der Geschwindigkeit des Schiffes zu derjenigen des Windes

$$r = \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta}.$$

Die Frage, um welche es sich handelt, ist nun die, bei welcher Segelstellung ist für gegebene Fahrt- und Windrichtung r ein Maximum; dies kommt darauf hinaus, β bei gegebenem γ zu einem Maximum zu machen. Wird von der Abtrift abgesehen, ferner ein vereinfachtes Widerstandsgesetz zu Grunde gelegt, so vereinfachen sich die Gleichungen, falls $\dfrac{\varkappa}{1+\frac{\pi}{4}} = k^2$ gesetzt wird, folgendermassen:

$$(6') \qquad \sin^2(\beta-\gamma) = k^2\sin^2\gamma\cos\delta\cos\vartheta,$$

$$(9') \qquad \beta = \delta+\vartheta.$$

Dann wird

$$\frac{d\beta}{d\delta} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta-\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\vartheta+2\operatorname{ctg}(\beta-\gamma)}.$$

Damit ein Maximum eintrete, muss also werden

$$\delta = \vartheta, \quad \beta = 2\delta.$$

Endlich erhalten wir aus (6') die Gleichung

$$(11) \qquad \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}2\delta + \tfrac{1}{2}k \operatorname{cosec}\delta.$$

Die Schiffsgeschwindigkeit wird

$$r = \tfrac{1}{2}k \frac{\sin\gamma}{\sin\delta},$$

oder wenn $\cos\delta = x$ gesetzt wird:

$$r = \frac{kx}{\sqrt{1-2kx+k^2x^2+4kx^2}}.$$

Im Anschluss an diese Gleichung untersucht der Verfasser die Frage, ob r den Wert 1 erreichen könne, und findet, dass der hierzu erforderliche Wert $k^2 = 3\tfrac{5}{8}$ bei weitem nicht erreicht wird. Weiter wird die Frage untersucht, in welcher Art man am besten kreuzt, um ein Ziel möglichst schnell zu erreichen; es ergiebt sich, dass dieses nur nach zwei festen, dem Schiffe eigentümlichen Hauptkreuzungsrichtungen geschehen kann, so dass von dem Ziele nur die Länge der auf die einzelnen Richtungen entfallenden Weglängen abhängt.

Im weiteren Verlauf löst der Verfasser dieselbe Aufgabe unter Berücksichtigung der Abtrift (α) und des genaueren Luftdruckgesetzes. Es ergiebt sich, dass die günstigste Lage der Segelnormale erheblich näher am Kiele liegt, als sich bei der Annäherung ergeben hatte. Ein Vergleich der Theorie mit der Erfahrung bildet den Schluss der Abhandlung. F. K.

Legler. Zur Theorie der Stabschwimmer mit Nutzanwendung auf die Wassermessungen beim Rheinfall 1887. Schweiz. Bauztg. XI. 70-71, 152-154.

J. Amsler-Laffon. Zur Theorie der Stabschwimmer. Ebenda 92-94.

Vorausgesetzt wird bei der hier vorgetragenen Theorie, dass die Geschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von der Tiefe x durch die parabolische Formel

$$v = v_0 - kx^2$$

bestimmt sei. Die Tiefe t_1 der mittleren Geschwindigkeit ist mit der ganzen Tiefe t verbunden durch die Formel

$$t_1 = \frac{t}{\sqrt{3}} = 0{,}577\,t.$$

Der Stabschwimmer hat eine zwischen der grössten und der kleinsten Geschwindigkeit des Stromes liegende mittlere Geschwindigkeit. Dieselbe ist dadurch bestimmt, dass der Antrieb der oberen Schichten gleich dem Widerstand der unteren sein muss. Wir erhalten diese Tiefe h aus der Formel:

$$\int_0^h (v-v_h)^2 dx = \int_h^t (v_h-v)^2 dx$$

oder

$$\int_0^h (h^2-x^2)^2 dx = \int_h^t (x^2-h^2)^2 dx.$$

Sie liefert die Gleichung

$$t^5-\tfrac{10}{3}h^2t^3+5h^4t-\tfrac{16}{3}h^5 = 0,$$

deren Wurzel

$$h = 0,\ 610t$$

ist. (Legler findet in Folge eines Rechenfehlers $0{,}567t$). Durch v_0 und v_h ausgedrückt, erhält man

$$v = v_0\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)+v_h\frac{x^2}{h^2}.$$

Nun hat der eingetauchte Stab nicht die volle Länge der Tiefe T, sondern ist nur ein Bruchteil α der letzteren. Daher hat man

$$h = 0,\ 610\alpha T.$$

Die mittlere Geschwindigkeit gehört zur Tiefe $\frac{T}{\sqrt{3}}$, und also ist

$$v_m = v_0\left(1-\frac{1}{3.0,\ 610^2\alpha^2}\right)+v_h\frac{1}{3.0,\ 610^2\alpha^2}.$$

Für $\alpha = 0{,}85$ giebt das

$$v_m = v_h 1{,}240-v_0\,0{,}240.$$

F. K.

G. Tolkmitt. Ueber das Zuschlagen der Schleusenthore im strömenden Wasser. Z. f. Bauwesen. XXXVIII. 410-423.

Wenn eine Platte, die senkrecht zur Richtung eines Stromes von der Geschwindigkeit v steht, um eine verticale Axe mit der Winkelgeschwindigkeit ω gedreht wird, so wird der Druck in der Entfernung x von der Axe $k(v-x\omega)^2$, und zwar ist der Druck im Sinne der Drehrichtung oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem ωx kleiner oder grösser als v ist. Ist die Breite der Thüre l, so ergiebt sich, wenn $\frac{l\omega}{v} = u$ gesetzt wird, für das Moment dieses Druckes

$$M = kv^2Fl(\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}u+\tfrac{1}{4}u^2) \text{ oder } kv^2Fl\{\tfrac{1}{6}\left(\frac{1}{u}\right)^2-\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}u-\tfrac{1}{4}u^2\},$$

je nachdem $u \leqq$ oder > 1 ist. Wirken keine anderen Kräfte als der Stoss des Wassers, so erhält man zur Bestimmung der Bewegung des Schleusenthores die Gleichung (T = Trägheitsmoment):

$$T\frac{d\omega}{dt} = M.$$

Die weiteren Folgerungen aus dieser Gleichung bieten um so weniger Interesse, als Herr Tolkmitt ihre Gültigkeit auch für andere Lagen als für die zur Stromrichtung senkrechte anzunehmen scheint. Die Verdeutschung des Begriffs relative Geschwindigkeit durch vergleichsweise Geschwindigkeit scheint uns sehr unglücklich gewählt zu sein. F. K.

Bernardi. Sopra un curioso problema di idrodinamica pratica. Ven. Ist. Atti. (6) VI. 1309-1348.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der sogenannten Ausflussreaction, d. h. mit denjenigen Kräften, welche auf ein Gefäss ausgeübt werden, wenn Flüssigkeit in dasselbe ein- oder ausströmt. Es möge in der Zeiteinheit die Masse m an einer Stelle x_0, y_0, z_0 mit den Geschwindigkeitscomponenten u_0, v_0, w_0 eintreten, und an einer anderen Stelle x_1, y_1, z_1 mit den Componenten u_1, v_1, w_1 das Gefäss verlassen. Wirken dann keine anderen Kräfte auf die Flüssigkeit als diejenigen, welche der feste Körper auf dieselbe ausübt, so sind die auf den festen Körper ausge-

übten Kräfte

$$f_x = -m(u_1-u_0),\quad f_y = -m(v_1-v_0),\quad f_z = -m(w_1-w_0)$$

und die Momente

$$G_x = -m(y_1 w_1 - z_1 v_1 - y_0 w_0 + z_0 v_0),$$
$$G_y = -m(z_1 u_1 - x_1 w_1 - z_0 u_0 + x_0 w_0),$$
$$G_z = -m(x_1 v_1 - y_1 u_1 - x_0 v_0 + y_0 u_0).$$

Man kann also dieses Kräftesystem durch je eine im Eintrittspunkt bez. Austrittspunkt angreifende Kraft ersetzen, welche gleich resp. entgegengesetzt gerichtet ist der an der betreffenden Stelle herrschenden Geschwindigkeit, und deren Grösse gleich

$$m\sqrt{u_0^2+v_0^2+w_0^2} \quad \text{resp.} \quad m\sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2}$$

ist.

Nach anderen Anwendungen macht der Verfasser hiervon Gebrauch, um die Anflussreaction in einer verticalen Wand eines Gefässes zu bestimmen. Dieselbe ist offenbar

$$F = mv.$$

Die Masse, welche das Gefäss verlässt, ist, wenn δ das specifische Gewicht, ω die Grösse der Oeffnung, und μ die Contractio venae bezeichnet:

$$m = \frac{\delta}{g}\mu v \omega,$$

so dass sich ergiebt

$$F = \frac{\delta}{g}\mu\omega v^2 = 2\delta\mu\omega h,$$

wo h die Druckhöhe ist. Mit $\mu = 0{,}62$ ergiebt dies

$$F = 1{,}24\delta\omega h.$$

F. K.

H. Riehn. Die Wirkungsweise der Schiffsschrauben. Z. dtsch. Ing. XXXII. 633-637, 658-662.

Der Verfasser bemängelt die in F. d. M. XVIII. 1886. 910 besprochene Arbeit von Herrn Gerlach insofern, als dieser den Druck des Wasserstromes gegen eine feste Wand proportional dem Cosinus des Winkels zwischen Stromrichtung und Normale der Wand setzt. Er bemerkt dazu: „Derartige [theoretische] Entwickelungen knüpfen sich im Interesse der Einfachheit der

Rechnung leider immer an Voraussetzungen, welche mit den thatsächlichen Erscheinungen in bedenklichem Widerspruch stehen, sodass man ihnen von vornherein keine grössere Berechtigung als den auf wesentlich empirischer Grundlage stehenden Annahmen der technischen Hydromechanik zugestehen kann." Ein weiterer Mangel der Formeln des Herrn Gerlach soll der sein, dass in ihnen, wie in den älteren Formeln, der Treibdruck sich proportional dem Quadrate des Rücklaufes ergiebt, trotzdem dieser Rücklauf unter Umständen Null oder selbst negativ werden kann.

Dem entsprechend unternimmt der Verfasser eine neue Behandlung des Gegenstandes vom Standpunkte des Empirikers aus. Uns erscheinen die Voraussetzungen und Annahmen, die der Rechnung zu Grunde liegen, nicht frei von Willkürlichkeiten.

F. K.

Sir William Thomson. Five applications of Fourier's law of diffusion, illustrated by a diagram of curves with absolute numerical values. Nature XXXVIII. 571-573.

Vortrag in der British Association, über die Themata: 1) Bewegung einer zähen Flüssigkeit. 2) Geschlossene elektrische Ströme in einem homogenen Leiter. 3) Wärme. 4) Substanzen in Lösung. 5) Elektrisches Potential in dem Leiter eines unterseeischen Kabels, wenn die elektromagnetische Trägheit vernachlässigt werden kann.

Lp.

A. Halkowich. Das Hydro-Locomobile Nossian's. Mitt. üb. Art. u. Genie. XIX. 351-366.

Neben einer Beschreibung dieses Motors findet man auch eine Entwickelung der zur Berechnung des Effectes nötigen Formeln.

Lp.

F. Grashof. Theoretische Maschinenlehre. III. 4. Hamburg u. Leipzig. L. Voss. S. 481-640.

Diese vierte Lieferung der „Theorie der Kraftmaschinen"

enthält die allgemeinen Erörterungen der Verhältnisse von Dampfmaschinen und demnächst die Bestimmungen des indicirten Effects für Ein- und Zweicylindermaschinen. Sbt.

H. Léauté. Sur un moyen d'obtenir un diagramme de détente d'une forme donnée dans les machines de genre Corliss à admission et échappement indépendants. Soc. Philom. Mém. 43-50.

Der Verfasser bestimmt für die Corlissmaschinen näherungsweise die Bewegung eines Schiebers aus derjenigen des Kolbens und löst dann die umgekehrte Aufgabe: für eine gegebene Beziehung zwischen beiden die dafür geeigneten Werte der Elemente des Mechanismus zu ermitteln. Sbt.

L. Nikolai. Ermittelung der Durchflussweite von Brücken. Samml. d. Wegeb.-Ing.-Inst. z. St. Petersburg. XIII. 39 S. (Russisch.)

Diese Abhandlung ist nicht beendet; sie enthält eine Uebersicht verschiedener Formeln und Methoden zur Bestimmung der Geschwindigkeit und des Wasserquantums. Bb.

Ph. Maximenko. Vorlesungen über Hydraulik. Samml. d. Wegeb.-Ing.-Inst. zu St. Petersburg. XIII. XV. 129-167. (Russisch.)

Capitel 5.

Potentialtheorie.

C. Neumann. Ueber das Verhalten der Green'schen Function an der Grenze ihres Gebietes. Leipz. Ber. 163-167.

Dieser Aufsatz ist nur ein kurzer Auszug aus der hier folgenden Abhandlung. N.

C. Neumann. Ueber die Methode des arithmetischen Mittels. Zweite Abhandlung. Leipz. Abh. XIV. 565-726, auch sep. Leipzig. Hirzel.

In der xy-Ebene sei eine geschlossene Curve σ gezeichnet, durch welche diese Ebene in einen äussern Teil $\mathfrak{A}$ und einen innern Teil $\mathfrak{J}$ zerfällt. Ferner mag unter einer Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ eine Function von x, y verstanden sein, die folgenden Anforderungen entspricht: Erstens soll sie auf $\mathfrak{J}$, inclusive σ, eindeutig und stetig sein. Zweitens sollen auf $\mathfrak{J}$, exclusive σ, die ersten und zweiten Ableitungen der Function stetig und $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=0$ sein. Complicirter ist die Definition einer Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Es sei (ξ, η) ein auf der Curve σ liegender Punkt; die Bogenlänge desselben (gerechnet von irgend einem festen Punkte aus) mag ebenfalls σ heissen. Ferner sei ϑ das Azimuth, unter welchem die in (ξ, η) an die Curve gelegte Tangente gegen die x-Axe geneigt ist. Denkt man sich nun längs der Curve irgend welche Werte f vorgeschrieben, und betrachtet man f und ϑ als Functionen der Bogenlänge σ, so gilt folgender Satz (Seite 82):

Sind ϑ, $\frac{d\vartheta}{d\sigma}$, $\frac{d^2\vartheta}{d\sigma^2}$, f, $\frac{df}{d\sigma}$ stetige Functionen von σ, ist ferner $\frac{d^2f}{d\sigma^2}$ eine abteilungsweise stetige Function von σ, und ist endlich $\frac{d\vartheta}{d\sigma}$ überall $\geqq 0$, so wird die den Werten f entsprechende Fundamentalfunction $\Psi = \Psi(x, y)$ des Gebietes $\mathfrak{J}$ nicht allein existiren, sondern zugleich auch von solcher Beschaffenheit sein, dass die Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

bei einer Annäherung des Punktes (x, y) an den Rand σ des

Gebietes $\mathfrak{J}$ gegen bestimmte endliche Werte convergiren. Oder genauer und vollständiger ausgedrückt: Es werden alsdann diese Differentialquotienten inclusive ihrer soeben genannten Convergenzwerte wiederum zwei Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein.

Man kann den Satz auch so aussprechen: Sind die in Bezug auf ϑ und f gemachten Voraussetzungen erfüllt, so existiren drei Fundamentalfunctionen Ψ, Ψ_1, Ψ_2 des Gebietes $\mathfrak{J}$, von denen die erste die vorgeschriebenen Randwerte f besitzt, und die gleichzeitig von solcher Beschaffenheit sind, dass für jeden innerhalb $\mathfrak{J}$ gelegenen Punkt (x, y) die Relationen stattfinden:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi_1 \text{ und } \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi_2.$$

Ganz Analoges gilt für das Gebiet $\mathfrak{A}$. — Ferner werden vom Verfasser folgende Sätze aufgestellt (Seite 140):

I. Die das Gebiet $\mathfrak{J}$ begrenzende Curve sei von solcher Beschaffenheit, dass ϑ, $\frac{d\vartheta}{d\sigma}$, $\frac{d^2\vartheta}{d\sigma^2}$ stetige Functionen der Bogenlänge σ sind, und dass überdies $\frac{d\vartheta}{d\sigma}$ durchweg $\geqq 0$ ist. Ferner sei c ein fester Punkt innerhalb $\mathfrak{J}$. Alsdann werden stets drei Fundamentalfunctionen U, U_1, U_2 des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren von solcher Beschaffenheit, dass erstens für jedweden Randpunkt $U = \log\frac{1}{r}$ ist, wo r den Abstand des Randpunktes vom festen Punkte c vorstellt, und dass zweitens für jeden Punkt (x, y) innerhalb $\mathfrak{J}$ die Relationen stattfinden:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 \text{ und } \frac{\partial U}{\partial y} = U_2.$$

Diese Function U kann die dem Punkte c entsprechende Green'sche Function, und c ihr Centralpunkt genannt werden.

II. Setzt man nun mit Bezug auf einen beliebigen Punkt (x, y):

$$\Omega = \left(\log\frac{1}{r}\right) - U,$$

so wird Ω eine Function von (x, y) sein, welche am Rande von $\mathfrak{J}$ überall $= 0$ und innerhalb $\mathfrak{J}$ überall > 0 ist.

III. Ferner wird alsdann der nach der innern Normale ν des Randes gebildete Differentialquotient $\frac{d\Omega}{d\nu}$ längs des Randes stetig und $> k$ sein, wo k eine bestimmte positive und von Null verschiedene Constante vorstellt.

IV. Unter Anwendung der in I. genannten Functionen U_1, U_2 definire man jetzt eine neue Function V durch das Integral:

$$V = \int_{x_0 y_0}^{xy} (U_1 dy - U_2 dx);$$

dabei soll der feste Anfangspunkt (x_0, y_0) der Integrationscurve innerhalb $\mathfrak{J}$ liegen, und die Curve selber in ihrer Bewegung auf das Innere von $\mathfrak{J}$ beschränkt sein. Sodann bezeichne man die Coordinaten des festen Punktes c mit a, b und definire die complexen Grössen z, c, W, w durch die Formeln: $z = x + iy$, $c = a + ib$, $W = U + iV$, und durch die weitere Formel:

$$w = (z - c)e^W.$$

Alsdann besitzt w folgende Eigenschaften:

α. Der Differentialquotient $\frac{dw}{dz}$ existirt in jedwedem Punkt z des Gebietes $\mathfrak{J}$. Auch ist die Entstehungsweise desselben in jedem solchen Punkt z eine von allen Seiten her äquiconvergente. Auch sind w und $\frac{dw}{dz}$ Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$.

β. Der mod w ist in jedem Randpunkt $= 1$, und in jedem Punkt, der innerhalb $\mathfrak{J}$ liegt, < 1.

γ. Der mod $\frac{dw}{dz}$ ist längs des Randes überall verschieden von Null.

V. (Seite 146.) Hieraus folgt dann weiter, dass durch die Function

$$w = (z - c)e^W$$

eine Abbildung des Gebiets $\mathfrak{J}$ bewirkt wird, die für alle Punkte des Gebietes (inclusive der Randpunkte) eine in den kleinsten Teilen ähnliche ist, und dass das Resultat dieser Abbildung eine in

der w-Ebene um den Punkt $w = 0$ mit dem Radius 1 beschriebene Kreisfläche ist.

Der Weg, auf welchem der Verfasser zu diesen Sätzen gelangt, ist sehr complicirt und beschwerlich. Es wäre wohl zu wünschen, dass es gelingen möchte, einen einfacheren Weg zu entdecken. N.

G. Appelroth. Einige Sätze über das Potential.
Mosk. Math. Samml. XIV. 329-336. (Russisch.)

Der Verfasser untersucht die Bedingungen, welche vollständig das Körper- und Oberflächenpotential in jedem Punkte des Raumes bestimmen; unter denselben Bedingungen giebt es nur eine Verteilung der Massen, welche gegebene analytische Ausdrücke für das innere und äussere Potential besitzen. Ms.

E. Picard. Sur un théorème relatif à l'attraction.
C. R. CVII. 984-985.

J. Bertrand. Remarques relatives à la communication de M. Picard. C. R. CVII. 985-986.

In einer Vorlesung am Collège de France hatte Herr Bertrand den Satz mitgeteilt: Eine Schar geschlossener Oberflächen habe folgende Eigenschaft: Belegt man irgend eine der Flächen mit einer Massenschicht, deren Dichtigkeit dem Abstand von der unendlich nahen Fläche umgekehrt proportional ist, so möge jene Schicht auf einen im Innern der Fläche gelegenen Punkt keine Anziehung ausüben. Dann sind die ausserhalb der Massenschicht liegenden Flächen Niveauflächen. Diesen Satz beweist Herr Picard folgendermassen: Ist

$$f(x, y, z) = \lambda$$

die Gleichung der Flächenschar, so ist die Dichtigkeit der Belegung proportional

$$(1) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Zwei Flächen S und S' der Schar, die beide den angezogenen

Punkt A umschliessen, seien nach jenem Gesetze mit Masse belegt. Das Potential jeder dieser Flächen ist dann von der Lage von A unabhängig. Dasselbe gilt mithin von der Differenz beider Potentiale. Diese Differenz aber lässt sich durch ein dreifaches, über das von S und S' begrenzte Volumen zu erstreckendes Integral ausdrücken. Dasselbe geht, wenn die Flächen S und S' einander unendlich nahe liegen, in ein mit $d\lambda$ multiplicirtes Oberflächenintegral über. Daraus, dass letzteres constant ist, folgt, dass der Punkt A auch dann keine Anziehung erleidet, wenn die Fläche S mit Masse von der Dichtigkeit

$$(2) \qquad \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

belegt ist. Die beiden Belegungen (1) und (2) können sich aber für dieselbe Fläche nur um einen constanten Factor unterscheiden; das Verhältnis der Ausdrücke (1) und (2) muss also gleich $F(f)$ sein, d. h. die betrachtete Flächenschar muss aus isothermen Flächen bestehen.

Herr Bertrand teilt im Anschluss daran die rein geometrischen Betrachtungen mit, die ihn auf den Satz geführt haben.

Wn.

A. R. Johnson. Harmonic decomposition of functions and some allied expansions. Lond. M. S. Proc. XIX. 75-89.

Die bekannte Aufgabe, aus dem Wert, den das Potential an einer gegebenen Kugelfläche annimmt, das Potential für äussere und innere Punkte zu bestimmen, wird hier für den Fall, dass der gegebene Potentialwert eine rationale ganze Function der Coordinaten ist, in einer neuen Form gelöst. Der Wert, den das Potential an der Kugel $r = a$ annehmen soll, sei zunächst eine homogene ganze Function n^{ter} Ordnung der Coordinaten $f_n(x, y, z)$, so wird für das Potential eines beliebigen inneren resp. äusseren Punktes die Reihe angenommen:

$$(B) \qquad V_i = \varphi_0 f_n + \varphi_2 \nabla^2 f_n + \varphi_4 \nabla^4 f_n + \cdots,$$

$$(C) \qquad V_a = \varphi'_0 f_n + \varphi'_2 \nabla^2 f_n + \varphi'_4 \nabla^4 f_n + \cdots,$$

wo ∇^2 die bekannte Operation bedeutet, während die Functionen φ, φ' zu bestimmende Functionen von r, dem Abstande vom Mittelpunkte, sind. Bildet man nun $\nabla^2 V$, so erhält man eine Summe von Termen, die ebenfalls f_n, $\nabla^2 f_n$, $\nabla^4 f_n$ etc. zu Factoren haben. Der Gleichung $\nabla^2 V = 0$ kann man dann dadurch genügen, dass man die Coefficienten von f_n, $\nabla^2 f_n$, $\nabla^4 f_n$ etc. für sich verschwinden lässt. Dadurch ergiebt sich für die Functionen φ, φ' die nötige Zahl von gewöhnlichen Differentialgleichungen; dieselben lassen sich leicht integriren. Bestimmt man die bei der Integration auftretenden willkürlichen Constanten so, dass an der Kugelfläche $r = a$ die Functionen $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi'_2, \varphi'_4, \ldots$ verschwinden, während φ_0 und φ'_0 dort gleich 1 werden, so ist die Aufgabe gelöst. Die Ausführung der Rechnung ergiebt:

$$\varphi_0 = 1, \qquad \varphi'_0 = \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1},$$

$$\varphi_{2s} = \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^{s-p}$$

$$\times \frac{2(2n-4s+4p+1)}{p\,!\,(s-p)!} \frac{(2n-4s+2p-1)!\,(n-s+p)!}{(2n-2s+2p+1)!\,(n-2s+p-1)} a^{2s-2p} r^{2p},$$

$$\varphi'_{2s} = \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1-2s} \varphi''_{2s},$$

wo φ''_{2s} aus φ_{2s} durch Vertauschung von a und r hervorgeht.

Fasst man in der Entwickelung (B) die Glieder gleicher Ordnung in Bezug auf r zusammen, so sind die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\frac{r}{a}$ die Glieder der Reihe, die man erhält, wenn man $f_n(x, y, z)$ nach Kugelfunctionen entwickelt.

Der Ausdruck für V_i lässt sich übrigens, wie gezeigt wird, noch auf eine andere Weise darstellen, nämlich mit Hülfe einer gewissen Determinante, deren erste Verticalreihe die Glieder V, f_n, $\nabla^2 f_n$, $\nabla^4 f_n$, ... enthält, während die Glieder der ersten Horizontalreihe V, $\left(\frac{r}{a}\right)^n$, $\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}$, ..., alle übrigen Glieder aber rein numerische Coefficienten sind.

Der Verfasser berechnet noch die Dichtigkeit, mit der man die Kugelfläche belegen muss, um das obige Potential zu er-

halten, und löst dann das analoge Problem für die von zwei concentrischen Kugeln begrenzte Schale. Ist der gegebene Potentialwert nicht mehr eine homogene Function f_n, wohl aber noch eine ganze Function der Coordinaten, so gelangt man durch mehrmalige Anwendung des obigen Verfahrens zum Ziel; es erfordert dies allerdings weitläufige Rechnungen.

Zum Schluss wird der obige Ansatz (B), (C) noch auf den Fall angewandt, dass an Stelle der ganzen homogenen Function f_n eine homogene Function nullter Ordnung $f(x, y, z)$ tritt. Die Reihen für V_i und V_a sind dann nicht mehr endlich, wie vorher; die Frage, ob dieselben convergiren, wird zwar berührt, aber nicht in genügender Weise erledigt. Wn.

E. Liebenthal. Das Potential des Ellipsoids. Hamb. Mitt. 237-255.

Die bekannten Formeln für die Anziehung der Ellipsoide werden hier nach zwei Richtungen hin erweitert, indem einmal an Stelle der constanten Dichtigkeit eine nach einem gewissen Gesetze variable Dichtigkeit, sodann an Stelle des Newton'schen Gesetzes ein anderes Anziehungsgesetz tritt. Ist V_β das Potential eines Ellipsoids, dessen Dichtigkeit eine rationale ganze Function der Coordinaten ist, P_β das Potential desselben Ellipsoids für die Dichtigkeit 1, während die Anziehung nach dem Gesetze r^β erfolgt, so wird zunächst gezeigt, dass sich die Bestimmung von V_β auf die von P mit verschiedenen Indices zurückführen lässt. Diese Reduction beruht wesentlich auf wiederholter Anwendung der teilweisen Integration sowie auf der Darstellung der höheren Differentialquotienten der Entfernung r durch eine nach Potenzen der ersten Ableitungen von r fortschreitende Reihe. Als Resultat ergiebt sich für V_β eine endliche Doppelreihe, deren einzelne Glieder Differentialquotienten verschiedener Ordnung von P sind, multiplicirt mit ganzen Potenzen der Coordinaten des angezogenen Punktes sowie mit numerischen Coefficienten. Inbesondere lässt sich das Newton'sche Potential V_{-2} mit Hülfe von P_{-2}, P_0, P_{+2} etc. ausdrücken.

Weiter wird P_{2n} für innere Punkte (i) nach dem bekannten,

zuerst von Lagrange benutzten, Verfahren berechnet, das in der Einführung räumlicher Polarcoordinaten besteht, deren Pol der angezogene Punkt ist. Durch Ausführung der betreffenden Rechnung folgt die Formel

$$P_{2n}^{(i)} = -\frac{\pi a_1 a_2 a_3}{(2n+1)(n+2)!} \int_0^\infty b_3^{2n+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} \left\{ \frac{s^{n+1}}{b_1 b_2} \left(1 - \Sigma \frac{x^2}{b^2}\right)^{n+2} \right\} ds,$$

worin a_1, a_2, a_3 die Axen des Ellipsoids sind, während $b = \sqrt{a^2 + s}$ ist. Wünschenswert wäre es gewesen, wenn der vorstehende Ausdruck für $P_{2n}^{(i)}$ in eine symmetrische Form gebracht wäre, was ohne grosse Mühe möglich ist.

Mittels des verallgemeinerten Ivory'schen Satzes ergeben sich ferner die Anziehungscomponenten für äussere Punkte, endlich wird auch V_β durch eine Summe von einfachen Integralen dargestellt. Das Resultat wird auf einige specielle Fälle angewandt und schliesslich noch ermittelt, wie man die im Innern des Ellipsoids enthaltene Masse (von variabler Dichtigkeit) über die Oberfläche zu verteilen hat, ohne die Wirkung auf äussere Punkte zu ändern. Wn.

J. Bertrand. Généralisation d'un théorème de Gauss. C. R. CVII. 537-538.

Wenn eine Kugel ausserhalb eines anziehenden Körpers liegt, so ist der Mittelwert des Potentials in den verschiedenen Punkten der Kugel gleich dem Potential bezüglich des Mittelpunktes dieser Kugel. Indem Hr. Bertrand die Vollkugel durch eine Kugelfläche ersetzt, gelangt er zu den folgenden Sätzen, die jedoch, ebenso wie der vorangehende, auch schon von Gauss ausgesprochen sind (Werke V. 222. Art. 20):

„Wenn die Kugelfläche den anziehenden Körper einschliesst, so ist der Mittelwert des Potentials gleich der durch den Kugelradius geteilten anziehenden Masse. Wenn der anziehende Körper zum Teil innerhalb, zum Teil ausserhalb der Kugel liegt, so ist der Mittelwert des Potentials auf der Kugelfläche gleich dem Potential im Kugelmittelpunkte für die äussere Masse, wenn es um die durch den Kugelradius geteilte innere Masse vermehrt wird." Lp.

U. Bigler. Potential einer elliptischen Walze. Hoppe Arch. (2) VI. 225-275.

Die vorliegende Arbeit, eine Fortsetzung des Aufsatzes, über den F. d. M. XVIII. 1886. 926 berichtet ist, betrifft lediglich das Potential einer ebenen Ellipse von constanter Dichtigkeit. Der Ausdruck für das Potential wird zunächst aus dem in der früheren Arbeit bestimmten Potential des Ellipsenumfangs abgeleitet; späterhin wird zur Ableitung der Dirichlet'sche discontinuirliche Factor benutzt. Das Resultat ist nicht neu; die von anderen Autoren dafür gegebenen Ableitungen sind bedeutend einfacher, als die des Herrn Bigler.

Weiter werden das Potential sowie die Kraftcomponenten der Ellipse durch elliptische Integrale in der Normalform ausgedrückt und die gewonnenen Ausdrücke auf specielle Lagen des angezogenen Punktes angewandt. Die hierbei sich ergebenden Resultate haben ebenso wenig ein erhebliches Interesse wie die langen zum Ziele führenden Rechnungen, die wesentlich den Charakter von Uebungsbeispielen haben.

Der Verfasser versucht im Verlaufe seiner Arbeit, den Satz über die Discontinuität der normalen Anziehungscomponente einer Fläche einfacher zu begründen, als es sonst geschieht. Er stützt sich dabei aber auf die Anziehung eines Kreises von constanter Dichtigkeit, und daher kann seine Ableitung durchaus nicht als ausreichend angesehen werden. Wn.

W. Burnside. Note on the potential of an elliptic cylinder. Mess. (2) XVIII. 84-85.

Das Potential eines elliptischen Cylinders wird gewöhnlich dadurch erhalten, dass man in dem Ausdrucke für das Potential eines Ellipsoids c unendlich werden lässt. In dem gegenwärtigen Aufsatze erhält der Verf. dasselbe durch eine directe und verhältnismässig einfache Integration. Der Verf. ermittelt auch das Potential eines Vollcylinders und einer dünnen von ähnlichen hyperbolischen Cylindern begrenzten Schale. Glr. (Lp.)

Züge, Das Potential homogener ringförmiger Körper, insbesondere eines Ringkörpers mit Kreisquerschnitt. J. für Math. CIV. 89-101.

Das Potential eines homogenen Ringkörpers, d. h. eines solchen, der durch Rotation eines ebenen Flächenstücks um eine dasselbe nicht schneidende Gerade entstanden ist, lässt sich durch einfache Transformation in die Form bringen

$$U = m\int_0^{2\pi} V\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{2\pi}\frac{\partial W}{\partial a}\, d\varphi.$$

Darin ist V das Potential des ebenen Flächenstücks, durch dessen Rotation der Ringkörper entsteht, W das Potential derselben Fläche für den Fall, dass die Anziehung statt nach dem Newton'schen Gesetze mit constanter Kraft erfolgt; m ist der Abstand des angezogenen Punktes von der Ringaxe, a endlich der Abstand der Projection des angezogenen Punktes auf die Ebene des Meridianschnitts von einer zur Ringaxe parallelen, im Meridianschnitt liegenden Geraden. Für den Ringkörper mit Kreisquerschnitt ist V bekannt. $\frac{\partial W}{\partial a}$ wird vom Verfasser durch ein analoges Verfahren ermittelt, wie es Heine zur Bestimmung des Potentials eines homogenen Kreises angewandt hat [J. für Math. LXXVI, F. d. M. V. 1873. 502]. Dadurch ergiebt sich für den Ring mit Kreisquerschnitt, falls zur Abkürzung

$$u^2 = \varrho^2 s^2 - s(m^2+\gamma^2+r^2-\varrho^2) - m^2 + 2msr\cos\varphi + m^2\cos^2\varphi$$

gesetzt wird:

$$U = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty}\frac{(m\cos\varphi + rs)\,u\,ds}{s(s+1)^2\sqrt{s+1}}.$$

r ist hier der Abstand des Mittelpunktes des rotirenden Kreises von der Ringaxe, ϱ der Radius dieses Kreises, γ das Lot vom angezogenen Punkte auf die Aequatorebene des Ringes; s_0 ist die positive Wurzel der Gleichung $u = 0$.

Das Integral, das in Bezug auf beide Variabeln s und φ elliptisch ist, geht für $m = 0$ in ein einfaches elliptisches Integral über. Im allgemeinen aber lässt sich U nicht weiter vereinfachen, auch dann nicht, wenn man die Reihenfolge der Inte-

gration vertauscht, wodurch

$$U = 4\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{ds}{s(s+1)^2\sqrt{s+1}} \int_0^{\varphi_1} (m\cos\varphi + rs)u\,d\varphi$$
$$+ 4\int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{ds}{s(s+1)^2\sqrt{s+1}} \int_0^{\pi} (m\cos\varphi + rs)u\,d\varphi$$

wird. Dabei ist φ_1 diejenige Wurzel der Gleichung $u = 0$, die kleiner als π ist,

$$\sigma_0 = \frac{\gamma^2 - \varrho^2 + (m-r)^2}{\varrho^2}, \quad \sigma_1 = \frac{\gamma^2 - \varrho^2 + (m+r)^2}{\varrho^2}.$$

Falls der angezogene Punkt innerhalb des Körpers liegt, wird $\sigma_0 = 0$.

Zum Schluss wird noch gezeigt, dass durch Anwendung der Substitution

$$\frac{m\sin\varphi}{u} = \operatorname{tg}\chi$$

der Ausdruck der Anziehungscomponente $\frac{\partial U}{\partial \gamma}$ sich in drei Teile zerlegen lässt, von denen der eine in endlicher Form darstellbar ist. Wn.

H. de la Goupillière. Transformation propre à conserver le caractère du potentiel cylindrique d'un nombre limité de points. Soc. Phil. Mém. 27-33.

Es sei

$$V = \Sigma m \log \delta$$

das logarithmische Potential einer gewissen Zahl fester Centren. δ ist dabei die Entfernung eines variablen Punktes mit den Polarcoordinaten l, t von einem festen Punkte, dessen Masse m ist, und dessen Coordinaten λ, ϑ seien. Wendet man auf V eine isotherme Transformation an, indem man

$$le^{it} = \Phi(Le^{iT}), \quad \lambda e^{i\vartheta} = \Phi(\varLambda e^{i\theta}),$$
$$le^{-it} = \Psi(Le^{-iT}), \quad \lambda e^{-i\vartheta} = \Psi(\varLambda e^{-i\theta})$$

setzt, unter Φ und Ψ conjugirte Functionen verstanden, so entsteht die Frage, wie müssen die Functionen Φ und Ψ beschaffen sein, damit der transformirte Ausdruck wieder das logarithmische Potential einer andern Zahl von festen Centren darstellt. Dazu ist, wie die Betrachtung von e^{2V} leicht ergiebt, erforderlich, dass die Function Φ der Bedingung genügt

$$\Phi(z) - \Phi(\zeta) = \Pi(z-\zeta_1)^{\frac{m'}{m}},$$

unter Π das Product einer Anzahl Factoren von der Form $(z-\zeta_1)^{\frac{m'}{m}}$ verstanden. Nimmt man zunächst an, dass alle Exponenten $\frac{m'}{m} = 1$ sind, so kommt die Transformation darauf hinaus, dass der Radiusvector eines veränderlichen Punktes durch das Product der Abstände dieses Punktes von n neuen festen Centren und zugleich das Azimut jenes Radius durch die Summe der Azimute der letztgenannten Abstände ersetzt wird. Aus diesem einfachen Falle ergiebt sich der, bei dem die Exponenten $\frac{m'}{m}$ positive ganze Zahlen sind, dadurch, dass man mehrere der neuen Centren zusammenfallen lässt. In dem Falle endlich, wo die Exponenten $\frac{m'}{m}$ auch negative ganzzahlige Werte annehmen können, sind nur für die betreffenden Abstände ihre reciproken Werte zu setzen, während gleichzeitig die zugehörigen Azimute negativ zu nehmen sind. Damit sind alle Fälle, in denen Φ eine rationale Function ist, erschöpft; auf weitere Fälle geht der Verfasser nicht ein. Wn.

A. C. ELLIOTT. The potential of a spherical magnetic shell deduced from the potential of a coincident layer of attracting matter. Edinb. M. S. Proc. VI. 12-13.

Bezeichnet man den inneren und den äusseren Radius der Schale bezw. mit a und $a+\delta a$, so ist das Potential V_m in einem

Punkte ausserhalb der Schale und auf der positiven Seite, welches von negativer magnetischer Masse von der Dichte σ auf der Innenseite und von positiver auf der Aussenseite herrührt,

$$(1)\quad V_m = -V + \left(V + \frac{\partial V}{\partial a}\delta a + \frac{\partial V}{\partial \sigma}\delta\sigma\right) = \frac{\partial V}{\partial a}\delta a + \frac{\partial V}{\partial \sigma}\delta\sigma,$$

wo V das Potential in dem Punkte ist, welches von einer einfachen Belegung von der Dichte σ und dem Radius a herrührt. Da nun die magnetische Gesamtmasse Null sein muss, so ist

$$(2)\quad a^2\sigma = \text{const.},\qquad (3)\quad V = A\sigma,$$

wo A von σ unabhängig ist. Vermöge der Gll. (2) und (3) geht (1) über in $V_m = a^2\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{V\delta a}{a^2}\right)$ oder, wenn man $\sigma\delta a = \varphi$ setzt und mit P das Potential in dem Punkte bezeichnet, welches von einer Belegung von der numerischen Dichte φ herrührt, $V_m = a^2\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{P}{a^2}\right)$. Dieser Ausdruck wird mit dem von Maxwell erhaltenen verglichen (Elect. and Magn. § 670).

Gbs. (Lp.)

O. Callandreau. Énergie potentielle de la gravitation d'une planète. C. R. CVII. 555-557.

Der Verfasser zeigt, dass man die potentielle Energie der Gravitation eines Planeten, d. h. das Integral

$$\tfrac{1}{2}\int V dm,$$

wo V das Potential der Masse in Bezug auf das Element dm ist, mit sehr grosser Annäherung berechnen kann, ohne die Dichtigkeitsverteilung im Innern zu kennen. Zur Ermittelung des angenäherten Wertes ist nur die Kenntnis der Dimensionen des Planeten, seiner Masse sowie seiner Winkelgeschwindigkeit erforderlich. Für die Erde ist der Fehler des angenäherten Wertes höchstens $\frac{1}{75}$ des ganzen Betrages. Wn.

A. KURZ. Ueber Messungen der irdischen Schwerkraft. Eine kritische Abhandlung. Exner Rep. XXIV. 202-208.

Bemerkungen, welche durch die von den Herren A. König und F. Richarz vorgeschlagene Methode veranlasst sind.

Lp.

G. MORERA. Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie. Nuovo Cimento (3) XXIII. 1-10.

Vergl. F. d. M. XIX. 1887. 1036.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

P. G. Tait. Die Eigenschaften der Materie. Autorisirte Uebersetzung von G. Siebert. Wien. A. Pichler's Wittwe & Sohn. VI + 322 S. 8°.

Das Werk ist nach der Vorrede des Verfassers als Einleitung zum Cursus der Physik, mit Ausnahme weniger Abschnitte, für solche Studirende bestimmt, welche nur die Elementarmathematik kennen, also etwa die Kenntnisse der Abiturienten deutscher Gymnasien besitzen. Es behandelt diejenigen Eigenschaften der Materie, welche in unseren Lehrbüchern als „allgemeine Eigenschaften der Körper" bezeichnet zu werden pflegen, nämlich: die Hypothesen über die letzte Structur der Materie; Zeit und Raum; Undurchdringlichkeit, Porosität und Teilbarkeit; Trägheit, Beweglichkeit und Centrifugalkraft; Gravitation; Deformabilität und Elasticität; Zusammendrückbarkeit der Gase und Dämpfe, der Flüssigkeiten, der festen Körper; Cohäsion und Capillarität; Diffusion, Osmose, Transpiration, Zähigkeit; Aggregation der Massenteilchen. Ein Anhang fügt hinzu: Hypothesen über das Wesen der Materie von Prof. Flint, Auszüge aus dem Artikel

Atom von Clerk Maxwell, das Experiment des Archimedes nach Vitruv, eine Bemerkung über eine Stelle in Newton's Principien bezüglich Mariotte's.

Diejenigen Abschnitte, welche zugleich in dem „Treatise on Natural Philosophy" der Herren Thomson und Tait behandelt sind, stimmen zum Teil wörtlich mit dem dort in grösserem Druck Ausgeführten überein, entlehnen ihm auch manche elementar-mathematischen Betrachtungen, wie z. B. den Beweis für die Anziehung einer homogenen Kugelfläche auf einen ausserhalb gelegenen Punkt.

Der specifisch englische Standpunkt des Verfassers ist hinlänglich bekannt, und obschon der Nichtengländer mit den vorgetragenen Anschauungen wohl nicht immer übereinstimmen wird, so ist es doch anregend, diesen Standpunkt in einem seiner rücksichtslosesten Vertreter kennen zu lernen. Um als Deutscher nicht pro domo zu sprechen, will Referent nur ein Beispiel hervorheben, das einen Italiener betrifft. Dem Forscher, der über jedes vermeintliche Unrecht empört ist, das der Continent nach seiner Ansicht an einem Engländer begeht, dürfte es wohl ziemen, das Trägheitsgesetz nicht bloss als „erstes Newton'sches Bewegungsgesetz" zu proclamiren; sondern es wäre billig, dabei zu sagen, dass Galilei dieses Gesetz zuerst ausgesprochen und begründet hat. Dagegen hat Herr Tait in einem umgekehrten ähnlichen Falle gar nicht nötig, mit dem ihm eigentümlichen Ungestüm das sogenannte Mariotte'sche Gesetz für Boyle zu beanspruchen; dies ist längst in Poggendorff's Geschichte der Physik in voller Klarheit geschehen. Die Sprache der Uebersetzung ist gewandt; den Originaltext konnte Referent jedoch nicht vergleichen. Die Ausstattung ist gut. Lp.

J. G. Wallentin. Lehrbuch der Physik für Gymnasien. 5te veränderte Auflage. Wien. A. Pichler. 318 S.

Die neue Auflage weist nach dem Berichte in der Vorrede gegen die früheren bedeutende Kürzungen und wesentliche Ver-

änderungen auf, teils um aus augenhygienischen Rücksichten den Druck vergrössern, teils um den Preis des Buches vermindern zu können. Das Buch geht einerseits zu weit, indem es z. B. die ganze anorganische und die organische Chemie behandelt; andererseits werden wichtige Dinge nur beiläufig erwähnt, so dass sie für jeden, der nicht anderweitig unterrichtet ist, unklar bleiben müssen, wie z. B. die Commutatoren bei den Funkeninductoren und bei den magnetoelektrischen Maschinen. Die ganze Krystallographie wird in der Einleitung (S. 9) mit den Worten erledigt: „Die Formen der verschiedenen Krystalle sind mannigfaltig, können jedoch in bestimmte Gruppen gebracht werden". Auch der Ausdruck ist nicht überall klar, was namentlich bei der Beschreibung von Apparaten und Versuchen auffällt. Die hydraulische Presse besteht (S. 62) aus zwei Hauptbestandteilen, der Pumpe und der Presse: vermittelst der Pumpe wird das Wasser gesogen, welches dann, durch eine Röhrenvorrichtung mittelst eines Kolbens gepresst, einen Druck ausübt... Hebt man (S. 92) das eine Gefäss *B* einer Quecksilberluftpumpe, so füllt sich das andere *A* mit Quecksilber „und tritt aus der Hahnöffnung aus". „Erwärmt man (S. 79) so lange, bis das Quecksilber an dem Ende der verticalen offenen Thermometerröhre erscheint, so wird dieselbe zugeschmolzen". Bei der Dampfmaschine (S. 117) geht die Kraft während einer Umdrehung zweimal verloren (todte Punkte). Dass warme Winde viel, kalte wenig Wasserdampf mit sich führen, und dass daher durch das Sinken des Barometers Regenwetter, durch das Steigen desselben schöne Witterung angezeigt wird, ist doch keine allgemein gültige Regel. Doch genug. — An eine strenge Scheidung der einzelnen Capitel hat sich der Verfasser nicht gebunden; so werden Wesen und Wirkungen der Wärme in der Mechanik §§ 58-63, die Meteorologie teils beim Barometer und in der Aerodynamik, teils in den einzelnen Capiteln der Wärmelehre abgehandelt. Im übrigen ist der Inhalt S. 1-10 Einleitung, 10-102 Mechanik, 102-126 Wärme, 126-139 Magnetismus, 139-188 Elektricität, 188-217 Wellenlehre, Akustik, 217-270 Optik, 270-273 Strahlung der Wärme. In einem Anhang finden sich die Grund-

lehren a) der mathematischen Geographie und der Astronomie, b) der Chemie. Lg.

F. Lindemann. Ueber Molecularphysik. Versuch einer einheitlichen dynamischen Behandlung der physikalischen und chemischen Kräfte. Berlin. R. Friedländer & Sohn. 51 S. 4°, Schriften der phys.-ökon. Ges. Königsberg. XXIX.

Die vorliegende Abhandlung ist ein Versuch, die Vorstellungen von Sir William Thomson über Molecularphysik mathematisch zu formuliren und in ihren Anwendungen auf Optik, Wärmelehre, Chemie und Elektricitätslehre durchzuführen.

Den Entwickelungen wird die Vorstellung zu Grunde gelegt, dass die ponderablen von Aether umgebenen Atome aus einzelnen um einen unelastischen Kern gelagerten concentrischen Kugelschalen bestehen, deren Mittelpunkte auf einer geraden Linie Schwingungen ausführen. Die elastischen Kräfte, welche zwei benachbarte Kugelschalen auf einander ausüben, werden proportional angenommen den relativen Verschiebungen der beiden Mittelpunkte; dasselbe gilt von der äussersten Kugelschale und dem Aether.

Zwischen den Amplituden der Schwingung des Aethers (ξ) und derjenigen der äussersten Kugelschale (x_1) besteht dann eine Gleichung von der Form

$$-\frac{x_1}{c_1\xi} = \frac{T^2}{m_1}\left\{\frac{\varkappa_1^2 R_1}{\varkappa_1^2 - T^2} + \frac{\varkappa_2^2 R_2}{\varkappa_2^2 - T^2} + \cdots + \frac{\varkappa_j^2 R_j}{\varkappa_j^2 - T^2}\right\},$$

wo c_1, m_1, R_1, R_2, ..., R_j, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ..., $\varkappa_j$ Constanten bezeichnen, T die Schwingungsdauer ist. Legt man nun statt jeder discreten Kugelschale eine continuirliche sich ändernde Dichtigkeit der elastischen Masse zu Grunde, so erhält man für das Reciproke μ der Fortpflanzungsgeschwindigkeit die Gleichung

$$\mu^2 = \frac{1}{l}\left\{\varrho - c_1 T^2\left(1 + c_1\frac{T^2}{m_1}\Sigma\frac{\varkappa_i^2 R_i}{\varkappa_i^2 - T^2}\right)\right\},$$

wo l, ϱ, c_1 weitere Constanten bezeichnen.

Die hier auftretenden Grössen $\varkappa_i^2$ sind offenbar diejenigen kritischen Werte, welche die Schwingungsdauer haben muss, da-

mit die Kugelschalen schwingen, ohne dass der Aether sich bewegt; sie liefern also die Schwingungsdauer für das von dem betreffenden Medium absorbirte Licht. Die zweite Gleichung giebt den Brechungsindex des Mediums für die betreffende Schwingungsdauer. Diese Gleichung wird zunächst für den Fall einer kritischen Schwingungsdauer näher discutirt und führt unter Berücksichtigung der annähernden Constanz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für verschiedenes Licht auf die auch nach Beobachtungen gerechtfertigte Darstellung des Brechungsexponenten durch die Wellenlänge λ:

$$\mu^2 = A + B\lambda^2 + \frac{C\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_0^2}.$$

Auch der Fall von zwei oder mehr kritischen Werten $\varkappa$ gelangt zur Erörterung. Im § 3 werden die Resultate der Discussion zur Erklärung der Dispersion angewandt. Auch wird erörtert, wie die Constanten beschaffen sein müssen, damit μ^2, wenn es negativ ist (also Reflexion eintritt), einen wesentlich constanten Wert besitze, oder, anders gesprochen, dass alle Farben wesentlich gleich reflectirt werden.

Im § 4 wird der Kirchhoff'sche Satz über das Spectrum leuchtender Gase dadurch abgeleitet, dass zwei Molecüle bei der vorausgesetzten Constitution, falls sie sich bei einem Stosse treffen, in Schwingungen geraten müssen, deren Dauer eben jene kritischen Werte sind. Dass die Fortschreitungsgeschwindigkeit der einzelnen Molecüle mit wachsender Temperatur zunehmen muss, wird dadurch erklärt, dass die durch die inneren Schwingungen der Kugelschalen repräsentirte Energie ein ganz bestimmtes Maximum nicht überschreiten könne. Erleidet dieses Molecül nach Erreichung dieses Maximums eine weitere Störung des Gleichgewichts, sei es durch eine Lichtwelle oder durch mechanischen Stoss, so wird eine Vermehrung der Energie nur durch den Eintritt einer fortschreitenden Bewegung des Molecüls möglich sein.

Im Abschnitt (6) wird die Doppelbrechung erklärt und die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Schwingungsrichtung durch die Annahme abgeleitet, dass die Constante in den obigen Gleichungen für die verschiedenen Schwingungs-

richtungen verschiedene Werte haben. Die Eigenschaften des Spectrums chemischer Verbindungen, namentlich seine säulenstreifige Natur, werden zunächst im allgemeinen erklärt, indem das aus zwei Atomen gebildete Molecül durch einen elliptischen Körper ersetzt wird, der sich ähnlich verhält wie jene oben beschriebenen Kugeln.

Dann wird die Theorie genauer verfolgt, indem jetzt auch die Bewegung des Kernes in Betracht gezogen wird. Weiter wird die Bildung chemischer Verbindungen durch den Einfluss von Licht und Wärme erläutert; die chemische Moleculartheorie, die zersetzende Wirkung von Licht und Wärme, endlich die Ableitung der Fluorescenzerscheinungen bilden den Schluss des ersten Capitels. Besonders hervorzuheben ist, dass man zur Erklärung chemischer Processe bei der vorliegenden Theorie nicht einer chemischen Verwandtschaft bedarf. Um den Unterschied in dem Verhalten einatomiger und zweiatomiger Molecüle zu erklären, muss man annehmen, dass bei den ersteren die Masse der äusseren Kugelschale gegen die der inneren verhältnismässig klein, bei den letzteren hingegen sehr gross ist.

Bei den eben besprochenen Wellenbewegungen des Aethers wurde vorausgesetzt, dass die Wellenlänge sehr gross gegen die Dimensionen der Molecüle ist. Die Erscheinungen der Elektricität werden auf Wellenbewegungen zurückgeführt, deren Wellenlänge als klein gegen die Dimensionen des Körpers erscheint. Auf Grund dieser Hypothese wird zunächst die elektrostatische Anziehung abgeleitet; dann wird das elektrodynamische Potential zweier Ströme bestimmt und daraus das Weber'sche Grundgesetz abgeleitet. Die §§ 15 und 16 behandeln die Erregung und die Wirkungen der Elektricität, § 17 die Drehung der Polarisationsebene, § 18 den Magnetismus und Diamagnetismus, § 19 giebt einen kritischen Vergleich der elektrodynamischen Lichttheorien mit der hier vorgetragenen Lehre. F. K.

F. Lindemann. Molecular physics: an attempt at a comprehensive dynamical treatment of physical and chemical forces. Nature XXXVIII. 404-407, 458-461, 578-581.

Uebersetzung des im vorhergehenden Referate besprochenen Vortrags von Hrn. Lindemann in der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Lp.

F. S. PROVENZALI. Sulla energia potenziale. Rom. Acc. Pont. d. N. L. Mem. IV. 3-18.

Eine Uebersicht über die moderne Lehre von der Erhaltung der Energie. Lp.

H. RESAL. Traité de physique mathématique. 2me éd. Tome II: Chaleur, Thermodynamique, Magnétisme statique. Mouvements des aimants et des courants. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

M. BRILLOUIN. Déformations permanentes et Thermodynamique. C. R. CVI. 416-418, 482-485, 537-540, 589-592, Almeida J. (2) VII. 327-347.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind die bleibenden Veränderungen, die ein fester Körper erfährt, wenn er nach einer Reihe von Zustandsänderungen zu den Bedingungen zurückkehrt, unter denen er anfangs stand, also elastische Nachwirkungen, bleibender Magnetismus u. s. w. Der Verfasser will zeigen, wie die Untersuchungen anzustellen sind, um diese Erscheinungen unter einem einheitlichen Gesichtspunkte aufzufassen, und wie die Grundsätze der Thermodynamik auf alle langsamen Veränderungen der meisten festen Körper angewandt werden können.

Für die meisten elastischen festen Körper existirt keine endliche Relation zwischen einer geometrischen Veränderlichen x, einer mechanischen Veränderlichen X und der Temperatur t. Beispielsweise kann die Länge eines Stabes bei derselben Temperatur und bei demselben Druck innerhalb gewisser Grenzen verschieden sein, je nach den durchlaufenen Zwischenzuständen. Dagegen nimmt der Verfasser unter der Voraussetzung, dass der Wärmeausdehnungs- und Elasticitätscoefficient den gleichen Wert haben bei demselben Anfangs- und Endzustande, welche Ver-

änderungen der Körper auch erfahren habe, an, dass eine line Differentialgleichung bestehe zwischen x, X und t, oder eigt lich so viele Gleichungen, als unabhängige geometrische V änderliche vorhanden sind. Diese Gleichung wird im einfachs Falle lauten:

$$dx = adX + b\,dT,$$

wo a und b Functionen der drei Veränderlichen sind, die e pirisch bestimmt werden müssen, und die die Ausdehnungs- u Elasticitätsgesetze des betreffenden Körpers enthalten. F flüssige Körper ist diese Gleichung integrirbar, für feste nic

Aus dieser Gleichung ergeben sich mehrere Folgerunge Jede Deformation ist umkehrbar. Für eine nicht geschlosse Reihe von Transformationen ist die Unterscheidung des vorüb gehenden und des bleibenden Anteils einer Deformation un stimmt; und: welche Veränderungen der Körper auch erfahre möge, auf unendlich viele Arten kann der Kreis so geschlosse werden, dass keine bleibende Veränderung entsteht, und a unendlich viele Arten so, dass die eintretende bleibende Ve änderung einen der Grösse und dem Zeichen nach gegebene Wert hat. Für kleine Processe solcher Art, die eine gering Anzahl mal wiederholt werden, ist die von jedem einzelnen he vorgebrachte bleibende Veränderung proportional dem Quadrat der grössten Veränderung der unabhängigen Veränderlichen (Beispiele: Torsion, Veränderung des Nullpunktes der Thermo meter, Magnetisirung.) Die Gesamtveränderung eines mehrmal wiederholten, hinlänglich kleinen Processes wächst anfangs mi der Zahl der Wiederholungen.

Durch die Anwendung des ersten Hauptsatzes der Thermo- dynamik auf die in Rede stehenden Vorgänge ergiebt sich die Energie U des Körpers als Function von x, X und T, und entstehen ferner Gleichungen für die latenten und specifischen Wärmen. Folgerungen aus dem zweiten Hauptsatze werden erhalten durch Anwendung eines besonderen umkehrbaren Kreisprocesses, der aus drei adiabatischen und drei isothermen Transformationen besteht; die Untersuchung wird indessen nicht näher ausgeführt, sondern nur angedeutet. Das aus beiden Sätzen er-

haltene Schlussergebnis bilden die Gleichungen:

$$JTRdS - Xdx - dU = 0 \quad \text{und} \quad dQ = TRdS,$$

mit der einzigen Bedingung, dass

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}+X\right)\left(\frac{\partial S}{\partial X}\frac{\partial R}{\partial T}-\frac{\partial R}{\partial X}\frac{\partial S}{\partial T}\right)+\frac{\partial U}{\partial X}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial T}\right)$$
$$+\frac{\partial U}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial X}-\frac{\partial S}{\partial X}\frac{\partial R}{\partial x}\right)=0.$$

J ist das mechanische Wärmeäquivalent, R und S sind Functionen von x, X und T. Sbt.

E. Cesaro. Moti rigidi e deformazioni termiche negli spazii curvi. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV₂. 376-384.

Der Verfasser geht aus von dem Betti'schen Theorem, das auch für nicht-euklidische Räume gültig ist, und zieht daraus Folgerungen. Es zeigt sich, dass in einem Raume mit einer constanten, von 0 verschiedenen Krümmung keine homogenen Deformationen eintreten können. Eng verknüpft damit ist die andere Thatsache, dass es unmöglich ist, in allen Punkten eines elastischen Mittels die gleiche Temperaturänderung herbeizuführen, ohne dass Spannungen auftreten; letztere verschwinden mit der Krümmung des Raumes. Die einer constanten Aenderung der Temperatur entsprechende Deformation ist vergleichbar derjenigen im euklidischen Raume, wenn die Temperatur proportional mit $1+\frac{1}{4}\alpha.r^2$ wächst, wo α das Mass der Krümmung des betreffenden Raumes und r die Entfernung jedes Punktes von einem festen Punkte ist.

Eine solche Deformation kann auch durch äussere Kräfte bewirkt werden, indem man den Körper einem gleichmässig über die Oberfläche verteilten, constanten Druck aussetzt.

Interessant sind auch die thermischen Deformationen, bei denen jeder Punkt sich in der Richtung der auf ihn wirkenden Kraft um eine der Grösse dieser Kraft proportionale Strecke verschiebt. Solche Deformationen treten nicht auf im euklidischen Raume, sie entsprechen aber den Anschauungen von Faraday

und Maxwell über elektrische Wirkungen in dielektrischen Körpern. Sbt.

C. Barus. Maxwell's theory of the viscosity of solids and its physical verification. Phil. Mag. (5) XXVI. 183-217.

Der Artikel beginnt mit einer kurzen Skizze verschiedener Hypothesen hinsichtlich der Natur der Zähigkeit bei festen Körpern; sein vornehmster Gegenstand jedoch ist der Nachweis, wie klar die Maxwell'sche Theorie die verworrenen und fast regellosen Erscheinungen der Zähigkeit deutet, die sich bei gekühltem Stahl zeigen. Maxwell's Theorie der Zähigkeit wird als das Analogon zur Clausius'schen Theorie der Elektrolyse betrachtet. Die Ergebnisse zahlreicher Experimente werden mitgeteilt und besprochen. Gbs. (Lp.).

C. Barus. The secular annealing of cold hard steal. Phil. Mag. (5) XXVI. 397-403. Gbs.

R. H. M. Bosanquet. On the use of the term „resistance“ in the description of physical phenomena. Phil. Mag. (5) XXV. 419-425.

Dieser Artikel ist durch die aus Hopkinson von Herrn S. P. Thomson angeführte Bemerkung veranlasst, es gebe nichts Derartiges wie magnetischen Widerstand, weil der Widerstand des Eisens gegen den Magnetismus unter veränderlichen Umständen nicht constant sei. Deshalb wird die Frage betrachtet: Welches ist der eigentliche Begriff, den der Gebrauch des Ausdrucks „Widerstand“ bei der Beschreibung physikalischer Erscheinungen einschliesst? Die mitgeteilten Hauptpunkte werden wie folgt vom Verfasser zusammengestellt: 1) Der Widerstand kann ganz allgemein als das Verhältnis von Ursache zu Wirkung aufgefasst werden. 2) Die Einwürfe gegen die Benutzung des Ausdrucks „magnetischer Widerstand“ beruhen auf dem angenommenen Erfordernis der Identität statt der Analogie zwi-

schen dem Verhalten verschiedener Gegenstände und können nicht aufrecht erhalten werden. 3) Die Ausdehnung der Benutzung des Ausdrucks Widerstand nach der obigen Weise führt zu einigen bemerkenswerten Analogien, deren Tragweite den Gebrauch des Ausdrucks „magnetischer Widerstand“ an und für sich rechtfertigt. Gbs. (Lp.)

R. Ulbricht. Ueber die Beziehungen zwischen elastischen Systemen und stationären elektrischen Strömen. Civiling. XXXIV. 177-184.

Zwischen den Grössen bei einem elektrischen Strom, der einen linearen Leiter ohne elektromotorische Kraft durchfliesst, nämlich dem Leitungswiderstand, der Stromstärke, der Potentialdifferenz und dem specifischen Leitungsvermögen, finden dieselben Gleichungen statt wie zwischen dem Nachgiebigkeitsgrade, der halben Spannung, der relativen Verschiebung und dem halben Elasticitätsmodul bei einem elastischen Stabe. Man kann in Folge dessen Sätze aus der Elektricitätslehre unmittelbar auf die Elasticitätslehre übertragen. Der Verfasser führt dies an einigen Beispielen durch. F. K.

Ch. Lagrange. Note concernant la vérification numérique d'une formule relative à la force élastique des gaz. Belg. Bull. (3) XVI. 171-193.

Ausser der experimentellen, im Titel berührten Bestätigung enthält diese interessante Note einen Versuch zum Beweise der folgenden Formel:

$$P = \frac{fT^2r^2}{\varrho^2 - r^2} - A;$$

f ist eine vom Gase unabhängige Constante, r der Radius des Gaselementes, ϱ der halbe Abstand der elementaren Mittelpunkte, A ein von der molecularen Anziehung abhängiges Glied, T die absolute Temperatur, P der Druck des Gases für die Einheit der Oberfläche. Der Verf. ist dazu gekommen, das Dasein einer allgemeinen Anziehungskraft anzunehmen, die den Massen pro-

portional, im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate des Abstandes, von constanter Intensität ist und sich durch die Materie hindurch fortpflanzt; ferner das Dasein einer allgemeinen Abstossung, die den Oberflächen proportional, im umgekehrten Verhältnisse zum Kubus der Entfernung, von veränderlicher Intensität T ist und von der Materie aufgefangen wird. Die Abstossung (und ebenso die Anziehung) eines Atoms durch ein anderes ist im allgemeinen nicht gleich der des zweiten durch das erstere. Mn. (Lp.)

J. Buchanan. On a law of distribution of molecular velocities amongst the molecules of a fluid. Phil. Mag. (5) XXV. 165-169.

Die Sätze betreffs der grössten und kleinsten Werte der kinetischen Energie eines mechanischen Systems, wenn es durch Impulse aus der Ruhe aufgestört wird, finden in dieser Abhandlung ihre Einführung in die kinetische Gastheorie. Vermöge der Definition der molaren Geschwindigkeit (Geschwindigkeit des Schwerpunkts aller Molecüle innerhalb der Wirkungssphäre) eines Volumenelements in ähnlichen Ausdrücken, wie bei Clerk Maxwell die Geschwindigkeit eines Gases definirt wird, ergiebt sich ein Ausdruck für die moleculare kinetische Energie des Fluidums, und danach wird die Bedingung dafür ermittelt, dass die Verteilung der molecularen Geschwindigkeiten die wahrscheinlichste ist. Dies führt zu dem Resultate $\delta T = 0$, wenn T die molare kinetische Energie des Fluidums ist, woraus der Satz folgt: „Wenn die molare kinetische Energie eines Fluidums einer Maximal- oder einer Minimal-Bedingung genügt, oder einer Maximal-Minimal-Bedingung, so befolgt die Verteilung der molecularen (linearen) Geschwindigkeiten ein Gesetz von derselben Form wie das Maxwell'sche für die Gase." In dem Beweise hierfür wird angenommen, dass, wenn irgend ein Teil der molecularen Energie in der Form der molecularen Rotation und Vibration besteht, dieser Teil in seinem Werte constant bleibt.

Gbs. (Lp.)

A. Rysánek. Versuch einer dynamischen Erklärung der Gravitation. Exner Rep. XXIV. 90-114.

Der Verfasser fasst seine Ideen am Schlusse in folgenden Sätzen zusammen: „Aus allem Vorausgehenden folgt also, dass die Gravitation sich durch die Annahme eines Stoffes erklären lässt, dessen Teilchen mit einer mittleren, $5{,}4.10^{17}$ m weit übersteigenden Geschwindigkeit nach allen möglichen Richtungen und mit Geschwindigkeiten, die nach dem Maxwell'schen Gesetze verteilt sind, sich bewegen, und so fein sind, dass sie die Himmelskörper zu durchdringen im Stande sind. Die enorme Feinheit dieses Stoffes geht daraus hervor, dass der Radius der Wirkungssphäre zwischen einem Teilchen desselben und einem Körperatome weit unter 15.10^{-18} m liegt. Auf diesem Wege durch die Körper wird ein Teil der Bewegungsgrösse dieses Stoffes zurückgehalten, und zwar wächst dieser Teil proportionirt mit der Länge der im Körper zurückgelegten Strecke und mit der daselbst herrschenden Dichte, womit das Newton'sche Gravitationsgesetz in einer anderen Form ausgesprochen ist. Wegen der enormen Geschwindigkeit der Teilchen dieses Stoffes ist der Einfluss des Bewegungszustandes der Körper auf ihre gegenseitige Anziehung ein verschwindend kleiner. Aus demselben Grunde ist trotz der unendlichen Feinheit des Stoffes die in einem Kubikmeter desselben aufgespeicherte Energie so gross, dass sie $4{,}4.10^{16}$ Kilogrammeter bei weitem übersteigt.“ (Vgl. diesen Band, S. 59.) Lp.

A. Häussler. Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der molecularen Anziehung und Abstossung. Exner Rep. XXIV. 179-196, 209-223.

A. Häussler. Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der Emission von Licht- und Wärme-Wellen. Exner Rep. XXIV. 782-794.

M. Langlois. Sur un point de la théorie du mouvement atomique. Assoc. Franç. 159-161.

Die Atome haben, wie die aus ihnen bestehenden Kör drei Aggregatzustände. Der Uebergang von einem zum and geschieht momentan. Dabei ändert sich das Verhältnis der inne Energie und der Translationsenergie des Atoms, u. s. w.

St.

J. J. Thomson. Applications of dynamics to phy and chemistry. London. Macmillan and Co.

Anzeige in Nature XXXVIII. 585-587.

H. Frerichs. Die Hypothesen der Physik. Versu einer einheitlichen Darstellung derselben. 2. Au Norden. 143 S.

Bericht auf S. 56 dieses Bandes.

B. Troost. Eine Lichtätherhypothese zur Erkläru der Entstehung der Naturkräfte, der Grundstoffe, d Körper, des Bewusstseins und der Geistesthätigke des Menschen. 3. Ausg. Berlin. 244 S.

P. de Heen. Recherches touchant la physique comparé et la théorie des liquides. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. M. Caillard. The invisible powers of nature. Som elementary lessons in physical science. London.

J. D. Everett. Physikalische Einheiten und Constanter Nach der dritten englischen Ausgabe bearbeitet vo P. Chappuis und D. Kreichgauer. Leipzig. 150 S.

B. Elasticitätstheorie.

C. Bach. Elasticität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage. Berlin. J. Springer. XIV + 376 S. 8°.

Das vorliegende Werk bildet eine wünschenswerte Ergänzung vieler theoretischen Werke über die Festigkeitslehre, indem der Verfasser in ganz hervorragender Weise die erfahrungsmässigen Grundlagen dieses Wissenszweiges und damit die Zulässigkeit der ihr zu Grunde liegenden Hypothesen berücksichtigt. Im Interesse des vorausgesetzten Leserkreises hat sich der Verfasser bemüht, die einzelnen Probleme der Festigkeitslehre für sich allein verständlich durchzuführen und den hierzu erforderlichen mathematischen Apparat unter Heranziehung von Versuchen nach Möglichkeit zu beschränken.

Im Abschnitt I werden die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Normalspannungen besprochen. Bei der Zugfestigkeit wird zunächst das Gesetz der Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung angegeben, dann aber an der Hand von Versuchsergebnissen kritisch beleuchtet. Auch die gewöhnlich vorausgesetzte Unabhängigkeit der Dehnung von der geometrischen Form des Querschnittes wird auf ihre Zulässigkeit untersucht. Bei der Druckfestigkeit wird das Verhalten der Materialien nach Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze besprochen; es wird die Bauschinger'sche empirische Formel für die Druckfestigkeit angegeben, dann wird ebenfalls nach Beobachtungsresultaten auch der Fall in's Auge gefasst, dass die Druckbelastung nicht über den ganzen Querschnitt gleichmässig verteilt ist, sondern nur an einem Teil desselben angreift. In üblicher Weise wird zunächst die Biegungstheorie behandelt; dann werden ihre Voraussetzungen beleuchtet. Es wird namentlich die bei der Biegung zulässige Beanspruchung k_b mit der Zugfestigkeit verglichen. Es ergiebt sich, dass die erstere zunächst nicht unabhängig von der Form des Querschnitts ist und sich im allgemeinen wesentlich grösser ergiebt als die

zulässige Zugbeanspruchung. Capitel IV dieses Abschnittes behandelt die Knickung. Der Verfasser entwickelt zunächst die auch von ihm adoptirte Euler'sche Formel für die Knickfestigkeit, bespricht aber dann auch eingehend die Navier'sche (Schwarz'sche) Zerknickungsformel mit den verschiedenen Werten, welche man aus Versuchen für den in derselben auftretenden Coefficienten ermittelt hat.

Der Abschnitt II behandelt die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Schubspannungen (Schiebungen). In einer Einleitung werden zunächst die Begriffe Schiebung, Schubspannung — und Schubcoefficient erläutert, das paarweise Auftreten der Schubspannungen abgeleitet und der Zusammenhang zwischen Schiebungen und Dehnungen erörtert. Das nun folgende Capitel V behandelt in sorgfältiger und eingehender Weise die Drehung der Stäbe. Zunächst werden theoretisch streng die Torsionsmomente, bei welchen der Bruch eintritt, für Stäbe mit kreisförmigen und ellipsenförmigen Querschnitten behandelt, dann folgt eine angenäherte Lösung derselben Aufgabe für rechteckigen Querschnitt. Für diese und auch andere Querschnitte werden Versuchsresultate bezüglich der Bruchmomente angegeben. Sehr hübsch, wenn auch nur angenähert, ist die Methode zur Berechnung der Schubspannung in gebogenen Balken, welche das VI. Capitel bildet. Auch hier werden die Resultate der Rechnung mit Ergebnissen von Versuchen verglichen.

Nachdem im Abschnitte III die Formänderungsarbeit für die behandelten Fälle einfacher Beanspruchung bestimmt ist, geht der Herr Verfasser im Abschnitt IV zu den Fällen zusammengesetzter Beanspruchung über. Es behandelt nämlich das Capitel VII die aus Biegung und Zug oder Druck zusammengesetzte Beanspruchung; dabei wird im besonderen erörtert, in wie weit die Art der Lagerung zu berücksichtigen ist, während Abschnitt VIII Schub und Drehung behandelt. Im Abschnitt IX, welcher sich auf das gleichzeitige Wirken von Normalspannungen und Schubspannungen bezieht, werden zunächst die Forderungen beurteilt, welche bei der Herstellung von Constructionsteilen be-

rücksichtigt werden sollen, ob nämlich die Forderung, dass die Drehung unterhalb zulässiger Grenzen bleiben soll, mehr zu berücksichtigen, oder die Forderung, dass die Spannungen innerhalb gewisser Grenzen bleiben. Weiter wird nach Poncelet die Maximalanstrengung des Materials berechnet. Das gewonnene Resultat wird dann auf die einzelnen Fälle combinirter Beanspruchung angewandt. Der fünfte Abschnitt behandelt die stabförmigen Körper mit gekrümmter Mittellinie. Es wird zunächst die Beanspruchung des Materials durch Normalkraft, Biegungsmoment und Schubkraft für einfach gekrümmte Stäbe abgeleitet, und dann werden für einige specielle Querschnitte die hierbei auftretenden, von der Gestalt des Querschnittes abhängenden Grössen bestimmt. Angewandt werden die entwickelten Regeln auf die Berechnung der Kettenhaken und des als Walze dienenden Hohlcylinders, welcher in Bezug auf die Längsaxe gleichmässig belastet ist. Für dieses zweite Beispiel werden Versuchsergebnisse des Verfassers mitgeteilt. Dann werden in diesem Abschnitt noch die gewundenen Drehungsfedern behandelt. Den Inhalt des letzten Abschnittes bildet die Behandlung der Gefässe und plattenförmigen Körper. Nachdem der Verfasser die cylinderförmigen und hohlkugelförmigen Gefässe für inneren und äusseren Ueberdruck behandelt hat, wendet er sich der Untersuchung von Platten zu, welche auf der oberen Seite durch einen Ueberdruck belastet, am Rande der unteren Seite gestützt sind. Die Entwickelungen dieses Capitels scheinen uns nicht einwurfsfrei zu sein; jedoch stimmen die Resultate im allgemeinen mit den Ergebnissen von Versuchen überein.

Dem gediegenen Inhalt des Werkes entspricht die äussere Ausstattung desselben. Besonders gereichen ihm die Tafeln zur Zierde, auf welchen die Ergebnisse verschiedener Versuche durch Abbildungen veranschaulicht werden, wir heben besonders diejenigen hervor, welche sich auf die Torsion der Stäbe beziehen.

Gerade die besondere Betonung der Versuchsergebnisse wird dem Werke nicht nur in den Kreisen der Techniker, für welche es zunächst bestimmt zu sein scheint, sondern auch unter den Mathematikern und Physikern vielen Beifall erringen. F. K.

R. KLIMPERT. Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelnverzeichnis nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben zum Gebrauch an niederen und höheren Schulen sowie zum Selbststudium und Nachschlagen für Bau- und Maschinentechniker bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. J. Maier. VI + 298 S. 8°.

Das vorliegende Werk verfolgt den Zweck, ohne Zuhülfenahme der höheren Mathematik die für die Praxis wichtigsten Regeln und Aufgaben der Festigkeitslehre zu behandeln; es ist im wesentlichen also wohl für die niederen Fachschulen und die Kreise der mathematisch nicht besonders vorgebildeten Techniker bestimmt.

Man muss gestehen, dass das bezeichnete Ziel als erreicht betrachtet werden kann. Die Regeln der Zug- und Druckfestigkeit, der Abscherungsfestigkeit, Biegungsfestigkeit, Torsionselasticität und Zerknickungsfestigkeit werden, soweit es ohne höhere Mathematik möglich ist, abgeleitet. Allerdings wird ja durch die principielle Vermeidung der höheren Mathematik der Zusammenhang zwischen den einzelnen Teilen gestört; jedoch tritt dieser Nachteil für die Zwecke des Buches so gut wie vollständig zurück, da der Verfasser jedem der bezeichneten Abschnitte eine eingehende Beschreibung der bezüglichen Versuche voranschickt und im Anschluss daran das betreffende Fundamentalgesetz formulirt. Bezüglich der Biegungsfestigkeit macht sich dieser Nachteil gar nicht merklich, da der Verfasser diesen Teil mit den ersten Capiteln durch elementare mathematische Betrachtungen in Zusammenhang bringt. Es gelingt ihm sogar, die Gleichung der elastischen Linie, falls dieselbe unendlich wenig von der Geraden abweicht, auf elementarem Wege abzuleiten. Eigentlich störend wirkt die Beschränkung auf die elementare Mathematik nur an einer einzigen Stelle, nämlich bei der Ableitung der Euler'schen Gleichung für die Knickfestigkeit Der Verfasser sieht sich dort gezwungen, die Gleichung der ge-

bogenen Linie ohne Ableitung zu geben und in einer Note mit Hülfe der höheren Mathematik abzuleiten. Aber auch im übrigen ist die Untersuchung nicht fehlerfrei; der Verfasser giebt nämlich für die gebogene Linie die Gleichung

$$\frac{y}{s} = \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{ET}}\right)$$

an, wo s der Wert von y für $x=l$, d. h. der Wert der Ausbiegung für das obere Ende des auf Knickung beanspruchten Stabes sein soll. Derselbe erfüllt zunächst nicht die Bedingung $y' = 0$ für $x = 0$, welche für den betrachteten Fall des unten eingeklemmten Balkens erfüllt werden muss. Ferner ist die Gleichung offenbar nur möglich, wenn $\sin\left(l\sqrt{\frac{P}{ET}}\right) = 1$ ist. Es wird also das zu beweisende Resultat in die Voraussetzung mit eingezogen.

Abgesehen von dieser einen Unrichtigkeit, haben wir keinen Fehler bemerkt; im Gegenteil, die Erklärungen sind im allgemeinen deutlich, präcis und klar. Wesentlich unterstützt werden sie durch die zahlreichen Zeichnungen. Einen Hauptvorzug des Buches erblicken wir in der schon einmal hervorgehobenen Betonung der physikalischen und experimentellen Begründung der allgemeinen Regeln der Elasticitätslehre.

Diesen Vorzügen des Buches stehen einige Eigenschaften gegenüber, welche wir als entschiedene Nachteile betrachten müssen; dieselben scheinen uns mit dem im Zusammenhang zu stehen, was im Titel als System Kleyer bezeichnet ist. Das Buch ist nämlich in der Form von Fragen und Antworten abgefasst. Lässt sich nun schon zunächst im allgemeinen darüber streiten, ob diese Form die für ein Lehrbuch geeignetste sei, so wirkt sie in dem vorliegenden Falle ganz besonders störend, durch die Art ihrer Anwendung. Man kann doch einen Unterricht in der Elasticitätslehre schlechterdings nicht mit der Frage beginnen:

„Was versteht man unter der Elasticität eines Körpers?“ Ebensowenig wird man an einen zu Belehrenden Fragen von der folgenden Art mit Aussicht auf Antwort richten können:

Frage 14. „Welches Verfahren wandte Gerstner bei sei gründlichen Untersuchungen über die Ausdehnung und Ela citāt des Eisendrahtes an?“

Frage 49. „Was versteht man unter der neutralen Fa schicht oder der elastischen Fläche?“

Frage 12. „Da die von s'Gravesande angewandte Meth für dickere Drähte und für Stäbe nicht mehr möglich ist u auch aus dem in Erklärung 3 angegebenen Grunde wandte W heim welches Verfahren an, um die Verlängerung der Stäbe messen?“

Diese Beispiele mögen genügen; sie liessen sich ganz b trächtlich vermehren, da fast auf jeder Seite eins oder mehr finden sind.

Die letzte der angeführten Fragen ist bezeichnend für ei stilistische Eigentümlichkeit des Verfassers, nämlich für die häu angewandte, ganz wunderbare Stellung des Fragewortes, z. B

Frage 23. „Wenn man einen grösseren Streifen Kautschuk oder noch besser einen Gummischlauch an seinen beiden Ende mit beiden Händen anfasst und ihn durch Zug verlängert, s lässt sich bei aufmerksamer Beobachtung ausser der Verlängerun des Stabes noch welche Formveränderung wahrnehmen?“ u. s. w u. s. w. F. K.

P. J. Johnen. Elemente der Festigkeitslehre in elementarer Darstellung mit zahlreichen, teilweise vollständig gelösten Uebungsbeispielen, sowie vielen praktisch bewährten Constructionsregeln für Maschinen- und Bautechniker, sowie zum Gebrauch in technischen Lehranstalten. Weimar. B. Fr. Voigt. VIII + 321 S. 8°.

„Zweck der vorliegenden Arbeit ist zunächst, den Schülern der oberen Gewerbeklasse der Mühlhauser Gewerbeschule ein Buch zu liefern, das zur Wiederholung der vom Verfasser seit Jahren an genannter Anstalt behandelten Festigkeitslehre dienen und von dem Teil der Schüler, welche gleich in das praktische Leben eintreten, zum weiteren Studium benutzt werden kann.“

Dem Leserkreise entsprechend, ist das Buch möglichst elementar gehalten; besonders wird von der Anwendung der höheren Mathematik Abstand genommen. Trotzdem gelangen die technisch wichtigen Probleme der Festigkeitslehre in ziemlicher Vollständigkeit zur Behandlung und werden an einer grossen Zahl passend gewählter Beispiele, die meistens der Praxis des Bau- und Maschinenwesens entnommen sind, erläutert. Nur hin und wieder macht sich der Verzicht auf den Gebrauch der höheren Mathematik störend geltend, indem der Verfasser gezwungen ist, Resultate ohne Beweis mitzuteilen, für deren Herleitung ihm keine elementaren Methoden zu Gebote stehen. Dahin gehört z. B. der § 3, welcher von der Stärke der Gefässwände mit innerem Ueberdruck handelt. Für hohlkugelförmige und hohlcylindrige Gefässe werden zunächst unter der Annahme gleichmässig verteilter Spannungen Näherungsformeln (Mariotte) für den Fall dünner Gefässe abgeleitet und dann die genaueren Formeln von Lamé, Brix und Grashof ohne Beweis mitgeteilt. An einigen praktischen Beispielen werden die Resultate, welche die verschiedenen Formeln liefern, mit einander verglichen.

Auch bei der Knickfestigkeit wird die Grundformel von Euler $P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2}$ ohne Beweis mitgeteilt; allerdings geht der Mitteilung dieser Formel eine elementare Betrachtung vorauf, welche das Problem der Knickung auf dasjenige der Biegung durch eine zur Richtung des Stabes senkrechte Kraft zurückführt. Ist die letztere gleich P_1, so wird die Abweichung des freien Endes

$$s = \frac{P_1 l^3}{3EJ}.$$

„Soll nun statt der Kraft P_1 eine in Richtung der ursprünglichen Stabaxe auf das freie Ende wirkende Kraft P die gleiche Wirkung erzielen, so muss offenbar

$$Ps = P_1 l$$

sein.“ Das ist nicht ganz unanfechtbar, denn beide Kräfte geben zwar dann für das freie wie für das eingeklemmte Ende gleiche Momente, während das für die mittleren Teile des Balkens

keineswegs der Fall sein wird; ein angenähertes Resultat wird man allerdings erhalten, da beide Momente vom Werte Null bis zu dem Werte für das eingeklemmte Ende steigen. Begnügt man sich mit der betreffenden Näherung, so erhält man:

$$P = \frac{3EJ}{l^2}.$$

Wie die Zug- und Druckfestigkeit zur Bestimmung von Gefässen mit innerem Ueberdruck verwendet wurde, so kommt die Knickfestigkeit in ganz eigenartiger Weise zur Anwendung bei der Bestimmung von Gefässen, welche äusseren Ueberdruck zu erleiden haben.

Im allgemeinen ist die Einteilung des Stoffes die übliche. Nach einer Einleitung, in welcher die Begriffe des Elasticitäts-, Sicherheits-, Trag- bezw. Bruchmoduls erläutert werden, kommen im ersten Capitel die Zug- und Druck-, die Biegungs-, die Schub- und die Torsionsfestigkeit zur Behandlung. Im zweiten Capitel wird die zusammengesetzte Elasticität, die Zerknickungsfestigkeit, die excentrische, der schiefe Zug oder Druck, und die Combination von Biegung und Torsion behandelt.

Das Werk wird für den Praktiker einen besonderen Wert durch die zahlreichen Tabellen erhalten, welche demselben beigegeben sind. F. K.

E. Sarrau. Notions sur la théorie de l'élasticité. Nouv. Ann. (3) VII. 503-552.

Der vorliegende kurze Abriss ist die Reproduction eines auf wenige Vorlesungen beschränkten Cursus über Elasticitätstheorie, welchen der Verfasser an der École Polytechnique gehalten hat.

Zunächst werden die allgemein gültigen und von der speciellen Natur eines Körpers unabhängigen Beziehungen zwischen den Spannungen erörtert. Dann werden die Eigenschaften der Verschiebungen untersucht. Im dritten Abschnitt werden die Spannungen durch die Ableitungen der Verschiebungen ausgedrückt, und im Anschluss daran die Differentialgleichungen für die Deformationen elastischer Körper im Abschnitt IV entwickelt.

Im Abschnitt V werden einige wichtige Beispiele für das Gleichgewicht elastischer Körper behandelt. Im sechsten Abschnitt werden die Schwingungen und zwar besonders die einfachen Schwingungen elastischer Körper untersucht. F. K.

K. Wesendonck. Ueber die Bedingungen, denen die Elasticitätsconstanten genügen müssen, damit die Lösungen elastischer Probleme eindeutig sind. Wiedemann Ann. XXXV. 121-125.

Damit die im Titel gestellte Bedingung erfüllt sei, darf die quadratische Form der sechs Grössen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y mit im allgemeinen 21 Coefficienten, deren Ableitungen die sechs Druckcomponenten sind, nur dann ihren grössten Wert Null erreichen, wenn die sechs Argumente sämtlich verschwinden.

Der Verfasser giebt eine Kritik des von Neumann in dem Falle

$$a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = a_{34} = a_{35} = a_{36} = 0,$$
$$a_{12} = a_{66},\ a_{23} = a_{44},\ a_{13} = a_{55}$$

eingeschlagenen Verfahrens zur Erfüllung dieser Bedingung und giebt im Anschluss an Jacobi (J. für Math. LIII. 281) die richtigen Beziehungen an. F. K.

W. Voigt. Ueber adiabatische Elasticitätsconstanten. Gött. N. 359-374.

Der schon von Maxwell gemachte Unterschied zwischen isothermischen und adiabatischen Elasticitätsconstanten gewinnt dadurch an praktischem Interesse, dass gewisse Erscheinungen von den ersteren, andere von den letzteren abhängen.

Bezeichnen x_x, x_y etc. die in bekannter Weise aus den Ableitungen der Verrückungen gebildeten Ausdrücke, von denen der elastische Zustand abhängt, Θ die absolute Temperatur, dE den Zuwachs der Energie an einer bestimmten Stelle, dS die zugeführte Arbeit und dQ die zugeführte Wärme, so gelten die Gleichungen

$$dE = dS + AdQ,$$

$$dE = \frac{\partial E}{\partial x_x} dx_x + \frac{\partial E}{\partial x_y} dx_y + \frac{\partial E}{\partial x_z} dx_z + \frac{\partial E}{\partial y_y} dy_y + \frac{\partial E}{\partial y_z} dy_z + \frac{\partial E}{\partial z_z} dz_z + \frac{\partial E}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\varepsilon d\Omega^2}{2},$$

$$dQ = \Theta \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_x} dx_x + \frac{\partial U}{\partial x_y} dx_y + \frac{\partial U}{\partial x_z} dx_z + \frac{\partial U}{\partial y_y} dy_y + \frac{\partial U}{\partial y_z} dy_z + \frac{\partial U}{\partial z_z} dz_z + \frac{\partial U}{\partial \Theta} d\Theta \right\},$$

$$dS = -(\Xi_x dx_x + H_x dx_y + Z_x dx_z + H_y dy_y + H_z dy_z + Z_z dz_z) + \frac{\varepsilon d\Omega^2}{2},$$

wo Ξ_x, H_x, etc. die Druckkräfte, $\frac{1}{2}\varepsilon d\Omega^2$ die lebendige Kraft bezeichnen. Man erhält also, wenn

$$\Phi = E - A\Theta U$$

gesetzt wird,

$$\Xi_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_x}, \quad \Xi_y = H_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_y}, \ldots, \quad AU = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}.$$

Demgemäss kann man schreiben:

$$dQ = -\frac{\Theta}{A} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Theta^2} d\Theta + \frac{\Theta}{A} \left[\frac{\partial \Xi_x}{\partial \Theta} dx_x + \cdots + \frac{\partial Z_z}{\partial \Theta} dz_z \right].$$

Die sogenannte wahre Wärmecapacität $\mathfrak{C}$ ergiebt sich hieraus, wenn man dx_x, dx_y, ..., dz_z gleich Null setzt:

$$\mathfrak{C} = -\frac{\Theta}{A} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Theta^2} = \varepsilon c,$$

wo ε die Dichtigkeit, c die specifische Wärme bezeichnet. Die Wärmemenge, welche zuzuführen ist, wenn die Kräfte constant sind, erhält man, indem man x_x, x_y, ..., z_z als Function der Druckkräfte und der Temperatur ansieht, und dann an Stelle der Differentiale $\frac{\partial x_x}{\partial \Theta} d\Theta$, $\frac{\partial x_y}{\partial \Theta} d\Theta$ etc. setzt.

Diese specifische Wärme ist also

$$c' = c + \frac{\Theta}{A\varepsilon} \left(\frac{\partial \Xi_x}{\partial \Theta} \frac{\partial x_x}{\partial \Theta} + \cdots + \frac{\partial Z_z}{\partial \Theta} \frac{\partial z_z}{\partial \Theta} \right).$$

Bezeichnet nun Q_x, Q_y, Q_z die durch ein zur x-, y- oder z-Axe senkrechtes Flächenelement fliessende Wärmemenge, so ist bekanntlich

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}\right)$$

und demgemäss:

$$-\varepsilon c \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}\right) + \frac{\Theta}{A}\left(\frac{\partial \Xi_x}{\partial \Theta}\frac{\partial x_x}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial Z_z}{\partial \Theta}\frac{\partial z_z}{\partial t}\right).$$

Besonders wichtig ist der Fall, dass die Temperaturänderung lediglich durch die Ausdehnungsänderung bewirkt wird, also ϑ mit jenen erster Ordnung ist; dann wird Φ eine homogene quadratische Function der sieben Grössen x_x, x_y, ..., ϑ, und man erhält

$$-\Xi_y = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y - q_1\vartheta = -(X_x + q_1\vartheta),$$

. . . .

$$AU = \frac{A\varepsilon c\vartheta}{\Theta} + (q_1 x_x + q_2 y_y + q_3 z_z + q_4 y_z + q_5 z_x + q_6 x_y),$$

wo c von ϑ, x_x, x_y, ... unabhängig ist.

Hieraus erhält man die allgemeine specifische Wärme vermittelst der Gleichung

$$\varepsilon C d\vartheta = \Theta dU.$$

Wirken auf den Körper keine Drucke, und ist die Temperatur desselben überall die gleiche, so genügt man den Hauptgleichungen durch

$$\Xi_x = 0, \qquad \Xi_y = 0, \qquad Z_z = 0,$$
$$x_x = a_1\vartheta, \qquad y_y = a_2\vartheta, \ \ldots, \ x_y = a_6\vartheta,$$

wo a_1, a_2, a_3 die Coefficienten der thermischen linearen Dilatationen, a_4, a_5, a_6 die der thermischen Winkeländerungen sind, welche offenbar den Gleichungen:

$$q_h = \sum_{k=1}^{k=6} c_{hk} a_k \qquad (h = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

genügen müssen. Löst man dieselben nach a_h auf, so möge sich ergeben:

$$a_h = \sum_{k=1}^{k=6} s_{hk} q_k \qquad (h = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Dann ergeben sich weiter die Gleichungen

$$-x_x = s_{11}\Xi_x + s_{12}H_y + \cdots + s_{16}\Xi_y - a_1\vartheta,$$

$$AU = \frac{A\varepsilon c'\vartheta}{\Theta} - (a_1\Xi_x + \cdots + a_6\Xi_y),$$

wo c' zur Abkürzung für

$$c + \frac{\Theta}{A\varepsilon}(q_1 a_1 + \cdots + q_6 a_6)$$

gesetzt ist und offenbar die specifische Wärme für constante Spannung bezeichnet.

Für dreifach symmetrische Krystalle ist $q_4 = q_5 = q_6 = 0$, $a_4 = a_5 = a_6 = 0$; sind $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die Wärmeleitungsfähigkeiten, so erhält man demnach

$$\varepsilon c\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \varkappa_1\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \varkappa_2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \varkappa_3\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}$$
$$- \frac{\Theta}{A}\left(q_1\frac{\partial x_x}{\partial t} + q_2\frac{\partial y_y}{\partial t} + q_3\frac{\partial z_z}{\partial t}\right),$$

welche für reguläre Krystalle und unkrystallinische Substanzen in die einfachere Gleichung:

$$\varepsilon c\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \varkappa\Delta\vartheta - \frac{\Theta_q}{A}\frac{\partial\delta}{\partial t}$$

übergeht, wo δ die kubische Dilatation bezeichnet.

Man hat ferner

$$c' - c = \frac{3qa\Theta}{A\varepsilon},$$

sodass man schreiben kann

$$\varepsilon c\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \varkappa\Delta\vartheta - \frac{\varepsilon(c'-c)}{3a}\frac{\partial\delta}{\partial t},$$

wo a der thermische Ausdehnungscoefficient ist. Ist die Wärmeströmung unmerklich (z. B. bei Schwingungen), so kann man setzen:

$$\varepsilon c\vartheta = -\frac{\Theta}{A}(q_1 x_x + \cdots + q_6 x_y),$$

$$-\Xi_x = \left(c_{11} + \frac{q_1 q_1\Theta}{A\varepsilon c}\right)x_x + \left(c_{12} + \frac{q_1 q_2\Theta}{A\varepsilon c}\right)y_y + \left(c_{13} + \frac{q_1 q_3\Theta}{A\varepsilon c}\right)z_z$$
$$+ \left(c_{14} + \frac{q_1 q_4\Theta}{A\varepsilon c}\right)y_z + \left(c_{15} + \frac{q_1 q_5\Theta}{A\varepsilon c}\right)z_x + \left(c_{16} + \frac{q_1 q_6\Theta}{A\varepsilon c}\right)x_y \text{ etc.}$$

Dieses sind aber Ausdrücke von derselben Art wie die Druckkräfte $-X_x$, $-X_y$, ..., nur dass an Stelle der isothermischen Constanten c_{hk} die adiabatischen Constanten $\gamma_{hk} = c_{hk} + \frac{q_h q_k \Theta}{A\varepsilon c}$ getreten sind. Ebenso treten an Stelle der isothermischen Coefficienten s_{hk} die adiabatischen $\sigma_{hk} = s_{hk} - \frac{a_h a_k \Theta}{A\varepsilon c'}$.

Demgemäss ergiebt sich der adiabatische Dehnungscoefficient E einer Richtung, wenn E den isothermischen Dehnungscoefficienten, a den thermischen linearen Dilatationscoefficienten bezeichnet:

$$\mathrm{E} = E - \frac{a^2 \Theta}{A\varepsilon c'}.$$

Ebenso ergiebt sich der adiabatische Drillungscoefficient T für ein Prisma aus dem isothermischen Drillungscoefficienten T vermittelst der Gleichung:

$$\mathrm{T} = T - \frac{a'^2_{01} \Theta}{A\varepsilon c'},$$

wo a'_{01} die thermische Winkeländerung zwischen der Längsrichtung und der grösseren Querrichtung bezeichnet.

Der Verfasser entwickelt besonders noch für den Fall regulär krystallinischer oder isotroper Substanzen die in Frage kommenden Grössen; es ergiebt sich, dass für die Druckkräfte ein Unterschied nur dann auftritt, wenn die kubische Dilatation einen von Null verschiedenen Wert hat.

Für gewisse Substanzen werden die adiabatischen und isothermischen Coefficienten berechnet.

Zum Schluss bespricht der Verfasser die Modificationen, welche einzuführen sind, wenn zwar die Temperaturänderungen grösser, aber die Deformationen noch immer klein sind

F. K.

W. Voigt. Bestimmung der Elasticitätsconstanten für Flussspat und Pyrit. Gött. N. 299-313.

W. Voigt. Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Flussspat, Pyrit, Steinsalz und Sylvin. Wiedemann Ann. XXXV. 642-661.

Der Verfasser entwickelt zunächst für das regelmässige Krystallsystem Beziehungen zwischen der Biegung und dem Biegungscoefficienten, sowie der Drillung und dem Drillungscoefficienten, und stellt diese beiden Coefficienten durch Elasticitätsconstanten dar.

Die Beobachtungen, auf deren Ergebnisse hier nicht näher eingegangen werden kann, sind in derselben Weise wie die früheren angestellt worden. (Gött. N. 1887, F. d. M. XIX. 1055.)

F. K.

P. Groth. Ueber die Elasticität der Krystalle. Münch. Ber. 256.

Die theoretischen Ergebnisse von W. Voigt über die Biegungselasticität von Krystallen haben sich bei den Versuchen von W. Voigt selbst und von Vater bestätigt. F. K.

Finsterwalder. Ueber die Verteilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen. Münch. Ber. 257-266.

Der Elasticitätscoefficient eines Stäbchens, dessen Längsrichtung mit den drei Hauptaxen die Richtungscosinus α, β, γ bildet, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\varrho = a_{11}\alpha^4 + a_{22}\beta^4 + a_{33}\gamma^4 + 2a_{12}\alpha^2\beta^2 + 2a_{23}\beta^2\gamma^2 + 2a_{31}\gamma^2\alpha^2.$$

Fasst man $\varrho\alpha$, $\varrho\beta$, $\varrho\gamma$ als Coordinaten eines Punktes auf, so kann man die eben genannte Beziehung durch die Fläche ausdrücken:

$$a_{11}x^4 + a_{22}y^4 + a_{33}z^4 + 2a_{12}x^2y^2 + 2a_{23}y^2z^2 + 2a_{31}z^2x^2 = \varrho^5,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho.$$

Einem bestimmten ϱ entspricht dann der Schnitt einer Kugel um den Anfangspunkt als Mittelpunkt mit einem Inviduum aus einer Schar ähnlicher und ähnlich liegender concentrischer Flächen vierter Ordnung. Die so entstandene Fläche kann man aber auch auf einer Ebene abbilden, indem man

$$\alpha^2 = X, \quad \beta^2 = Y, \quad \gamma^2 = Z$$

setzt; dann ist

$$X + Y + Z = 1$$

und

$$\varrho = a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}XY + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX.$$

Jedem ϱ entspricht also eine Gleichung zweiten Grades in X, Y, Z, d. h. also ein Kegelschnitt in der Ebene

$$X + Y + Z = 1.$$

Da α^2, β^2, γ^2 positiv sind, so kommt nur dasjenige Stück der Ebene in Frage, welches zwischen den drei Coordinatenebenen liegt, d. h. ein Dreieck. Man sieht auch ein, dass jedem Punkt in der Ebene acht Punkte auf der Fläche entsprechen.

Der Verfasser discutirt die Abbildung und wendet die gewonnenen Resultate auf die verschiedenen Krystallsysteme an.

F. K.

E. H. Amagat. Sur la vérification expérimentale des formules de Lamé et la valeur du coefficient de Poisson. C. R. CVI. 479-482.

Der Verfasser untersucht zwei Hohlcylinder gleichen Materials, derselben Höhe und desselben inneren Radius R_0, deren äussere Radien R und R_1 von einander verschieden sind, und zwar ein Paar Cylinder von Bronze und zwei Paare von Stahlcylindern.

Er findet folgende Gesetze bestätigt:

1) Wirkt auf die äussere und auf die innere Wandung derselbe Druck, so ist die Aenderung des inneren Volumens für beide Cylinder dieselbe.

2) Bei demselben äusseren Druck verhalten sich die Aenderungen des Volumens wie

$$\left(1 - \frac{R_0^2}{R_1^2}\right) : \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2}\right).$$

3) Dasselbe gilt bezüglich des äusseren Volumens bei innerem Druck.

4) Bei demselben Cylinder ist die Aenderung des äusseren Volumens bei innerem Druck gleich derjenigen des inneren Volumens bei äusserem Druck.

Die Poisson'sche Constante μ findet der Verfasser, indem er die Aenderungen des Volumens unter Einfluss einer Zugkraft P und unter Einfluss eines äusseren Druckes P_1 betrachtet,

für welche die Formeln

$$\delta V = VP\alpha(1-2\mu),$$

$$\delta V_1 = VP\alpha \frac{R^2(5-4\mu)}{R^2-R_1^2}$$

gelten.

Es ergab sich bei den Cylindern von Stahl:

$$\mu = 0{,}2609, \quad \text{resp.} \quad \mu = 0{,}2620,$$

bei denen von Bronze

$$\mu = 0{,}3190 \quad \text{und} \quad 0{,}3204.$$

F. K.

C. Somigliana. Sopra la dilatazione cubica di un corpo elastico isotropo in un spazio di curvatura costante. Annali di Mat. (2) XVI. 101-105.

Der Verfasser stellt zunächst in einem Raume constanter Krümmung für einen Körper, auf welchen gegebene Kräfte wirken, die kubische Dilatation durch Integrale dar, welche über die Oberfläche und das ganze Gebiet erstreckt sind. Von dieser Formel macht der Verfasser Gebrauch für den Fall einer Kugel, auf welche lediglich ein constanter Oberflächendruck wirkt.

F. K.

E. Padova. Sull' uso delle coordinate curvilinee in alcuni problemi della teoria matematica della elasticità. 30 S. Aus dem III. Bde. der: Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario della origine della Università di Bologna. 3 Vol. Padova. Tipografia del Seminario. 4°.

Wird ein orthogonales krummliniges Coordinatensystem q_1, q_2, q_3 angenommen, und erhält das Linienelement des Raumes in diesem Systeme die Form:

$$ds^2 = k_1^2 dq_1^2 + k_2^2 dq_2^2 + k_3^2 dq_3^2,$$

so werden bekanntlich (Siehe E. Beltrami: Sulle equazioni generali della elasticità, Annali di Mat. (2) X) die Dilatationen α, β, γ („Verschiebungen" nach Weyrauch, Theorie elastischer Körper), die Gleitungen λ, μ, ν („Normalgleitungen" nach

Weyrauch) und die Elementarrotationen p, q, r als Functionen der Verrückungen R_1, R_2, R_3 durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{k_1}\left[\dfrac{\partial R_1}{\partial q_1} + \dfrac{1}{k_2}\dfrac{\partial k_1}{\partial q_2}R_2 + \dfrac{1}{k_3}\dfrac{\partial k_1}{\partial q_3}R_3\right], \\ \qquad\qquad \beta = \ldots,\ \gamma = \ldots, \\ \lambda = \dfrac{1}{k_2}\dfrac{\partial R_3}{\partial q_2} + \dfrac{1}{k_3}\dfrac{\partial R_2}{\partial q_3} - \dfrac{1}{k_2 k_3}\left(\dfrac{\partial k_2}{\partial q_3}R_2 + \dfrac{\partial k_3}{\partial q_2}R_3\right), \\ \qquad\qquad \mu = \ldots,\ \nu = \ldots, \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad p = \frac{1}{k_3}\frac{\partial R_2}{\partial q_3} - \frac{1}{k_2}\frac{\partial R_3}{\partial q_2} + \frac{1}{k_2 k_3}\left(\frac{\partial k_2}{\partial q_3}R_2 - \frac{\partial k_3}{\partial q_2}R_3\right),$$
$$q = \ldots,\quad r = \ldots$$

Damit vorgegebenen Werten von α, β, γ, λ, μ, ν, p, q, r wirkliche Verrückungen entsprechen, müssen die aus den obigen Gleichungen sich ergebenden Ausdrücke F_{is} von $\dfrac{\partial R_i}{\partial q_s}$ den Bedingungen:

$$\frac{\partial F_{is}}{\partial q_h} = \frac{\partial F_{ih}}{\partial q_s}$$

genügen; durch Entwickelung dieser Relationen erhält man neun Gleichungen, aus welchen sich die partiellen Differentialquotienten von p, q, r als Functionen von α, β, γ, λ, μ, ν, p, q, r, R_1, R_2, R_3 ergeben (Gleichungen (c)). Handelt es sich um einen euklidischen Raum, so fallen, wegen der in einem solchen Raume bestehenden Relationen:

$$\frac{\partial^2 k_1}{\partial q_2 \partial q_3} = \frac{1}{k_2}\frac{\partial k_1}{\partial q_2}\frac{\partial k_2}{\partial q_3} + \frac{1}{k_3}\frac{\partial k_1}{\partial q_3}\frac{\partial k_3}{\partial q_2},$$
$$\frac{\partial^2 k_2}{\partial q_3 \partial q_1} = \ldots,\quad \frac{\partial^2 k_3}{\partial q_1 \partial q_2} = \ldots,$$
$$\frac{1}{k_1^2}\frac{\partial k_2}{\partial q_1}\frac{\partial k_3}{\partial q_1} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{k_2}\frac{\partial k_3}{\partial q_2}\right)}{\partial q_2} - \frac{\partial\left(\frac{1}{k_3}\frac{\partial k_2}{\partial q_3}\right)}{\partial q_3}$$
$$\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial k_3}{\partial q_2}\frac{\partial k_1}{\partial q_2} = \ldots,\quad \frac{1}{k_3^2}\frac{\partial k_1}{\partial q_3}\frac{\partial k_2}{\partial q_3} = \ldots,$$

sämtliche R_1, R_2, R_3 enthaltenden Glieder aus den Gleichungen (c) weg. Stellt man nun die Bedingungen für die Existenz der Functionen p, q, r auf, deren Differentialquotienten durch die

Gleichungen (c) gegeben werden, so entstehen hieraus neun G chungen (Gleichungen (d)), die sich aber auf sechs reduciren. Gleichungen (a), nach Anwendung der Gleichungen (b), entha nur α, β, γ, λ, μ, ν und ihre Differentialquotienten, und stellen Bedingungen dar, welchen diese Functionen genügen müs wenn denselben wirklich eine Verrückung entsprechen soll. der Raum ein constantes, aber nicht verschwindendes Krümmu mass, so fallen R_1, R_2, R_3 aus (c) nicht weg; das findet aber in Gleichungen (d) statt, welche sich, wie früher, auf sechs reduc (Mit der Behandlung des Problemes für einen beliebigen Ra beschäftigt sich eine spätere Arbeit des Verfassers: Sulle de mazioni infinitesime, Rom. Acc. L. Rend. (4) V. 174-78). S man endlich in den Gleichungen (d) statt α, β, γ, λ, μ, ν ihre A drücke (Gleichungen (e)) durch die Normal- und Tangenti spannungen Θ_1, Θ_2, Θ_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3 an den Seitenflächen ei Elementarparallelepipedons, so ergeben sich die Bedingung dafür, dass vorgegebene Grössen Θ_i, Ω_i ein System von Spa nungen im Inneren eines elastischen Körpers bilden können. D Gleichungen (e) lauten für einen isotropen Körper:

$$\alpha = \frac{1}{2B}\left[\frac{2B-A}{4B-3A}(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3)-\Theta_1\right],\quad \beta = \ldots,\quad \gamma = \ldots$$

$$\lambda = -\frac{\Omega_1}{B},\quad \mu = \ldots,\quad \nu = \ldots,$$

wo A, B zwei Constanten sind.

Eine erste Anwendung bildet die Untersuchung des Glei gewichtes eines von einer Umdrehungsfläche und zwei Meridia ebenen begrenzten isotropen Körpers unter besonderen Voraus setzungen; zweitens wird ein von einer Kegelfläche begrenzte Körper betrachtet. Im ersten Falle werden cylindrische, im zweiten polare Coordinaten gebraucht. Vi.

E. Padova. Sopra un teorema della teoria matematic della elasticità. Nuovo Cimento. (3) XXIII. 57-61.

Eine neue Methode zur Bestimmung der Spannungen, welche in einem isotropen elastischen Körper von vorgegebenen äusseren

Kräften X, Y, Z erregt werden. Man gelangt zu den folgenden Formeln:

$$X_x = \frac{\theta}{1+\theta} f + \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + U_1,$$
$$Y_y = \frac{\theta}{1+\theta} f + \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + U_1,$$
$$Z_z = \frac{\theta}{1+\theta} f + \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} + U_1,$$
$$Y_z = Z_y = \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y},$$
$$Z_x = X_z = \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z},$$
$$X_y = Y_x = \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x},$$

wo:

$$f = -\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \frac{dS}{r},$$

$$\Delta^2 \Psi = f, \quad \Delta^2 \Psi_1 = X - \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \Delta^2 \Psi_2 = Y - \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \Delta^2 \Psi_3 = Z - \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$U_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\left(X - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\alpha + \left(Y - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\beta + \left(Z - \frac{\partial f}{\partial z}\right)\gamma}{r} d\sigma,$$

dS das Raumelement, $d\sigma$ das Oberflächenelement, α, β, γ die Richtungscosinus der Normale, θ die gebräuchliche Elasticitätsconstante ist. Vi.

V. Cerruti. Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo per alcuni speciali condizioni ai limiti. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV$_1$. 785-792.

Unter Einführung krummliniger orthogonaler Coordinaten, für welche das Linienelement lautet

$$ds^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2,$$

möge die Gleichung der Oberfläche eines elastischen Körpers in q_3 = const. übergehen. Wirken auf die Oberfläche nur Druckkräfte mit den Componenten φ_1, φ_2, φ_3, und sind die Verschiebungen an der Oberfläche nach den rechtwinkligen Coordinaten

$u, v, w,$ so erhält man für die kubische Dilatation Θ den Ausdruck:

$$4\pi\varrho R^2\Theta = -\int\left(\frac{\varphi_1}{Q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{\varphi_2}{Q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{\varphi_3}{Q_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{R}\right)\right)ds$$
$$-2\varrho\omega^2\int(\mathfrak{K}_1\varkappa_1+\mathfrak{K}_2\varkappa_2+\mathfrak{K}_3\varkappa_3)d\sigma,$$

wo $\varkappa_1 = u\frac{\partial q_1}{\partial x}+v\frac{\partial q_1}{\partial y}+w\frac{\partial q_1}{\partial z}$, etc.,

$$\mathfrak{K}_1 = Q_3\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_3^2}\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{Q_1Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{1}{R}+\frac{1}{Q_3^2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{1}{R},$$
$$\mathfrak{K}_3 = Q_3\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3^2}\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{1}{R}+\frac{1}{Q_2^2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{1}{R},$$

während $\mathfrak{K}_2$ aus $\mathfrak{K}_1$ durch Vertauschung des Index 1 mit 2 entsteht. Bezeichnet man nun durch $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \varkappa'_1, \varkappa'_2, \varkappa'_3$ ein zweites zusammengehöriges System von Grössen, so kann man vermöge der bekannten Gleichung

$$\int(Q_1\varphi'_1\varkappa_1+Q_2\varphi'_2\varkappa_2+Q_3\varphi'_3\varkappa_3)ds$$
$$=\int(Q_1\varphi_1\varkappa'_1+Q_2\varphi_2\varkappa'_2+Q_3\varphi_3\varkappa'_3)ds$$

den Ausdruck für die kubische Dilatation schreiben:

$$4\pi\varrho R^2\Theta = -\int\Big\{\varphi_1\left(Q_1\varkappa'_1+\frac{1}{Q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{R}\right)\right)$$
$$+\varphi_2\left(Q_2\varkappa'_2+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{1}{R}\right)+\varphi_3\left(Q_3\varkappa'_3+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{1}{R}\right)\Big\}ds$$
$$-\int\{\varkappa_1(2\varrho\omega^2\mathfrak{K}_1-Q_1\varphi'_1)+\varkappa_2(2\varrho\omega^2\mathfrak{K}_2-Q_2\varphi'_2)$$
$$+\varkappa_3(2\varrho\omega^2\mathfrak{K}_3-Q_3\varphi'_3)\}ds.$$

Ist die Aufgabe gelöst, $\varphi'_1, \varphi'_2, \varkappa'_3$ zu bestimmen, wenn

$$Q_1\varkappa'_1+\frac{1}{Q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{R}\right)=0,\quad Q_2\varkappa'_2+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{R}\right)=0,$$
$$2\varrho\omega^2\mathfrak{K}_3-Q_3\varphi'_3=0$$

sein soll, oder umgekehrt $\varkappa'_1, \varkappa'_2, \varphi'_3$ zu bestimmen, wenn

$$2\varrho\omega^2\mathfrak{K}_1-Q_1\varphi'_1=0,\quad 2\varrho\omega^2\mathfrak{K}_2-Q_2\varphi'_2=0,$$
$$Q_3\varkappa'_3+\frac{1}{Q_3}\frac{1}{\partial q_3}\left(\frac{1}{R}\right)=0$$

ist, so erhält man offenbar die kubische Dilatation für die beiden Fälle, dass die Normalcomponente des Oberflächendruckes und die Tangentialcomponenten der Verschiebung an der Oberfläche gegeben sind, oder dass die Normalcomponente der Verschiebung und die Tangentialcomponente des Druckes vorgeschriebene Werte haben sollen. Der Verfasser wendet das Verfahren auf den von einer Ebene begrenzten unendlichen Körper an. (Vgl. das Referat über Boussinesq S. 1066.) F. K.

G. H. Bryan. On the stability of elastic systems. Cambr. Proc. VI. 199-210.

Kirchhoff hat gezeigt (Vorlesungen über Math. Physik. 27. § 2), dass der Gleichgewichtszustand eines festen elastischen Körpers, wenn die beschleunigenden Kräfte und die Druckkräfte gegeben sind, im allgemeinen eindeutig bestimmt und stabil ist. Fälle nicht stabilen Gleichgewichts hat schon Euler und in neuerer Zeit Greenhill betrachtet. Herr Bryan untersucht zuerst allgemein, wann ein elastisches System einen instabilen Gleichgewichtszustand zulässt. Die Untersuchung der zweiten Variation der potentiellen Energie des Systems ergiebt, dass dies nur möglich ist für Drähte und ebene oder gekrümmte Platten, die durch blosses Biegen oder Drehen deformirt werden können. Diese Fälle werden dann genauer discutirt und ein Beispiel wird durchgerechnet. St.

C. Chree. Further applications of a new solution of the equations of an isotropic elastic solid, mainly to various cases of rotating bodies. Quart. J. XXIII. 11-33.

Der Verfasser giebt einige Anwendungen der von ihm im Quart. J. XXII. 89-118 (F. d. M. XVIII. 1886. 959) entwickelten Lösung der Gleichungen für isotrope elastische Körper. Dieselben beziehen sich auf Ellipsoide und besonders auf deren Ausartungen in Stäbe und Scheiben.

Die erste Anwendung bezieht sich auf Stäbe, d. h. cylinderförmige Gebilde, deren Längenausdehnung gross ist gegen die

anderen Dimensionen. Besonders wird die Ausdehnung der für elliptischen Querschnitt gewonnenen Resultate auf den Fall eines Hohlcylinders erörtert.

Dann bespricht der Verfasser die Anwendung seiner Gleichungen auf das um eine Axe rotirende Ellipsoid, falls die auf die Oberfläche wirkenden Kräfte sich in der Form

$$px(\Pi_1 x^2 + \Pi_2 y^2 + \Pi_3 z^2) \text{ etc.}$$

darstellen, wo p das vom Anfangspunkt auf die Tangentialebene in x, y, z gefällte Lot, Π_1, Π_2, Π_3 hingegen Constanten bedeuten. Die vollständige Lösung führt auf neun Gleichungen mit neun Unbekannten, die sich wesentlich vereinfachen, wenn das Ellipsoid in ein Sphäroid übergeht; besonders eingehend werden die Fälle behandelt, dass der in Frage stehende Körper unendlich wenig von einer Kugel abweicht, der Grenzfall einer Scheibe und derjenige eines Stabes.

Die Gefahr des Bruches (tendency of rupture) wird in den einzelnen Fällen bestimmt, und die erhaltenen Werte werden mit einander verglichen. F. K.

C. Chree. On holotropic elastic solids. Lond. R. S. Proc. XLIV. 214-218.

Auszug aus einer Schrift, welche wahrscheinlich in den Transactions erscheinen wird. Es wird angegeben, dass dieselbe über elastische Körper von verschiedenen nicht isotropen Arten handelt. Ihr Ziel ist die Aufstellung von Lösungen der inneren Gleichungen nach aufsteigenden ganzen Potenzen der Variabeln und ihre Anwendung auf Probleme praktischer Art; einige von ihnen sind bereits von De St. Venant, obschon in ganz anderer Weise, gelöst worden. Cly. (Lp.)

M. Lévy. Sur une propriété générale des corps solides élastiques. C. R. CVII. 414-416.

M. Lévy. Observation relative à une précédente communication. C. R. CVII. 453-454

In der ersten Note wird in einfacher Weise der Satz bewiesen: „Die Arbeit eines Systems äusserer Kräfte bezüglich der durch ein zweites System von Kräften bewirkten elastischen Verschiebungen ist gleich der Arbeit des zweiten Systems bezüglich der durch das erste bewirkten Verrückungen". In der zweiten Note wird die Priorität des Herrn Betti bezüglich dieses Gesetzes anerkannt. F. K.

E. Cesaro. Sur une récente communication de M. M. Lévy. C. R. CVII. 520-522.

Das Theorem von Betti wird auf *n* Dimensionen ausgedehnt und zur Ableitung der Formel von Laplace für die Schallgeschwindigkeit benutzt. F. K.

Z. Darstellung des Spannungs- und Formänderungszustandes im Innern eines Körpers. Centralbl. d. Bauverw. VIII. 100.

Man trage auf der Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems die drei Strecken

$$OX = \sigma_x,\ OY = \sigma_y,\ OZ = \sigma_z \qquad (\sigma_z > \sigma_y > \sigma_x)$$

ab und beschreibe über XY und YZ als Durchmesser zwei Halbkreise in dem ersten Quadranten des Coordinatensystems. Durch Y und Z ziehe man unter den Winkeln ψ und φ zur negativen Abscissenaxe die Kreissehnen YQ und ZP. Um die Mitte M von XY beschreibe man mit MP als Radius einen Halbkreis, und endlich zeichne man denjenigen Kreis, dessen Mittelpunkt auch auf OZ liegt und der durch die Punkte Q und Z hindurchgeht. Der Schnittpunkt sei Q'. Die Abscisse dieses Punktes ist

$$x = \sigma_z \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi \sin^2\psi + \sigma_x \cos^2\varphi \cos^2\psi,$$

und das Quadrat seiner Entfernung von O ist

$$\varrho^2 = \sigma_z^2 \sin^2\varphi + \sigma_y^2 \cos^2\varphi \sin^2\psi + \sigma_x^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi.$$

Sind nun aber $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Hauptspannungen, so werden durch diese Ausdrücke die Normalspannung und das Quadrat der Resultante derjenigen Spannungen dargestellt, welche auf ein Flächenelement mit den Richtungscosinus $\cos\varphi\cos\psi$, $\cos\varphi\sin\psi$, $\sin\varphi$ zu den drei Hauptspannungsrichtungen wirken. Die Coor-

dinaten des Punktes Q' liefern also direct Normal- und Tangentialspannung für das betreffende Flächenelement.

Die Construction ist von Herrn Mohr im Civiling. XXVIII vorgeschlagen. F. K.

J. Boussinesq. Équilibre d'élasticité d'un solide sans pesanteur, homogène et isotrope, dont les parties profondes sont maintenues fixes, pendant que sa surface éprouve des pressions ou des déplacements connus, s'annulant hors d'une région restreinte où ils sont arbitraires. C. R. CVI. 1043-1049.

J. Boussinesq. Cas où les données sont mixtes, c'est-à-dire relatives en partie aux pressions et en partie aux déplacements. C. R. CVI. 1119-1123.

Das Problem ist durch den Titel genügend gekennzeichnet; ist das Gebiet der Oberfläche, in welchem die gegebenen Verrückungen oder Druckkräfte nicht verschwinden, hinreichend klein, so kann man das Problem auf den Fall reduciren, dass der Körper unendlich gross ist und von einer Ebene begrenzt wird. In diese Ebene legt der Verfasser die (xy)-Ebene des Coordinatensystems und nimmt die z-Axe senkrecht dazu, so dass die z-Coordinaten von Punkten des Körpers positiv sind.

Bezeichnet man nun mit u, v, w die Verrückungen, mit λ, μ die Elasticitätsconstanten nach Lamé und den Bruch $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ mit k, so gelten folgende Gleichungen:

$$(1)\quad k\Delta_2(u)+\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\quad k\Delta_2(v)+\frac{\partial\theta}{\partial y}=0,\quad k\Delta_2(w)+\frac{\partial\theta}{\partial z}=0,$$

wo

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Abgesehen von dem Factor 2μ sind dann die Druckcomponenten für ein Element einer Ebene $z=$ const.:

$$p_x=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad p_y=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$p_z=-\frac{1-k}{2k}\theta-\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die Gleichungen (1) lassen sich erfüllen durch die Ausdrücke

$$u = \alpha - \frac{z}{2k+1}\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \beta - \frac{z}{2k+1}\frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$w = \gamma - \frac{z}{2k+1}\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

wenn

$$\Delta_2(\alpha) = 0, \quad \Delta_2(\beta) = 0, \quad \Delta_2(\gamma) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

ist. Indem nun der Verfasser α, β, γ gleich den Ableitungen dreier neuen Grössen nach z setzt, gelangt er zur folgenden Darstellung der Verrückungen:

$$u = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{z}{2k+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

$$v = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{z}{2k+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

$$w = \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{z}{2k+1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

welche sich besonders dann empfehlen, wenn für $z = 0$ die Verrückungen gegeben sind. Sind dagegen die Druckkräfte für $z = 0$ gegeben, so empfiehlt es sich,

$$\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Phi$$

zu setzen; dann wird

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{z}{2k+1}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial y},$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{z}{2k+1}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{z}{2k+1}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Phi.$$

$$p_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{k}{2k+1}\Phi\right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z},$$

$$p_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{k}{2k+1}\Phi\right) - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z},$$

$$p_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{k+1}{2k+1}\Phi\right).$$

Im ersten Falle, wenn u, v, w für $z = 0$ gegeben sind, hat man das bekannte Problem, eine Function zu bestimmen, welche der

Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$$

genügt, und bei welcher $\frac{\partial U}{\partial z}$ für $z=0$ gegebene Werte hat. Sind die Druckkräfte für $z=0$ gegeben, so kann man das Problem in die beiden specielleren Probleme für $p_x=0$, $p_y=0$ und für $p_z=0$ zerfällen. Das erstere wird gelöst, wenn man $\varphi_1=0$ und $\Phi=-\frac{2k+1}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ setzt.

Man hat dann die Aufgabe, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

mit der Grenzbedingung zu lösen, dass für $z=0$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=p_z$$

wird. Das geschieht durch den Ausdruck

$$\varphi=-\frac{k}{2\pi}\int\log(z+r)p_z d\sigma,$$

wo das Integral über die Ebene $z=0$ zu erstrecken ist und r die Entfernung des Punktes x, y, z von $d\sigma$ bezeichnet.

Soll nun $p_z=0$ sein, so wird $\Phi=-\frac{2k+1}{k+1}\varphi$ und für $z=0$

$$p_x=-\frac{1}{k+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y\partial z},$$

$$p_y=-\frac{1}{k+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial z},$$

aus denen man leicht die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=(1+k)\left(\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}=-\left(\frac{\partial p_x}{\partial y}-\frac{\partial p_y}{\partial x}\right)$$

ableitet. Bezeichnet man nun durch $\mathfrak{P}_x$ und $\mathfrak{P}_y$ die über $z=0$ erstreckten Integrale

$$\mathfrak{P}_x=-\frac{1}{2\pi}\int(z\log(z+r)-r)p_x ds,$$

$$\mathfrak{P}_y=-\frac{1}{2\pi}\int(z\log(z+r)-r)p_y ds,$$

so wird

$$\varphi = (1+k)\left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y}\right), \quad \varphi_1 = -\left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial x}\right).$$

Superponirt man die beiden speciellen Lösungen, so erhält man die Lösungen für den allgemeineren Fall, wenn die Druckkräfte für $z = 0$ ganz beliebig gegeben sind.

Soll für $z = 0$ jetzt p_z gegeben sein und $u = u_0$, $v = v_0$ werden, so erhält man zunächst aus der Grenzbedingung:

$$u_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad v_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$$

φ und φ_1, dann weiter Φ aus

$$p_z = -\frac{k+1}{2k+1}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$= -\frac{k+1}{2k+1}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{k+1}{2k+1}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}.$$

Ist für $z = 0$ hingegen $w = w_0$, und haben p_x, p_y vorgeschriebene Werte, so kann man zunächst aus den Grenzbedingungen Φ eliminiren und erhält so die beiden Gleichungen:

$$p_x = -\frac{k}{2k+1}\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{k+1}{2k+1}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z},$$

$$p_y = -\frac{k}{2k+1}\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{k+1}{2k+1}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}.$$

Die Lösung des hier in Betracht gezogenen Falles bietet also weiter keine Schwierigkeiten, als die des Falles, wo nur Druckkräfte oder nur Verrückungen gegeben sind. F. K.

R. Land. Das allgemeine Gesetz der Gegenseitigkeit der Verschiebungen. Schweiz. Bauztg. XII. 66.

Das Gesetz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen wird von dem Falle zweier Einzelursachen auf den Fall zweier Gruppen von Ursachen ausgedehnt. F. K.

Lord RAYLEIGH. On the bending and vibration of thin elastic shells, especially of cylindrical form. Lond. R. S. Proc. XLV. 105-123.

Bezieht sich auf des Verfassers Abhandlung: „On the infinitesimal bending of surfaces of revolution“ (Lond. M. S. Proc. XIII. 1881. 4-16) und auf Herrn Love's Kritik derselben in dem S. 1075 besprochenen Aufsatze und enthält weitere Untersuchungen über den Gegenstand. Cly. (Lp.)

H. LAMB. On the flexure and the vibrations of a curved bar. Lond. M. S. Proc. XIX. 365-376.

Der Verfasser behandelt die Deformationen eines ursprünglich kreisförmigen Stabes. Sind a, ϑ die Polarcoordinaten vor der Deformation, $a+R$, $\vartheta+\Theta$ die Coordinaten desselben Teilchens nach der Deformation, so besteht, wenn von der Längenänderung abgesehen werden kann, die Beziehung

$$R = -a\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}.$$

Die Aenderung, welche die Krümmung erfährt, ist dann

$$\varDelta\varrho^{-1} = \frac{1}{a}(\Theta'+\Theta''')$$

und demgemäss die potentielle Energie

$$V = \frac{B}{2a}\int(\Theta'+\Theta''')^2 d\vartheta.$$

Sind nun P, Q die äusseren Kräfte, welche auf ein Teilchen wirken, $\overline{P}$, $\overline{Q}$ die am Ende angreifenden Kräfte, $\overline{N}$ das Moment, so lautet das Princip der virtuellen Verrückungen für unseren Fall

$$\int\left\{\frac{d^2R}{dt^2}\delta R + a^2\frac{d^2\Theta}{dt^2}\delta\Theta\right\}\sigma a d\vartheta + \delta V = \int\{P\delta R + Qa\delta\Theta\}a d\vartheta$$
$$+\Sigma(P_0\delta R + Q_0 a\delta\vartheta) + [\overline{P}\delta R + \overline{Q}a\delta\Theta + \overline{N}\delta(\Theta+\Theta')].$$

wo die P_0, Q_0 Einzelmassen bezeichnen.

Das liefert folgende Differentialgleichung für Θ:

$$\sigma a^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Theta-\frac{\partial^2\Theta}{\partial\vartheta^2}\right)-\frac{B}{a}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\vartheta^2}+2\frac{\partial^4\Theta}{\partial\vartheta^4}+\frac{\partial^6\Theta}{\partial\vartheta^6}\right) = a^2\left(Q+\frac{\partial P}{\partial\vartheta}\right.$$

mit den Grenzbedingungen:

$$\sigma a^2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial t^2 \partial \vartheta} + \frac{B}{a}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} + 2\frac{\partial^3 \Theta}{\partial \vartheta^3} + \frac{\partial^5 \Theta}{\partial \vartheta^5}\right) = -Pa^2 + \bar{Q}a + \bar{N},$$

$$\frac{B}{a}(\Theta'' + \Theta^{IV}) = \bar{P}a,$$

$$\frac{B}{a}(\Theta' + \Theta''') = \bar{N}$$

und ähnlichen Bedingungen für die Angriffspunkte der Einzelbelastungen.

Soll der Stab unter Einfluss von Kräften, welche lediglich auf das Ende wirken, im Gleichgewicht sein, so hat man für Θ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \vartheta^2} + 2\frac{\partial^4 \Theta}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^6 \Theta}{\partial \vartheta^6} = 0,$$

deren allgemeinste Lösung

$$\Theta = C + D\vartheta + (E + F\vartheta)\cos\vartheta + (G + H\vartheta)\sin\vartheta$$

insofern vereinfacht werden kann, als die Glieder C, $E\cos\vartheta$, $G\sin\vartheta$ nur eine Verrückung des ganzen Systems bezeichnen und demgemäss unterdrückt werden können. Das Glied $\Theta = D\vartheta$ stellt die Aenderung dar, welche allein durch Kräftepaare, die an den Enden des Stabes wirken, hervorgerufen wird. Ist $\bar{N}$ die Grösse desselben, so wird $D = \frac{\bar{N}a}{B}$ und $R = -\frac{\bar{N}a^2}{B}$. In diesem Falle bleibt der Stab also kreisförmig.

Wenn Θ eine ungerade Function

$$\Theta = D\vartheta + F\vartheta\cos\vartheta$$

ist, so wird für die Enden $\vartheta = \pm\alpha$:

$$Q\bar{N} = \frac{B}{a}(D - 2F\cos\alpha),$$

$$\bar{P}a = +2\frac{BF}{a}\sin\alpha,$$

$$\bar{Q}a = 2\frac{BF}{a}\cos\alpha.$$

Die auf die Enden wirkende Kraft hat also die Richtung der Sehne; soll kein Moment an den Enden angreifen, so muss $D = 2F\cos\alpha$ sein.

Soll endlich Θ eine gerade Function $H\vartheta \sin\vartheta$ sein, so w

$$\bar{N} = -2\frac{HB}{a}\sin\alpha,\quad \bar{P}a = -2\frac{HB}{a^2}\cos\alpha,\quad \bar{Q} = +\frac{2HB}{a^2}\sin$$

in diesem Falle steht also die an den Enden angreifende K senkrecht auf der Sehne.

Nach ähnlicher Methode berechnet der Verfasser die De- mation, welche ein in einem Punkte seiner Peripherie auf hängter Kreis durch sein Eigengewicht erfährt.

Zum Schlusse behandelt der Verfasser die Schwingung eines kreisbogenförmigen Gebildes. F. K.

F. Meyer zur Capellen. Mathematische Theorie d Transversalschwingungen eines Stabes von veränd lichem Querschnitt. Wiedemann Ann. (2) XXXIII. 661-67.

Der Verfasser betrachtet die Schwingungen eines Sta welcher von zwei parallelen und zwei senkrecht dazu stehend gegen das freie Ende convergirenden Ebenen begrenzt wird, und zw die Schwingungen, welche senkrecht zur Ebene des dreiecki Schnittes vor sich gehen. Bezeichnen μ, E die Dichtigkeit u den Elasticitätscoefficienten, q und $\varkappa$ Inhalt und Trägheitmom des Querschnittes, so gilt allgemein die Differentialgleichung

$$\mu q\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -E\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

mit den Grenzbedingungen, dass für das freie Ende ($z = 0$):

$$z\frac{d^2\eta}{dz^2} = 0,\quad \frac{d}{dz}\left(z\frac{d^2\eta}{dz^2}\right) = 0,$$

für das eingespannte Ende hingegen ($z = l$) $\eta = 0$, $\frac{d\eta}{dz} =$ ist. Für den hier vorliegenden speciellen Fall ist

$$q = 4h\frac{bz}{l},\quad \varkappa = \frac{4h^3}{3}\frac{bz}{l}$$ (h Höhe, b Breite des Querschnitts am eingespannten Ende)

Setzen wir

$$\eta = u\cos\lambda t,\quad \frac{3\mu\lambda^2}{h^2E} = a^4,\quad za = z',$$

so erhalten wir die Differentialgleichung

$$z'u = \frac{d^2}{dz'^2}\left(z'\frac{d^2u}{dz'^2}\right),$$

deren Lösung bei Rücksicht auf die für das freie Ende geltenden Bedingungen gleich

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2$$

gesetzt werden muss, wo

$$u_1 = 1 + \frac{z'^4}{4.3^2.2} + \frac{z'^8}{8.7^2.6.4.3^2.2} + \cdots,$$

$$u_2 = z' + \frac{z'^5}{5.4^2.3} + \frac{z'^9}{9.8^2.7.5.4^2.3} + \cdots$$

gesetzt ist. Damit nun für das feste Ende die Bedingungen erfüllt seien, muss das zugehörige z' die Bedingung

$$u_1 \frac{du_2}{dz'} - u_2 \frac{du_1}{dz'} = 0$$

oder

$$0 = 1 - \frac{1^2}{2!\,4!} z'^4 + \frac{(1.5)^2}{4!\,8!} z'^8 - \frac{(1.5.9)^2}{6!\,12!} z'^{12} + \cdots$$

erfüllen. Die ersten Wurzeln derselben sind:

$$z'_1 = 2{,}6752;\ z'_2 = 5{,}5715;\ z'_3 = 8{,}6798;\ z'_4 = 11{,}8126;$$
$$z'_5 = 14{,}9495;\ z'_6 = 18{,}0830.$$

Die Schwingungszahlen sind also bestimmt durch die Gleichung

$$\lambda_n = \frac{z_n'^2 h}{l^2}\sqrt{\frac{E}{3\mu}}.$$

Die Knotenpunkte ergeben sich aus der Gleichung $u = 0$ oder

$$u_2 u_1^{(n)} - u_1 u_2^{(n)} = 0.$$

Die ersten Wurzeln sind:

$z_2'^{(1)} = 1{,}8332$

$z_3'^{(1)} = 1{,}8542$ $z_3'^{(2)} = 4{,}7694$

$z_4'^{(1)} = 1{,}8524$ $z_4'^{(2)} = 4{,}7848$ $z_4'^{(3)} = 7{,}8862$

$z_5'^{(1)} = 1{,}8525$ $z_5'^{(2)} = 4{,}7842$ $z_5'^{(3)} = 7{,}9016$ $z_5'^{(4)} = 11{,}0094$

$z_6'^{(1)} = 1{,}8525$ $z_6'^{(2)} = 4{,}7843$ $z_6'^{(3)} = 7{,}9013$ $z_6'^{(4)} = 11{,}0371$ $z_6'^{(5)} = 13{,}9780$,

und hieraus folgt die Lage der Knotenpunkte vermöge der Gleichung

$$z = \frac{z_n'^{(m)}}{z_n'}\, l.$$

Zum Schluss vergleicht der Verfasser die Resultate mit den auf den Kreissector bezüglichen. F. K.

A. E. H. Love. The free and forced vibration of an elastic spherical shell containing a given mass of liquid. Lond. M. S. Proc. XIX. 170-207.

Mit Hülfe der Methoden, welche Herr Lamb in seinen Abhandlungen: Vibrations of elastic spheres and spherical shells (Lond. M. S. Proc. XIII, XIV, F. d. M. XIV. 1882. 823, XV. 1883. 893) entwickelt hat, behandelt der Verfasser das vorliegende Problem zunächst unter der Voraussetzung, dass keine äusseren Kräfte wirken. Er entwickelt die Verrückungen nach Kugelfunctionen und bestimmt dann die auftretenden Constanten — so weit dieses möglich — durch die Bedingungen, welche an den Grenzen der beiden Kugelschalen gelten. Sind die Schwingungen ganz frei, so fliessen die Bedingungen aus der Thatsache, dass die Druckcomponenten für die Elemente der Oberfläche gleich Null sind.

Befindet sich aber eine Flüssigkeit in der Kugelschale, so erleidet die innere Kugelschale einen normalen Druck. Die Grösse desselben wird auf folgende Weise bestimmt. Da die Normalcomponenten der Geschwindigkeit an der inneren Schale für die elastische Masse und für die Flüssigkeit einander gleich sein müssen, so erhält man zunächst einen nach Kugelfunctionen fortschreitenden Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential und daraus, indem man die Quadrate der Geschwindigkeitscomponenten unterdrückt, eine ähnliche Formel für den Druck. Im Princip ist also das Problem der Constantenbestimmung nicht von dem einfacheren Falle einer leeren Kugelschale verschieden. (Vgl. K. Friesach, Ueber den Einfluss des den Schall fortpflanzenden Mittels etc. Wien. Ber. LVI. 1868. 316. Lp.)

Dann geht der Verfasser über zu der Behandlung der unter Einfluss von Kräften stattfindenden Schwingungen. Er setzt voraus, dass auf das gegebene System Einwirkungen von äusseren Körpern stattfinden, welche eine gewisse Periode besitzen. Dann

sind zunächst ausser den genannten Kräften zu berücksichtigen die Anziehungen, welche die Teile des Systems auf einander ausüben; diese können in zwei Teile zerlegt werden, der eine herrührend von dem unveränderlich gedachten System, der andere von den periodischen Schwankungen in der Anordnung des Systems. Dazu kommt noch die Centrifugalkraft, falls das System um seine Axe rotirt. Die letztere, ebenso der constante Teil der Selbstanziehung sind natürlich nur von Einfluss auf die Spannungen, nicht aber auf die Schwingungen des Systems. Die periodischen Teile des Potentials werden nach Kugelfunctionen entwickelt; man kann dann leicht ein particuläres System von Ausdrücken erlangen, welches den Differentialgleichungen für die Verrückungen genügt. Diesen hat man dann die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen für freie Schwingungen hinzuzufügen.

Da die specielle Ausführung der Rechnung eine auszugsweise Wiedergabe nicht gestattet, müssen wir es uns versagen, auf dieselbe näher einzugehen. F. K.

A. E. H. Love. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. Lond. Phil. Trans. CLXXIX. 491-546.

Die Abhandlung zerfällt in neun Abschnitte. 1. Historische Einleitung. Poisson. Kirchhoff's erste Theorie der Platten. Kirchhoff's zweite Theorie. Boussinesq. De St. Venant. 2. Theorie der gegenwärtigen Schrift für dünne Schalen (auf der genannten zweiten Kirchhoff'schen Theorie der Platten beruhend). 3. Innere Deformation in einem Elemente der Schale. 4. Geometrische Theorie einer kleinen Deformation ausdehnbarer Oberflächen. 5. Bewegungsgleichungen und Grenzbedingungen. 6. Möglichkeit gewisser Schwingungsarten. 7. Schwingungen einer Kugelschale. 8. Schwingungen einer Cylinderschale. 9. Uebersicht.

In der Uebersicht bemerkt der Verfasser, dass seine Abhandlung in Wahrheit einen Versuch darstellt, eine Theorie der Schwingungen von Glocken zu begründen, dass jedoch die

Schwierigkeit der Aufgabe in ihrer allgemeinen Form es rätlich macht, mit dem Grenzfalle einer unendlich dünnen, vollständig isotropen Schale zu beginnen, deren Dicke überall constant und im Vergleich zu ihren anderen Dimensionen so gering ist, dass höhere Potenzen derselben als die erste in mathematischen Ausdrücken vernachlässigt werden können, welche die erste Potenz und höhere enthalten, multiplicirt mit Grössen von derselben Ordnung. Er bezieht sich hierbei auf Erläuterungen zu früheren theoretischen Arbeiten wie Lord Rayleigh's „Theory of sound" und seine Schrift „On the infinitesimal bending of surfaces of revolution", auf Aron's und Mathieu's Abhandlungen, endlich auf Ibbetson's Treatise on the mathematical theory of elasticity.

Cly. (Lp.)

P. G. Tait. Preliminary note on the duration of impact. Edinb. Proc. XV. 159.

Die erhaltenen Resultate wurden mit einem roh gearbeiteten Apparate erzielt, welcher zu dem Zwecke erdacht war, die Methode zu erproben, und welcher sich befriedigend bewährte. Ein einziges Resultat wird angegeben: die Dauer eines Stosses unter besonderen Umständen ergab sich zu ungefähr 0,001 Secunden und der Restitutions-Coefficient zu 0,26. Cly. (Lp.)

E. Boggio-Lera. Sulla cinematica dei mezzi continui: estratto dalla tesi di laurea. Nuovo Cimento (3) XXIII. 158-162, XXIV. 41-45.

Vergl. F. d. M. XIX. 1887. 889.

L. Proskuriakow. Untersuchung über die Biegungsmomente in geraden Balken mit bewegten Lastsystemen. Samml. d. Wegebau-Ing.-Inst. zu St. Petersburg. XIII. 26 S. (Russisch.)

Diese Abhandlung enthält eine genaue und einfache Methode sowohl zur Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der

Curve der Biegungsmomente in geraden Balken, als auch zur Auffindung ihrer absolut grössten Werte bei einem System concentrirter Lasten. Die Basis der ganzen Untersuchung bildet die bekannte Eigenschaft des Biegungsmomentes, dass in jedem Schnitte x der Differentialquotient des Moments gleich der Verticalkraft ist. Der Beweis dieser Eigenschaft, welcher für gerade Balken unter dem Namen des Schwedler'schen Satzes bekannt ist, bildet den Anfang des Aufsatzes. Zum Schlusse werden die Grössen des Moments M_n und der Verticalkraft T_n für eine beliebige Belastung bei unmittelbarer Wirkung derselben auf den frei auf zwei Stützen liegenden Balken verglichen mit den Grössen M_m und T_m, die derselben Belastung entsprechen, aber an bestimmten Punkten auf den Balken mittels Hülfsbälkchen übertragen werden. Indem der Verfasser die Werte des Moments und der Verticalkraft für die letzteren durch m und t bezeichnet, kommt er durch blosse logische Schlussfolgerungen zu folgenden Relationen:

$$M_n = M_m + m, \quad T_n = T_m + t,$$

welche bei der Berechnung von Brücken sehr nützlich werden können. Bb.

L. Nikolai. Ermittelung des absoluten Maximalmomentes, das ein System von concentrirten Verkehrs-Lasten mit bekanntem gegenseitigem Abstande bei der Mitwirkung einer gleichmässig ausgebreiteten Last auf einen auf zwei Stützen frei liegenden Balken ausübt. Samml. d. Wegebau-Ing.-Inst. zu St. Petersburg. XIII. 29 S. (Russisch.)

Der Verfasser hat schon im Jahre 1877 (in dem Russ. Ingenieur-Journale) bewiesen, dass bei der Belastung des Balkens mit concentrirten bewegten Lasten die Ausdrücke der Biegungsmomente die Gleichungen gleichseitiger parabolischer Hyperboloide darstellen, wenn man x (die Entfernung des Schnittes vom linken Stützpunkte), y (die Entfernung der ersten Verkehrslast von demselben Stützpunkte) und z (die Grösse des Momentes) als rechtwinkelige Coordinaten annimmt. Jetzt wird der Satz

bewiesen: Wenn ausser den concentrirten Verkehrslasten noch eine gleichmässig ausgebreitete Belastung des Balkens stattfindet, so werden die Ausdrücke des Biegungsmomentes auch in diesem Falle Gleichungen von parabolischen Hyperboloiden vorstellen. Auf diesem Satze beruht die vom Verfasser vorgeschlagene Methode zur Ermittelung des Maximalmomentes. Es wird unter anderem bewiesen, dass, wie gross die gleichmässig verbreitete Last und wie klein die concentrirten Lasten auch sein mögen, die absoluten Maxima immer unter einer Last liegen, aber nicht zwischen dieselben fallen.

Der Verfasser beweist weiter, wie man seine Methode anwenden muss, wenn die gleichmässig verteilte Last streckenweise auf dem Balken liegt, oder wenn die Last nach einem bekannten Gesetze sich ändert. Bb.

J. J. Weyrauch. Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig. Teubner. XX + 532 S. 8° mit 20 Taf. 4°.

Die im vorigen Jahrgange der F. d. M. S. 1057 angezeigte „Theorie der statisch bestimmten Träger“, führt zu Formeln und Methoden, mittels welcher die statische Berechnung jener Träger im allgemeinen durch einfache Substitution bekannter Zahlenwerte erledigt werden kann. Wie dies zu geschehen hat, ist in der vorliegenden Sammlung für alle gewöhnlichen und zahlreiche ungewöhnliche Fälle so vollständig gezeigt, dass der projectirende Ingenieur die Resultate auch ohne eingehendes Studium der Theorie benutzen, diesen Band daher als Formelsammlung ansehen kann. Lp.

S. Kunitzky. Zur Frage über die Ermittelung der Verticalkräfte und Biegungsmomente der von Verkehrs-Lasten belasteten Balken. Samml. d. Wegebau-Ing.-Inst. zu St. Petersburg. XIII. 102 S. (Russisch.)

N. Belelubski. Ueber einheitliche Untersuchungsmethoden bei der Prüfung von Bau- und Constructions-Materialien auf ihre mechanischen Eigenschaften nach den Beschlüssen der Conferenzen zu München und Dresden. Journ. d. Wegebau-Minist. 39 S. (Russisch.)

Ch. M. Schols. Remarques sur le calcul des efforts maxima dans les maîtresses-poutres des ponts de chemin de fer. Delft Ann. de l'École Polyt. IV. 13-100.

Diese ausgedehnte Studie über die Tragkraft der Hauptbalken in Eisenbahnbrücken ist hauptsächlich vom technischen Standpunkt aus unternommen und bezieht sich auf die von der Niederländischen Regierung hinsichtlich dieses Gegenstandes gegebenen Vorschriften. Die zahlreichen Berechnungen und Tabellen berücksichtigen auch die Locomotiven, welche bei den Eisenbahnen in den Niederlanden im Gebrauche sind. G.

Fr Engesser. Ueber die Nebenspannungen der Fachwerke bei steifen Knotenverbindungen. Z. dtsch. Ing. XXXII. 813-817.

Es werden zunächst die Aenderungen, welche die Winkel eines Dreiecks erfahren, durch die Dilatationen der Seiten ausgedrückt; wobei dann angenommen wird, dass die unter Voraussetzung freier Knotenpunkte berechneten Spannungen, Dilatationen und Winkeländerungen auch für den Fall steifer Knotenverbindungen gelten. Dann werden die Winkeländerungen nach den Regeln der Festigkeitslehre durch die Einspannungsmomente ausgedrückt. Das giebt zusammen mit der Bedingung, dass die Summe der Momente an jedem Knotenpunkte gleich Null ist, für jeden Knotenpunkt soviel Gleichungen, als Stäbe in dem Knotenpunkt zusammenstossen, im ganzen also ebenso viele Gleichungen, als unbekannte Einspannungsmomente vorhanden sind. Näherungswerte für die Momente eines Stabes leitet der Verfasser ab, indem er voraussetzt, dass die mit dem fraglichen

Stabe zusammenstossenden Stäbe an ihren zweiten Enden freie Knotenpunkte haben, so dass man es nur mit den beiden Knotenpunkten zu thun hat, welche den in Rede stehenden Stab begrenzen.

Haben die Wandstäbe gegenüber den Gurtstäben geringe Trägheitsmomente, so kann man bei Berechnung der Nebenmomente der Gurtstäbe die der Wandstäbe vernachlässigen. Der Verfasser giebt Formeln für dieselben an und berechnet dann die Nebenmomente für die Wandstäbe. Bei Parallelträgern erhält man, wenn die Diagonalen mit den Gurten 45° einschliessen, und wenn ε die Dilatation der unteren Gurtung und der Diagonalen, $-\varepsilon$ die Dilatation der oberen Gurtung und die Dehnung der Ständer $-\frac{3}{2}\varepsilon$ ist:

$$M = -\frac{12EJ\varepsilon}{s} = -\frac{12J\sigma}{s}$$

[s Länge der Diagonale] und daraus die Nebenspannung

$$\nu = \pm\frac{Me}{J}, \quad \nu = \pm\frac{12e}{s}\sigma,$$

oder da bei symmetrischen Stäben $2e$ gleich der Breite b des Stabes ist, $\pm\frac{6b}{s}\sigma$.

Zum Schluss erörtert der Verfasser die Mittel, wie die Nebenspannungen vermieden oder wenigstens vermindert werden können. F. K.

M. Koenen. Einfache Ausdrücke für die Durchbiegung von Eisenträgern und Holzbalken. Centralbl. d. Bauverw. VIII. 216.

Die Durchbiegung eines gleichmässig belasteten Balkens wird durch die Formel bestimmt:

$$\delta = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EJ} = \frac{5}{24}\frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{h}.$$

Nennt man die Länge in Metern L, so erhält man

$$\delta = \frac{50000}{24E}\sigma\frac{L^2}{h}.$$

Man kann bei Schmiedeeisen im allgemeinen $E = \frac{50000}{24}$ Tonnen pro qcm setzen, also

$$\delta = \sigma \frac{L^2}{h}.$$

Bei Kiefern- und Tannenholz ist E etwa 20-mal so gross:

$$\delta_1 = 20\sigma \frac{L^2}{h}.$$

Nimmt man nun als Beanspruchung etwa $\frac{1}{4}$ Tonnen beim Schmiedeeisen und den zehnten Teil davon für Holz, so erhält man

$$\delta = \frac{1}{4}\frac{L^2}{h}, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{h}.$$

(Dabei ist jedoch zu beachten, dass L in Metern und h in cm gemessen ist.) F. K.

FRAENELL et BACHY. Sur les calculs de résistance des systèmes réticulaires à lignes ou conditions surabondantes. C. R. CVII. 729-731.

Die Note ist ein kurzer Auszug aus einer Abhandlung über die Brücken auf dem Adour für eine Eisenbahn. „Netzsysteme" heissen nach Hrn. M. Lévy einfache Dreieckssysteme. Die Verfasser geben den Gang an, der bei der Berechnung der Spannungen in den von ihnen benutzten Systemen sich als praktisch erwiesen hat. Lp.

E. OVAZZA. Sul calcolo delle freccie elastiche delle travi reticolari. Torino Atti. XXIII. 625-636.

Nachdem die Spannungen für die Stäbe eines Balkenträgers auf graphischem Wege gefunden sind, kann man die Verlängerungen durch die bekannte Formel

$$\Delta(s) = \frac{Ts}{EF}$$

bestimmen und daraus dann die Winkeländerungen der einzelnen Dreiecke ableiten. Die Einsenkungen der Knotenpunkte bestimmt der Verfasser auf folgende Weise. Sind T'' die Span-

nungen, welche eine in einem Knotenpunkte angebrachte Last 1 hervorruft, so ist nach dem Princip der virtuellen Verrückungen die Einsenkung in dem betreffenden Knotenpunkte unter Einfluss des gegebenen Kraftsystems:

$$\delta = \Sigma T'' \Delta(s) = \Sigma \frac{T'Ts}{EF}.$$

Für den Fall bewegter Lasten bedient sich der Verfasser des bekannten Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen. Es werden besonders behandelt die Fälle gleichmässig verteilter Last und concentrirter bewegter Lasten, welche in gleichen Abständen auf einander folgen. F. K.

BARCKHAUSEN. Schief beanspruchte Träger. Centralbl. d. Bauverw. VIII. 316.

Für den Fall, dass die auf dem Trägerquerschnitt senkrecht stehende Ebene des Moments nicht eine der beiden Hauptaxen des Querschnitts enthält, ermittelt der Verfasser zunächst die Gleichung der Biegungsaxe. Nach bekannten Regeln lautet dieselbe, wenn die Spur der Momentebene im Querschnitt mit der einen Hauptaxe (y-Axe) einen Winkel α einschliesst,

$$\frac{x \sin\alpha}{J_y} + \frac{y \cos\alpha}{J_x} = 0,$$

und also ist der Winkel, welchen dieselbe mit der Abscissenaxe einschliesst, bestimmt durch $\operatorname{tg}\beta = \frac{J_x}{J_y}\operatorname{tg}\alpha$. Wählt man jetzt die Biegungsaxe zur Abscissenaxe und bezeichnet den Ausdruck $J_x^2 \cos^2\beta + J_y^2 \sin^2\beta$ durch J^2, so ist die Spannung σ in irgend einem Punkte gleich $\frac{My}{J}$. F. K.

C. STÖCKL und W. HAUSER. Hülfs-Tabellen für die Berechnung eiserner Träger mit besonderer Rücksichtnahme auf Eisenbahnbrücken. Wien. Spielhagen u. Schurich. XLVIII + 182 S. 8°.

Die vorliegenden Tabellen sollen die Dimensionsbestimmung von Constructionsteilen erleichtern. In einer Einleitung werden die wesentlichsten Sätze der Festigkeitslehre, welche für den fraglichen Zweck in Betracht kommen, in Kürze abgeleitet. Zunächst wird die Fundamentalgleichung der Biegungstheorie aufgestellt; im weiteren beschäftigen sich die Verfasser mit der wichtigen Frage nach dem Maximalmomente für ruhende und bewegte Belastung. Zuletzt kommen die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten eines Querschnittes zur Erörterung.

Die ersten Tabellen (S. 1-96) geben die Trägheitsmomente von Blechträgern, und zwar gesondert für je ein Kopfblech und ein Fussblech von der Dicke *D* (8 mm bis 30 mm) und dem Abstand *H* (12 cm bis 150 cm), für die vier Winkel und das Stehblech.

Dann folgen die Tabellen der statischen Functionen von Formeisen (S. 92-111). Für gleichschenklige und ungleichschenklige Winkeleisen werden die Lage des Schwerpunktes, die Trägheitsmomente in Bezug auf die Kanten und die Hauptträgheitsmomente angegeben. In ähnlicher Weise werden einfache und doppelte T-Profile behandelt, auch für U- und Z-Profile werden die betreffenden Grössen angegeben. Den Schluss dieses Abschnittes machen Tabellen für Zoréseisen und Wellblech.

Weiter werden Tabellen gegeben für den Widerstand von *n* Nieten in kg bei einer zulässigen Inanspruchnahme a) von 500 kg, b) von 600 kg, c) von 700 kg pro cm^2. Auch für die Gewichte von Nietköpfen und die erforderlichen Blechstärken werden Tabellen gegeben.

Auch die Verordnung des k. k. österr. Handels-Ministeriums vom 15. September 1887, betreffend die Sicherheitsrücksichten, welche bei Eisenbahnbrücken etc. zu beobachten sind, wird abgedruckt; im Anschluss daran werden Werte für die zufälligen Lasten, für die Berechnung der Gurtungen und des Gitterwerkes mitgeteilt. Den Schluss machen Tabellen für die Eigengewichte von Eisenbrücken und Gewichtstabellen. F. K.

M. KOENEN. Ueber ringförmige Stäbe und Platten gleichen Widerstandes. Centralbl. d. Bauverw. VIII. 118.

Aus der kreisförmigen Platte werde durch zwei Axenschnitte, welche sich unter dem Winkel $d\varphi$ schneiden, und durch zwei Cylinderflächen vom Radius x und $x+dx$ ein Prisma mit elementarer Grundfläche von der Höhe z ausgeschnitten. Auf die Cylinderflächen wirken Momente $Mxd\varphi$ resp. $(M+dM)(x+dx)d\varphi$, sowie Schubkräfte $Vxd\varphi$ und $(V+dV)(x+dx)d\varphi$. Auf die ebenen Begrenzungen wirken Momente von der Grösse $\mathfrak{M}dx$. Der Verfasser leitet zunächst die Gleichung

$$\frac{d(Mx)}{dx} = \mathfrak{M} - Vx$$

ab und stellt dann Gleichungen für die Spannung im Sinne des Radius und des Umfangs auf:

$$\sigma_r = 6\frac{M}{z^2} - \frac{6}{m}\frac{\mathfrak{M}}{z^2}, \quad \sigma_u = 6\frac{\mathfrak{M}}{z^2} - \frac{6}{m}\frac{M}{z^2}.$$

Damit beide gleich der zulässigen Spannung k seien, muss $\mathfrak{M}=M$ werden. Dann wird

$$\frac{dM}{dx} = -V, \quad z^2 = 6\frac{m-1}{m}\frac{M}{k}.$$

V ist durch die Belastung bestimmt. Von den Beispielen wollen wir hier nur das erste angeben. Eine gleichmässig belastete Platte ist am Rande gestützt. Dann ist

$$V = \tfrac{1}{2}px, \quad M = C - \tfrac{1}{4}px^2,$$

und da am Rande das Moment Null ist,

$$M = \tfrac{1}{4}p(r^2-x^2),$$

und wenn $m=3$ genommen wird:

$$z^2 = \frac{p}{k}(r^2-x^2).$$

Die Platte hat also die Gestalt eines Ellipsoides. F. K.

FR. ENGESSER. Ueber die Knickfestigkeit von Ringen und Röhren. Centralbl. d. Bauverw. VIII. 307-309.

Der Verfasser betrachtet zunächst einen Ring, auf welchen radial gerichtete äussere Kräfte wirken, deren Resultante für das Bogenstück ds gleich pds sein möge. Wird jetzt der Ring

verbogen, und zwar so, dass die Verschiebung in Richtung des Radius gleich η ist, so besteht unter Voraussetzung eines constanten p die Gleichung:

$$EJ\frac{d^2\eta}{ds^2}+pr\eta = \text{Const.}$$

Diese Constante ist gleich Null, wenn, wie hier, vorausgesetzt wird, dass die Verdrückung zwei senkrecht auf einander stehende Symmetrieebenen besitzt, und dass die stärkste Eindrückung ebenso stark sein soll wie die stärkste Ausbuchtung. Damit nun eine Lösung von der eben bezeichneten Art möglich sei, muss in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$\eta = A\cos\left(\sqrt{\frac{pr}{EJ}}s\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{pr}{EJ}}s\right),$$

$$B = 0,\quad \sqrt{\frac{pr}{EJ}} = \frac{2}{r},\quad \text{also}\quad p = \frac{4EJ}{r^2}$$

sein. Dieselben Formeln gelten auch für Röhren; nur beziehen sich J und p auf die Längeneinheit der Röhre. Modificationen sind dann anzubringen, wenn die Röhre in Intervallen oder an den Enden versteift ist, weil dann die Biegung der Längsfasern noch in Frage kommt. F. K.

A. Castigliano. Theorie der Biegungs- und Torsionsfedern. Aus dem Italienischen übersetzt von R. Totz. Wien. C. Gerold's Sohn. IV + 100 S. 8°.

In dem vorliegenden Werkchen wendet der Verfasser die Lehre von dem Minimum der Deformationsarbeit und dem Zusammenhang der Deformationen mit den Ableitungen jener Grössen nach den angreifenden Kräften auf die Theorie der Federn an.

In interessanter Weise werden nach einander die Blattfedern, die Spiralfedern, die prismatischen Federn, die cylindrischen und die Schraubenfedern zur Erörterung gebracht. Dann kommen die Einflüsse der Stösse und die dadurch hervorgerufenen Beanspruchungen zur Besprechung.

Wir können bei dem uns zu Gebote stehenden Raume nicht eingehend die Entwickelungen der einzelnen Capitel wiedergeben,

und beschränken uns daher hier auf die Wiedergabe desjenigen Capitels, welches uns für die gewählte Behandlungsart besonders charakteristisch zu sein scheint. Es ist dies das Capitel II, in welchem die zusammengesetzten Blattfedern besprochen werden.

Der Verfasser geht von der Voraussetzung aus, dass jedes Blättchen mit der darüber liegenden Lamelle nur mit seinem Ende in Berührung bleibt, so dass auf jede Lamelle zwei Kräfte wirken, nämlich der Druck, welchen die darüber liegende Lamelle auf ihr Ende ausübt, und die Reaction der darunter liegenden Lamelle gegen den von der betrachteten Lamelle ausgeübten Druck. Der Verfasser bestimmt nun nach der Biegungstheorie die Deformationsarbeit als Function dieser beiden Kräfte. Summirt man über sämtliche Lamellen, so erhält man die Deformationsarbeit des ganzen Systems als Function der Enddrucke in den einzelnen Lamellen, welche mit Ausnahme des am Ende wirkenden obersten oder des am Hauptblatte angreifenden unbekannt sind. Nach dem Princip vom Minimum der Deformationsarbeit erhält man nun so viel Gleichungen, als Unbekannte vorhanden sind, indem man die Ableitungen der Deformationsarbeit nach den Unbekannten gleich Null setzt.

Die Uebersetzung befriedigt im allgemeinen, ist jedoch nicht frei von Eigentümlichkeiten. Dahin gehört z. B. der Gebrauch des Wortes „die Derivate nach" statt „der Differentialquotient" oder „die Ableitung". Befremdlich für ein norddeutsches Ohr wirkt ferner der durchgehende, in Oesterreich jetzt übliche Gebrauch der Conjunction „nachdem" statt „da".

Auch undeutsche Participialconstructionen sind nicht immer vermieden, z. B. auf derselben Seite:

„Dieses festgestellt, nehmen wir an" . . .

und Seite 78

„Dieses festgestellt, die beiden Glieder der Differentialgleichung mit dy multiplicirt und unter der Bedingung integrirt, dass für $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = V$ wird, resultirt ...".

Trotz dieser Mängel empfehlen wir das Werkchen allen

denen zur Beachtung, welche an der Elasticitätstheorie und deren Anwendung auf die Praxis Interesse nehmen.

F. K.

H. Resal. Essai sur la théorie du ressort Belleville. C. R. CVII. 713-718.

Die in Frage stehende Feder setzt sich aus einzelnen Teilen zusammen, von denen jeder wieder aus zwei gleichen, inwendig hohlen Kegelstumpfen besteht, die sich an ihren breiten Basen auf einander stützen. Ausser von der inneren und der äusseren Kegelfläche, deren Erzeugende einander parallel sind und mit der zur Axe senkrecht stehenden Ebene den sehr kleinen Winkel i einschliessen, wird der Kegelstumpf durch zwei coaxiale Cylinderflächen begrenzt, so dass sich die Berührungsgebiete der einzelnen Teile auf Kreislinien reduciren.

Es seien r_0 und r_1 die beiden Radien dieser Cylinderflächen, e die Dicke der Flächen, Q die Resultante der gesamten Belastung, welche als in der Axe wirkend angenommen wird. Der Verfasser berechnet unter gewissen vereinfachenden Annahmen die elastischen Kräfte. Unter Einführung von Cylindercoordinaten findet er für die Maxima der sechs Grössen

$$p_{zz} = 0, \quad p_{rr} = \frac{2k \operatorname{tg} i (\sqrt{r_0} - \sqrt{r_1})^2}{(r_0 + r_1)\sqrt{r_0 r_1}}, \qquad p_{rt} = 0, \quad p_{zt} = 0,$$

$$p_{tt} = -\frac{2k \operatorname{tang} i l}{r_0 + r_1}\left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} + \frac{r_0 + r_1}{\sqrt{2 r_0 r_1}}\right), \qquad p_{rz} = -\frac{k}{r_1},$$

wo

$$k = \frac{Q}{2\pi e \cos i}$$

gesetzt ist.

Damit p_{rz} die Grenze Γ nicht überschreite, muss

$$e \geqq \frac{Q}{2\pi \Gamma r_1 \cos i}$$

gesetzt werden.

F. K.

G. Mantel. Der elastische Bogen unter dem Einfluss von Kräften beliebiger Richtung. Schweiz. Bauztg. XII. 98-100, 111-112.

Die graphischen Methoden für die Behandlung des elastischen Bogens setzen gewöhnlich parallele Richtung der wirkenden Kräfte voraus. Der Verfasser behandelt das allgemeine Problem, welches sich darbietet, wenn die Kräfte verschiedene Richtung haben, indem er dieselben nach zwei festen Richtungen in Componenten zerlegt und dann für jedes Componentensystem einen besonderen Kräfteplan aufstellt. Bezüglich der Einzelheiten verweisen wir auf die Abhandlung. F. K.

G. Mantel. Kräfteplan eines Fachwerkbogens mit festem Auflager, auf welchem die Fahrbahn durch radial stehende Pfosten abgestützt ist. Schweiz. Bauztg XII. 157-160, 162-164.

Der Verfasser behandelt die vorliegende Aufgabe als ein Beispiel der in dem eben angeführten Artikel entwickelten Methoden. F. K.

T. J. Dewar. Resistance of square bars to torsion. Nature XXXVIII. 126.

Th. Hoech. Berechnung doppelter Hänge- und Sprengwerke bei einseitiger Belastung. Centralbl. d. Bauverw. VIII. 474-475.

Der Verfasser löst die Aufgabe, welche durch den Titel hinreichend gekennzeichnet ist, indem er das betreffende Tragwerk in einen Balkenträger und in ein Stabwerk aus vollkommenen Gelenken zerlegt. Das Stabwerk und der Versteifungsbalken müssen so lange ihre Form ändern, bis durch die Gegenwirkungen des verbogenen Balkens die Querkraft im Mittelfelde auf Null gebracht ist. Die Rechnungen, welche die Verfolgung dieses Weges mit sich bringt, sind einfach und bieten, vom Standpunkt des Mathematikers betrachtet, kein Interesse.

F. K.

J. F. Vergleich der Haltbarkeit der schweren Feldkanone als stählernes Mantelrohr und als Hartbronzerohr in Bezug auf den Maximalgasdruck. Arch. f. Art. XCV. 263-281.

Ein ziffernmässiger Vergleich der Festigkeitsverhältnisse beider Rohre in Bezug auf den massgebenden Maximalgasdruck. Der Verfasser hat sich hierbei der „Theorie der Elasticität und Festigkeit röhrenförmiger Körper“ von Georg Kaiser bedient, die betreffenden Formeln jedoch nur übernommen, im übrigen aber auf die Theorie selbst verwiesen. Lp.

J. A. Longridge. Further investigations regarding wire-gun construction. Sonderdruck aus den Proc. Soc. Civilengineers. London. LXXXIX.

Anzeige in Rev. d'Art. XXXI. 84-90; danach kommen fünf verschiedene Probleme zur Behandlung. 1) Untersuchung einer Kanone bestehend aus einem Rohr, aus einem Körper in Stahldraht und aus einer Verkleidung, die unter Druck über die Drähte gebracht ist. 2) Untersuchung der Kanonen, deren Rohr mit einer Ausfutterung oder einem inneren Rohr aus hartem Metall versehen ist. 3) Untersuchung der Kanonen, bei welchen die Drahtbekleidung durch Lagen von Längsdrähten unterbrochen ist. 4) Die Anfangsspannungen nach der Bedingung zu bestimmen, dass die Drähte während des Schusses gleich gespannt sind, wenn ein Teil des Inneren vom Rohre nach der Umwickelung fortgenommen wird. 5) Untersuchung der Spannungen, falls die Elasticitätsmoduln mit der Spannung veränderlich sind.

Lp.

G. Moch. Expériences américaines sur le frettage des bouches à feu. Rev. d'Art. XXXII. 544-571.

Besprechung der Versuche, über welche Birnie in den Nummern 25, 32, 39 und Crozier in Nummer 38 der Notes on the construction of ordnance berichtet haben. Lp.

N. V. Kalakuzki. Étude sur les tensions intérieures dans la fonte et l'acier. Rev. d'Art. XXXI. 289-324, 389-414, 485-497, XXXII. 5-23.

N. V. Kalakuzki. Note relative à des expériences sur les tensions intérieures dans l'acier. Rev. d'Art. XXXII. 165-175.

Der Verfasser, ein russischer General der Artillerie, hat an Scheiben, welche durch transversale Schnitte aus Kanonen gewonnen waren, die inneren Spannungen des Metalles bestimmt und ist dadurch zu der Ansicht gekommen, dass die jetzige Art der Reifungen der Kanonenrohre zu verwerfen sei.

„Bei den jetzigen Arten der Anfertigung sind die inneren Spannungen der Kanonen, der inneren Rohre, der Reifen und der Cylinder jedweder Art, ihrer Natur nach schädlich und verringern den Widerstand, welchen man den so bearbeiteten Stücken zuschreibt".

„Das Ziel, dem jede Fabrication zustreben muss, ist die Lieferung von Erzeugnissen vorgeschriebener Festigkeit. Nun aber lehrt die Theorie, dass der Widerstand eines beliebigen Cylinders ein Grösstes ist, wenn unter dem Einflusse äusserer Einwirkungen, z. B. während des Schusses, alle Schichten seiner Wandung gleichzeitig einer gleichförmigen Spannung unterworfen werden, die eine bestimmte Grenze nicht überschreiten. Bekanntlich erleiden bei den umreiften Kanonen die inneren Schichten des Rohrs und der Reifung im Augenblicke des Schusses gleichzeitig dieselbe Anspannung. Nimmt die Zahl der Reihen der Reifen zu, so beteiligt sich eine grössere Anzahl von Schichten am allgemeinen Widerstande. Aber es ist nicht möglich, alle Schichten an diesem Widerstande ebenso teilnehmen zu lassen, wie bei einem Cylinder mit ideell nützlichen Spannungen. Ein Cylinder dieser Art ist der Typus des vollendeten Geschützes. Es liegt kein Grund vor, es mit Reifen und energischer Pressung zu umgeben. Wir können also die verwickelte Construction der jetzigen Feuerrohre verlassen und ein einfaches, wenig kostspieliges Verfahren annehmen, welches alle wünschenswerten Bürgschaften bietet. Wir kehren zum homogenen Feuerrohr

zurück und betrachten als einen Anachronismus die Feuerrohre, welche man gegenwärtig aus einer grossen Anzahl getrennter Teile zusammensetzt, indem man vier und selbst sechs Reihen von Reifen anwendet". Lp.

A. Kriloff. Berechnung des Panzerturms für das Linienschiff „Kaiser Nicolai I". Russ. Marine-Journ. 1888. No. 5. (Russisch.)

Es handelt sich um eine Anwendung der Formeln für das Gleichgewicht eines elastischen Kreisringes auf eine Frage der Schiffsbaupraxis. Bb.

C. Capillarität.

J. Delsaux. Sur la théorie cinétique des phénomènes capillaires. Brux. S. sc. XII, B. 105-120.

Der Verfasser erhält die Grundgesetze der Capillarität aus der kinetischen Anschauung, indem er sich einzig auf das Princip von der Aequivalenz der lebendigen Kraft und der Arbeit stützt. Er zeigt hiernach, dass die Gauss'schen und die Laplace'schen Capillaritätsconstanten sich nur durch die Form unterscheiden. Mn. (Lp.)

W. F. Magie. The contact-angle of liquids and solids. Phil. Mag. (5) XXVI. 162-183.

Eine Abhandlung, welche über die Methoden, den benutzten Apparat und die gewonnenen Ergebnisse bei einer Reihe von Experimenten über den Randwinkel zwischen flüssigen und festen Körpern berichtet. Zum Schlusse des Artikels werden einige Bemerkungen über das Gesetz der molecularen Kraft gemacht, welche hinsichtlich der Capillartheorie von Interesse sind. Bei der Gauss'schen Berechnung des Randwinkels ist die Annahme gemacht, dass die beiden Functionen $f(x)$ und $F(x)$, von

denen die eine der Kraft zwischen zwei durch den Abstand x getrennten Elementen der Flüssigkeit, die andere der Kraft zwischen einem Elemente der Flüssigkeit und einem des festen Körpers proportional ist, in einem von x unabhängigen Verhältnisse stehen. Aus den Unregelmässigkeiten bei manchen experimentellen Daten wird der Schluss gezogen, dass die Gauss'sche Hypothese wahrscheinlich irrig ist. Gbs. (Lp.)

K. Fuchs. Ueber den Zusammenhang von Oberflächenspannung, Oberflächendichte und oberflächlicher Wärmeentwickelung. Exner Rep. XXIV. 298-317.

K. Fuchs. Ueber die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten. Exner Rep. XXIV. 614-647.

Die Capillaritätsconstanten oder Molecularfunctionen lassen sich nach der ersten Abhandlung leicht berechnen, wenn man annimmt, dass die Anziehungskraft eines Molecüls auf die umgebenden die Summe von unendlich vielen ineinander eingeschachtelten Elementarkräften ist, deren jede nur über eine unendlich kleine Strecke von r bis $r+dr$ mit der in diesem Intervall constanten Intensität $k_r = \mu f(r)$ auf die Masseneinheit wirksam ist. In der zweiten Abhandlung wird dieses Princip auf die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten mit Erfolg angewandt. Lp.

G. Van der Mensbrugghe. Quelques mots sur ma théorie du plage de l'huile. Belg. Bull. (3) XV. 263-272.

Genauere Darlegung dieser Theorie. Mn. (Lp.)

G. Van der Mensbrugghe. Sur les moyens d'évaluer et de combattre l'influence de la capillarité dans la densimétrie. Belg. Bull. (3) XVI. 31-42. Mn.

Capitel 2.

Akustik und Optik.

A. Akustik.

TH. WITTSTEIN. Grundzüge der mathematisch-physikalischen Theorie der Musik. Hannover. Hahn. IV u. 54 S. 8°.

Der Verfasser findet, dass die Theorie der musikalischen Töne in den physikalischen Lehrbüchern vernachlässigt und teilweise verderbt vorgetragen werde; die Helmholtz'sche „Lehre von den Tonempfindungen" aber sei kein Lehrbuch im eigentlichen Sinne, enthalte auch augenfällige Dunkelheiten. Das war die Veranlassung zu der Abfassung der hier vorliegenden Schrift, die durch die Art der Darstellung wohl geeignet ist, von den wichtigsten Fragen der physikalischen Theorie der Musik auch dem Nichtphysiker (der Verfasser wendet sich namentlich an die Musiker) ein klares Bild zu geben. Als mathematisch kann freilich die Theorie kaum bezeichnet werden, da eigentliche mathematische Entwickelungen (ausser einfachen Rechnungen elementarer Art) nicht benutzt werden.

Der Verfasser beginnt mit der Entstehung der gebräuchlichen Tonleiter und stellt derselben, da ihre Entwickelung erhebliche Inconsequenzen zeigt, eine zweite zur Seite, die aus neun Tönen mit folgenden Verhältnissen der Schwingungszahlen besteht:

$$1, \tfrac{8}{9}, \tfrac{8}{10}, \tfrac{8}{11}, \tfrac{8}{12}, \tfrac{8}{13}, \tfrac{8}{14}, \tfrac{8}{15}, \tfrac{8}{16}.$$

Er meint, dass diese zweite Tonleiter bei den Griechen im Gebrauch gewesen ist, und sucht darzuthun, weshalb man vermutlich von dieser zur gebräuchlichen Tonleiter gekommen sei. Es folgt die Besprechung der verschiedenen Tonarten in Dur, sowie der diatonischen und chromatischen Tonleiter. Sodann wird der Begriff der gleichschwebenden Temperatur erläutert, woran sich die Tonarten in Moll und die harmonische Tonleiter

schliessen. Endlich werden die Begriffe der Ober- und Untertöne erörtert und die Rolle besprochen, welche dieselben in der Musik spielen. Wn.

F. Melde. Chladni's Leben und Wirken. 2te Auflage. Marburg. Elwert. 80 S. 8°.

Die vorliegende Schrift ist eine Erweiterung der Darstellung des Lebens und Wirkens Chladni's, die der Verfasser 1867 als Programm gelegentlich einer Marburger Universitäts-Feierlichkeit veröffentlicht hatte. Der Hauptzweck dieser Darstellung ist, die Bedeutung der Entdeckungen und schriftstellerischen Thätigkeit Chladni's darzuthun, und es wird deshalb auf dessen wichtigste Arbeiten sowie ihre Entstehung ausführlich eingegangen, während über das äussere, sehr bewegte Leben des um die Akustik und die Erklärung der Feuermeteore hochverdienten Forschers kürzer berichtet wird. Wir heben aus diesem Teile der Darstellung hervor, dass Ernst Florens Friedrich Chladni am 30. November 1756 zu Wittenberg geboren, am 4. April 1827 in Breslau gestorben ist.

Ein chronologisch geordnetes Verzeichnis der Schriften Chladni's, das nebst einem Bilde unseres Forschers dem Buche beigegeben ist, umfasst nahezu 10 Seiten. Von den Schriften ist etwa die Hälfte der Akustik gewidmet, ein Drittel ungefähr betrifft die Feuermeteore, während der Rest physikalischen und vermischten Inhalts ist. Ein weiteres Verzeichnis von Schriften, Abhandlungen und Notizen über Chladni's Leben und Wirken umfasst zwei Seiten. Wn.

Lord Rayleigh. On point-, line-, and plane-sources of sound. Lond. M. S. Proc. XIX. 504-507.

Falls die Schallquelle eine unendlich lange gerade Linie bildet, ist das Geschwindigkeitspotential, abgesehen von dem nur von der Zeit abhängigen Factor e^{ikat},

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-ikrv}\,dv}{\sqrt{v^2-1}},$$

worin r der Abstand des betrachteten Punktes von jener Linie ist. Um das rechts stehende Integral in eine Reihe zu entwickeln, wird das Hülfsintegral

$$\int \frac{e^{-rw}dw}{\sqrt{1+w^2}},$$

in dem w eine complexe Variable ist, über zwei verschiedene geschlossene Wege erstreckt, die den Punkt $w = \pm i$ nicht umschliessen. Aus den beiden so gewonnenen Gleichungen kann man gewisse Teilintegrale eliminiren und findet so das Resultat:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-irv}dv}{\sqrt{v^2-1}} = \frac{e^{-ir}}{\sqrt{2ir}}\int_0^\infty \frac{e^{-s}s^{-\frac{1}{2}}ds}{\sqrt{1+\frac{s}{2ir}}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2ir}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-ir}\left\{1-\frac{1^2}{1.8ir}+\frac{1^2.3^2}{1.2.(8ir)^2}-\frac{1^2.3^2.5^2}{1.2.3.(8ir)^3}+\cdots\right\}.$$

Die Betrachtung des Hülfsintegrals ergiebt ferner für die Bessel'sche Function $J_0(r)$ die zuerst von Mehler aufgestellte Gleichung

$$J_0(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin(rv)dv}{\sqrt{v^2-1}}.$$

Das Geschwindigkeitspotential Φ für eine ebene Schallquelle erhält man, indem man die Ebene aus unendlich vielen parallelen linienförmigen Quellen zusammengesetzt denkt. Demnach wird, falls der betrachtete Punkt den Abstand z von jener Ebene hat,

$$\Phi = -\frac{1}{\pi}\int_z^\infty \frac{z\,dr}{\sqrt{r^2-z^2}}\int_1^\infty \frac{e^{-ikrv}dv}{\sqrt{v^2-1}}.$$

Andererseits muss in diesem Falle

$$\Phi = \frac{i}{2k}e^{-ikz}$$

sein. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke gewinnt man eine interessante analytische Beziehung, aus der sich u. a. die Folgerung ergiebt:

$$\int_z^\infty \frac{J_0(kr)r\,dr}{\sqrt{r^2-z^2}} = \frac{\cos(kz)}{k}.$$

Wn.

G. MORERA. Sul problema della corda vibrante. Torino Atti. XXIII. 402-417.

Beschäftigt sich mit dem Zusammenhang von D'Alembert's und Bernoulli's Lösung des in Frage stehenden Problems, für den Fall, dass die Ableitungen der Abweichung von der Gleichgewichtslage Unstetigkeiten aufweisen.

Zum Schluss wird der Satz bewiesen, dass die Energie einer schwingenden Saite gleich der Summe der Energien für die einzelnen Schwingungen ist, dass demzufolge auch der Ton einer schwingenden Saite nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ aus Einzeltönen zusammengesetzt ist. F. K.

O. KRIGAR-MENZEL. Ueber die Bewegung gestrichener Saiten. Diss. Berlin 41 S. 4°.

L. MALAVASI. Le figure di Chladni ed il metodo di Wheatstone. Modena Mem. (2) VI. 125-147.

Wheatstone hat zuerst durch Betrachtung der Bewegungen, die durch Superposition zweier synchronen Schwingungen entstehen, die Knotenlinien einer quadratischen Platte zu bestimmen gesucht. Diese Untersuchung wird hier auf rechteckige Platten ausgedehnt. Durch einfache Ueberlegungen findet der Verfasser folgende Resultate:

1) Damit zwei Schwingungen gleichzeitig existiren können, deren eine n Knotenlinien parallel der längeren Rechtecksseite a, die andere m Knotenlinien parallel der kürzeren Seite b besitzt, muss

$$\frac{a}{b}=\frac{2m-1}{2n-1}$$

sein.

2) Damit die aus den beiden vorgenannten Schwingungen resultirende Bewegung gleichzeitig mit einer anderen derartigen Bewegung bestehen kann, bei der nur die Zahlen m', n' an Stelle

von m, n treten, ist erforderlich, dass

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{m+m'}{n+n'}}$$

und zugleich

$$m+n = m'+n',$$

oder dass

$$\frac{(m+n)^2}{m^2b^2+n^2a^2} : \frac{(m'+n')^2}{m'^2b^2+n'^2a^2} = [2(m+n)-1]^2 : [2(m'+n')-1]^2$$

ist. Das System der bei jeder zusammengesetzten Bewegung entstehenden Knotenlinien, die immer gerade, gegen die Seiten des Rechtecks geneigte Linien bilden, ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass kein Punkt der Platte, bei dem die Fundamentalschwingungen dasselbe Vorzeichen haben, ein Knotenpunkt sein kann. Die Resultate werden auf verschiedene Beispiele angewandt und durch eine grosse Zahl von Figuren erläutert.

Ein näheres Eingehen auf Einzelheiten dürfte um so weniger angebracht sein, als von den Resultaten dasselbe gilt, was Lord Rayleigh („Die Theorie des Schalles“, deutsch von Neesen, Teil I p. 412) von den Resultaten Wheatstone's sagt, dass sie sich nur in sehr roher Weise auf Platten anwenden lassen. Wn.

E. Mach. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des durch scharfe Schüsse erregten Schalles. Wien. Ber. XCVII. 1045-1052.

Auf Grund photographischer Fixirung der durch Projectile in der Luft eingeleiteten Vorgänge (Wien. Ber. XCV) ist Herr Mach zu folgender Anschauung gelangt. Das abgeschossene Projectil wird von einer Schallwelle (Kopfwelle) begleitet, die sich mit derselben Geschwindigkeit wie das Projectil bewegt, so dass der Knall am Ziel zugleich mit dem Einschlagen des Geschosses gehört wird. Durch das Auffangen des Projectils wird die Schallgeschwindigkeit sofort in die normale verwandelt. Das Rollen des Knalls ist, wie beim Donner, dadurch zu erklären, dass teils directe, teils von ungleich grossen und ungleich entfernten Flächen reflectirte Wellenstücke nach einander

das Ohr treffen, nicht aber dadurch, dass das Geschoss selbst dröhnt. Diese Anschauungen legt der Verfasser hier aufs neue dar, teils zur Wahrung seiner Priorität, teils zur Bekämpfung abweichender Anschauungen der Herren Sebert und Labouret. Mathematische Entwickelungen werden nicht daran geknüpft.

Wn.

J. Gromeka. Ueber den Einfluss der Temperatur auf die kleinen Schwingungen gasförmiger Körper. Kasan. Nachr. 1-37. (Russisch.)

J. Gromeka. Ueber den Einfluss der ungleichförmigen Verteilung der Temperatur auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Mosk. math. Samml. XIV. 283-302. (Russisch.)

Der Inhalt beider Aufsätze ist der nämliche. Es wird angenommen, dass der gasförmige Körper vor dem Beginne der Schwingungen sich bei gewisser gegebener Verteilung der Temperatur und der Dichte im Gleichgewichte befand. Ferner wird vorausgesetzt, dass das Gas den Gesetzen Mariotte's und Gay-Lussac's genügt, und dass der Process der Veränderung der Dichtigkeit während der Schwingungen ein adiabatischer ist. Indem der Verfasser die zweiten und höheren Potenzen der Geschwindigkeiten und der Veränderungen der Dichte und des Druckes vernachlässigt, findet er Differentialgleichungen, welche er zur Untersuchung der Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen und der Grösse der Schwingungsamplituden einerseits und der Temperatur andererseits in den folgenden Fällen anwendet:

1) In dem Falle ebener, längs der positiven oder negativen X-Axe fortlaufender Wellen, wobei die Temperatur T dem Gesetze $T = T_0 - \varepsilon x$ (wo ε eine Constante ist) folgt. Hier erweist sich der Laplace'sche Ausdruck der Schallgeschwindigkeit (proportional zu $\sqrt{T}$) als geltend. Die Grösse der Amplitude ist proportional der vierten Wurzel aus T.

2) In dem Falle ebener Wellen und folgender Relation zwischen x und der Temperatur: $T = \lambda x^2$, wo λ eine Constante be-

deutet. Hier ist eine fortschreitende Bewegung der Welle nur für Schwingungen möglich, deren Dauer eine gewisse Grenze nicht überschreitet, und die Geschwindigkeit solcher Schwingungen folgt nicht dem Laplace'schen Ausdrucke, sondern hängt von der Dauer der Schwingungen ab, indem sie mit ihr wächst; die Schwingungsamplitude ist proportional der Quadratwurzel aus x. Für Schwingungen aber, deren Dauer die genannte Grenze überschreitet, ist nur die Form stehender Wellen möglich.

3) Die Fortpflanzung sphärischer Wellen aus einem gegebenen Centrum, wenn die Temperatur sich umgekehrt proportional der Entfernung r vom Centrum ändert. In diesem Falle genügt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dem Gesetze Laplace's, die Amplitude ist der vierten Wurzel aus r^5 umgekehrt proportional.

4) Endlich untersucht der Verfasser den Fall eines Gases, welches einen Körper von der Form eines Rotationscylinders umgiebt, wobei die Temperatur des Gases proportional dem Quadrate der Entfernung von der Axe des Cylinders wächst. In diesem Falle sind Schwingungen senkrecht zu den Radien und der Axe des Cylinders möglich, die sich in Form ebener, sich um die Axe des Cylinders drehender Wellen fortpflanzen. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit folgt dem Laplace'schen Gesetze, und die Amplitude der Schwingungen ist dem Radius proportional.
Bb.

R. Holmes. On the equations of motion of a sound wave in a compressible fluid which is rendered heterogenous by a constant accelerating force in a given direction. Mess. (2) XVIII. 108-113.

Ermittelung der Schallbewegung in einer durch die Einwirkung der Schwere heterogen gemachten Atmosphäre. Die Bewegungsgleichungen werden für zwei Bewegungsklassen gelöst: 1) Störungen, die sich in ebenen Wellen aufwärts oder abwärts fortpflanzen; 2) Störungen, die sich in den beiden seitlichen Richtungen, aber nicht in der verticalen fortpflanzen. Bedeutet V_1 die abwärts gerichtete Fortpflanzungsgeschwindigkeit,

V_0 die Schallgeschwindigkeit in einer homogenen Atmosphäre von derselben Temperatur, so wird das angenäherte Ergebnis gefunden:

$$V_1 - V_0 = \frac{g^2 V^2}{8 n^2 V_0}.$$

Hieraus würde hervorgehen, dass die Wirkung der Schwere auf tiefe Töne grösser ist als auf hohe. Glr. (Lp.)

A. KURZ. Der Elasticitätsmodul und die Schallgeschwindigkeit. Didaktische Studie. Exner Rep. XXIV. 592-599.

Es handelt sich nur um die Methodik der Darstellung in den Lehrbüchern. Lp.

O. TUMLIRZ. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite. Exner Rep. XXIV. 115-132.

Abdruck aus Wien. Ber. XCV. 367 (F. d. M. XIX. 1887. 1067).

A. STEFANINI. Dell' energia minima che è necessaria a produrre la sensazione del suono. Nuovo Cimento (3) XXIV. 218-234.

Eine theoretische Studie über die Versuche, welche Herr Wead zu diesem Behufe angestellt hat (Silliman J. XXVI. 177. 1883). Lp.

M. WIEN. Ueber die Messung der Tonstärke. Diss. Berlin. 70 S. 8°.

Lord RAYLEIGH. Diffraction of sound. Nature XXXVIII. 208-211.

B. Theoretische Optik.

E. Lommel. Joseph v. Fraunhofer's gesammelte Schriften. München. G. Franz. XV u. 310 S. 4°.

Die Feier des hundertjährigen Geburtstages Fraunhofer's (cf. F. d. M. XIX. 1887. 17) war für die bayerische Akademie die Veranlassung, die in verschiedenen Zeitschriften zerstreuten und teilweise schwer zugänglichen Abhandlungen ihres berühmten ehemaligen Mitgliedes, in einem Bande gesammelt, neu herauszugeben.

Diese neue, von Herrn E. Lommel besorgte und mit einem Vorwort begleitete, Ausgabe liegt hier vor. Sie enthält die folgenden Arbeiten, die sämtlich der praktischen oder der theoretischen Optik angehören.

1) Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten, in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernröhre.

2) Versuche über die Ursachen des Anlaufens und Mattwerdens des Glases und die Mittel, denselben zuvorzukommen.

3) Neue Modification des Lichtes durch gegenseitige Einwirkung und Beugung der Strahlen, und Gesetze derselben.

4) und 5) Zwei Briefe Fraunhofer's an Schumacher.

6) Kurzer Bericht von den Resultaten neuer Versuche über die Gesetze des Lichtes, und die Theorie derselben.

7) Ueber die Erfindung dreier verschiedener astronomischer Mikrometer.

8) Beschreibung eines neuen Mikrometers.

9) Ueber die Erfindung eines neuen Heliostats.

10) Ueber das Reinigen achromatischer Objective, und das Wiederhineinmachen derselben in ihre Fassungen.

11) Ueber die Brechbarkeit des elektrischen Lichtes.

12) und 13) Ueber die Construction eines grossen Refractors.

14) und 15) Theorie der Höfe, Nebensonnen und verwandter Phänomene mit Versuchen zur Bestätigung derselben.

Als Anhang folgen die (von Fraunhofer selbst verfassten) französischen Uebersetzungen der sub 1) und 3) genannten Arbeiten. In der zweiten dieser Uebersetzungen ist die von Fraunhofer später angenommene zweckmässigere Benennungsweise für die verschiedenen Arten der Beugungsspectra zuerst durchgeführt.

Die Ausstattung des Bandes, dem ein als Büste dargestelltes Bild Fraunhofer's beigegeben ist, ist eine vorzügliche. Die zu den einzelnen Abhandlungen gehörigen Tafeln sind photographische Nachbildungen der Zeichnungen Fraunhofer's. Wn.

G. A. Maggi. Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo. Annali di Mat. (2) XVI. 21-48.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich eng an den wichtigen Aufsatz von G. Kirchhoff „Zur Theorie der Lichtstrahlen" (Berl. Ber. 1882, cf. F. d. M. XIV. 1882. 829 ff.) an. Die Grundlage der Kirchhoff'schen Untersuchungen bildet ein Satz, der eine Präcisirung und Verallgemeinerung des Huygens'schen Princips darstellt. Für diesen Satz giebt Herr Maggi im ersten Teile seiner Arbeit einen neuen Beweis. Die Kirchhoff'sche Ableitung. die sich auf den Green'schen Satz stützt, hält Herr Maggi deshalb nicht für ausreichend, weil bei derselben eine Hülfsfunction benutzt werde, deren Existenz nicht zweifellos sei. Der Gedankengang des neuen Beweises ist folgender: Es lässt sich leicht eine solche Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 V,$$

in der $\Delta_2 V$ das bekannte Symbol bedeutet, angeben, welche die Form eines Flächenintegrals hat. Dieses Flächenintegral wird in ein Raumintegral verwandelt und sodann untersucht, unter welchen Bedingungen das Element des letzteren überall verschwindet. Die Anwendung der so ermittelten allgemeineren Bedingungen führt unmittelbar auf das Kirchhoff'sche Resultat (F. d. M. XIV. 1882. 830, Gleichung 2).

Im zweiten Teil erörtert Herr Maggi die Ausbreitung der von einem festen Centrum ausgehenden Kugelwellen in einem Medium, in welchem sich ein nicht leuchtender Körper befindet. Das hier gewonnene Resultat ist wiederum mit dem Kirchhoff'schen identisch, die Ableitung eine wesentlich andere. Herr Maggi stellt die Kugelwellen nicht mittels trigonometrischer Functionen dar, sondern behält statt dessen eine willkürliche Function ψ bei, der er, damit die Wellen interferiren können, die Eigenschaft

$$\psi(\xi + \tfrac{1}{2}\lambda) = -\psi(\xi)$$

beilegt. Sodann führt er in dem über die Oberfläche des dunklen Körpers zu erstreckenden Kirchhoff'schen Integral

$$\int \Omega\, ds$$

statt der rechtwinkligen Coordinaten elliptische Coordinaten ein, bei denen eine Flächenschar aus verlängerten confocalen Rotationsellipsoiden besteht; und zwar haben dieselben das Centrum der Kugelwellen und den Punkt, in dem die Lichtbewegung bestimmt werden soll, zu Brennpunkten. Nach Einführung der neuen Variabeln lässt sich das obige Flächenintegral in ein über die Grenzcurve der Fläche zu erstreckendes Linienintegral verwandeln, und dessen Discussion giebt das Kirchhoff'sche Resultat (F. d. M. XIV. 1882. 831).

Die hier benutzte Umformung eines Flächenintegrals in ein Randintegral beruht auf einer von Stokes aufgestellten Formel, welche das in beliebigen krummlinigen Coordinaten q_1, q_2, q_3 ausgedrückte, über irgend eine Raumcurve zu erstreckende Linienintegral

$$\int (U_1 dq_1 + U_2 dq_2 + U_3 dq_3)$$

[U_1, U_2, U_3 sind längs des Randes monodrome, continuirliche und endliche Functionen] in ein Flächenintegral verwandelt. Der Ableitung dieser Stokes'schen Formel ist der dritte Teil der Arbeit gewidmet, während im vierten Teil auf Grund der in den beiden ersten Teilen abgeleiteten Formeln die Bildung des

Schattens eines dunklen Körpers erörtert wird. Dabei wird wesentlich der Kirchhoff'sche Gedankengang reproducirt.

Wn.

W. Voigt. Theorie des Lichtes für bewegte Medien. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 370-396, 524-551.

Abdruck der Arbeit, über die F. d. M. XIX. 1887. 1080 ausführlich berichtet ist.

Wn.

D. W. B. Brace. On the transparency of the ether. Nebrasca Univ. Studies. I. 1-16.

Der Verfasser hält es für eine offene Frage, ob nicht im freien Aether Absorption stattfinde, wenn auch nur eine sehr geringe, und will daher untersuchen, welchen Einfluss eine derartige Absorption auf die Intensität des Lichtes der Sterne habe. Er nimmt zu dem Zwecke an, dass zu den elastischen Kräften des Aethers eine Art Reibungskraft hinzukomme. Zu den Gleichungen der elastischen Bewegung würden danach Glieder von derselben Form neu hinzutreten, wie in den hydrodynamischen Gleichungen bei Berücksichtigung der Reibung. Auf Grund dieser Annahme wird die Bewegung ebener Wellen, die sich der Richtung y parallel fortpflanzen, während ihre Schwingungen parallel x sind, durch folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^3\xi}{\partial t\partial y^2}.$$

Dieselbe ergiebt ein Integral von folgender Form:

$$(2) \qquad \xi = Ae^{-\varkappa y}\cos 2\pi\left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{T}\right);$$

und für kleine Werte von ν, und in Folge dessen von $\varkappa$, wird in erster Näherung

$$(3) \qquad \varkappa = \frac{2\pi^2\nu}{a\lambda^2}.$$

Durch eine andere Betrachtung, die von der Annahme ausgeht, dass die Aenderung der Verrückung während einer kurzen Zeit der Wellenlänge umgekehrt proportional ist, wird für ξ wiederum

der Ausdruck (2) gefunden, nur dass jetzt

$$(4) \qquad \varkappa = \frac{\alpha}{a\lambda}$$

ist. Endlich wird für $\varkappa$ noch eine dritte Form, die sich aus der Combination der beiden eben erwähnten ergiebt, ohne weitere Begründung als möglich angenommen, nämlich

$$(5) \qquad \varkappa = \frac{\theta_1}{a\lambda} + \frac{\theta_2}{a\lambda^2}.$$

Für jeden der drei Werte von $\varkappa$ hängt die Intensität in anderer Art von λ ab; die verschiedenen daraus folgenden Intensitätscurven werden discutirt.

Die Grundlagen der obigen Entwickelungen sind sehr hypothetischer Natur. Dasselbe gilt von den Bemerkungen, die der Verfasser nebenbei über die Verteilung der Sterne im Raume macht. Wn.

M. Lévy. Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel. Journ. de Math. (4) IV. 257-312.

Ueber die hauptsächlichsten Resultate dieser Arbeit ist bereits im vorigen Jahre (F. d. M. XIX. 1887. 1074) nach der vorläufigen Mitteilung des Verfassers in den C. R. berichtet. Indem wir auf jenen Bericht verweisen, teilen wir aus der hier vorliegenden ausführlichen Abhandlung über die Ableitung jener Resultate Folgendes mit. Herr Lévy geht von folgenden Gleichungen für die Lichtbewegung in einem Krystall aus:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au + Hv + G'w, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = H'u + Bv + Fw, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Gu + F'v + Cw. \end{cases}$$

Darin bedeutet Au eine homogene lineare Function der sechs zweiten Ableitungen von u nach x, y, z mit constanten Coefficienten; und eine analoge Bedeutung haben B, C, F, F', G, G', H, H'. Sind nun u, v, w die Componenten einer ebenen Welle,

deren Normale die Richtungscosinus l, m, n und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω hat, so ergeben, wie bekannt, die Gleichungen (1) drei Relationen zwischen ω^2 einerseits und den Cosinus der Schwingungsrichtung andererseits; und nach Elimination der letzteren erhält man eine Gleichung dritten Grades für ω^2. Es wird nun gefragt, unter welcher Bedingung zwei Wurzeln dieser Gleichung zugleich der Fresnel'schen Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen in zweiaxigen Krystallen

$$\frac{l^2}{a^2-\omega^2}+\frac{m^2}{b^2-\omega^2}+\frac{n^2}{c^2-\omega^2}=0$$

genügen, in der a, b, c gegebene Constanten sind. Dazu ist erforderlich, 1) dass das constante Glied der Gleichung dritten Grades für ω^2 durch $l^2+m^2+n^2$ teilbar ist; 2) dass die dritte Wurzel jener Gleichung die Form hat

$$\omega^2 = A+B+C-(b^2+c^2)l^2-(c^2+a^2)m^2-(a^2+b^2)n^2,$$

falls jetzt A, B, C die homogenen Functionen zweiten Grades von l, m, n bezeichnen, die aus Au, Bv, Cw durch Substitution der oben erwähnten Ausdrücke für u, v, w hervorgehen; 3) müssen, falls F, F' etc. eine den A, B, C analoge Bedeutung haben, zwei Gleichungen bestehen, deren eine Producte je zweier jener homogenen Functionen, die andere Producte von drei solchen Functionen enthält. Durch diese Relationen ergeben sich für die 54 in den Gleichungen (1) enthaltenen Constanten 43 Bedingungsgleichungen.

Nach Ableitung dieser Resultate beschränkt der Verfasser die weitere Untersuchung auf den Fall, dass die zu Grunde gelegten Coordinatenebenen Symmetrieebenen des Krystalls sind, in welchem Falle die Gleichungen (1) nur 15 Constanten an Stelle der früheren 54 enthalten. Durch Anwendung der beiden ersten der obigen allgemeinen Bedingungen lassen sich 6 von jenen 15 Constanten durch a^2, b^2, c^2 ausdrücken, während 9 willkürlich bleiben; und zwar kann man den in Rede stehenden Bedingungen auf 216 verschiedene Arten genügen. Diese 216 verschiedenen möglichen Lösungen zerfallen in 27 Gruppen derart, dass für alle Lösungen derselben Gruppe die Geschwindig-

keit der dritten Welle durch denselben Ausdruck dargestellt wird. Sind jene 216 Lösungen von rein analytischem Standpunkte aus völlig gleichwertig, so sind doch die meisten physikalisch nicht zulässig. Denn da zwischen den drei Brechungsindices $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ kein qualitativer Unterschied besteht, müssen die drei Differentialgleichungen der Bewegung in Bezug auf die drei Coordinatenebenen symmetrisch sein. Nach Einführung dieser Beschränkung bleiben von den 216 Möglichkeiten nur 6 übrig. Wendet man auf jeden dieser 6 Fälle noch die dritte der oben abgeleiteten allgemeinen Bedingungen an, so ergeben sich jedesmal zwischen 6 der bisher noch willkürlich gebliebenen 9 Constanten 4 Relationen, denen man auf doppelte Weise genügen kann. Jede der noch übrigen 6 Möglichkeiten giebt also zwei verschiedene Lösungen, und in jeder Lösung sind 5 willkürliche Constanten enthalten. Vier jener zweimal 6 Lösungen sind die F. d. M. XIX. 1075 aufgeführten, mit (A_1), (A_2), (B_1), (B_2) bezeichneten Gleichungssysteme. Die 8 übrigen Lösungen, von denen je zwei zusammenfallen, sind in Bezug auf die Coordinatenebenen in sofern nicht symmetrisch, als z. B. eine Vertauschung von v und w und gleichzeitig von b und c die Gleichung für u ändert. Das ist wiederum aus den oben angeführten Gründen unzulässig, weshalb auch diese Lösungen auszuschliessen sind. Die F. d. M. XIX angegebenen Formen der Differentialgleichungen bleiben somit als einzig mögliche übrig.

Hinsichtlich der Resultate, die sich aus der weiteren Discussion der Gleichungen (A_1), (A_2), (B_1), (B_2) ergeben, verweisen wir auf das vorjährige Referat und bemerken nur noch, dass für die Lösung (A_1) die Schwingungsrichtung [oder, allgemeiner zu reden, die Richtung des Lichtvectors] in der Polarisationsebene liegt, aber nicht mehr in der Wellenebene. Wn.

P. Volkmann. Einfache Ableitung des Green'schen Ausdrucks für das Potential des Lichtäthers. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 354-360.

Während der allgemeine Potentialausdruck elastischer Kräfte für krystallinische Medien 21 Constanten enthält, legt Green seiner Lichttheorie eine Form des elastischen Potentials zu Grunde, die nur von 7, und falls man von longitudinalen Wellen abstrahirt, nur von 6 Constanten abhängig ist. In dem vorliegenden Aufsatz wird nun der Zusammenhang des speciellen Green'schen Ausdrucks, der auch von Kirchhoff (cf. F. d. M. VIII. 1876. 647 ff.) benutzt ist, mit dem ersterwähnten allgemeineren Ausdruck aufgedeckt. Führt man nämlich in die allgemeinen elastischen Differentialgleichungen die Bedingung der Incompressibilität ein, so ergiebt sich, dass zwischen den elastischen Druckcomponenten und daher auch zwischen den sechs elastischen Deformationen eine Gleichung besteht, deren identische Erfüllung erfordert, dass 9 der oben erwähnten 21 Constanten verschwinden, und dass ausserdem zwischen den 12 übrigen noch 6 lineare Beziehungen bestehen. Vermöge dieser Beziehungen geht nun der allgemeine Potentialausdruck unmittelbar in den über, der aus dem Green'schen folgt, falls man von den longitudinalen Wellen abstrahirt. Wn.

W. Walton. On the coincidence of ray-directions in a biaxis crystal which correspond to certain conjugate planes of polarization. Quart. J. XXIII. 7-10.

Die hier behandelte Frage lautet: Wann gehören zu zwei parallelen Wellenebenen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten in einem zweiaxigen Krystall fortpflanzen, gleiche Strahlenrichtungen? Eine Discussion, die sich auf bekannte Formeln stützt, ergiebt, dass die Strahlenrichtungen nur zusammenfallen, wenn die beiden Wellenebenen einem der drei Hauptschnitte der Wellenfläche parallel sind, sowie, wenn die Wellenebenen zu einer der optischen Axen senkrecht stehen. Im letzteren Falle aber gehört zu der betreffenden Wellenebene gar keine bestimmte Strahlenrichtung, und daher entspricht dieser Fall nach des Referenten Ansicht keiner eigentlichen Lösung der gestellten Frage. Wn.

Ch. Soret. Sur la mesure des indices de réfraction des cristaux à deux axes, par l'observation des angles limites de réflexion totale sur des faces quelconques. C. R. CVII. 176-178, 479-482.

Bei der Bestimmung der Hauptbrechungsindices eines zweiaxigen Krystalls durch die Methode der totalen Reflexion operirte man bisher stets mit Flächen, die einer der Elasticitätsaxen des Krystalls parallel sind. Diese Beschränkung ist unnötig; man kann die Beobachtung auch an einer beliebig orientirten Ebene anstellen, und zwar beruht diese Erweiterung der Beobachtungsmethode auf folgenden Sätzen, die zunächst für solche Schnitte der Wellenfläche gelten, die nicht in der Nähe der singulären Punkte verlaufen.

1) Bestimmt man in irgend einem Diametralschnitt der Wellenfläche die Maxima und Minima des Radiusvector, so sind von den sich ergebenden vier Werten drei den Axenlängen der Fläche gleich [vgl. eine Arbeit von Brill, über die F. d. M. XVI. 1883. 920 berichtet ist].

2) Ist J der Grenzwinkel der totalen Reflexion, v der Brechungsexponent des Mediums, in dem die totale Reflexion stattfindet, so ist

$$V = \frac{v}{\sin J}$$

der in der Einfallsebene liegende Radiusvector der Fusspunktcurve des Schnitts der Wellenfläche mit der reflectirenden Ebene.

3) In jedem Schnitt der Wellenfläche, der eine convexe Curve giebt, fallen die Maxima und Minima des Radius der Fusspunktcurve mit denen des Schnittes selbst zusammen.

In dem zweiten Aufsatze werden auch solche Schnitte der Wellenfläche betrachtet, die durch die singulären Punkte gehen oder in der Nähe derselben verlaufen, in welchem letzteren Falle der äussere Teil der Schnittcurve zwei Inflexionspunkte hat. Für diese Fälle werden die Grenzen der totalen Reflexionen constructiv bestimmt. Die Ermittelung des mittleren der drei Hauptbrechungsindices erfordert dabei besondere Vorsicht. Wn.

Th. Liebisch. Ueber das Minimum der Ablenkung durch Prismen optisch zweiaxiger Krystalle. Gött. N. 197-201.

Discussion einiger Fälle, in denen Prismen optisch zweiaxiger Krystalle krystallographisch so orientirt sind, dass die Beobachtung des Minimums der Ablenkung zur Berechnung der Hauptlichtgeschwindigkeiten ausreicht, und zwar ohne dass es nötig ist, die zugehörigen Einfallswinkel zu messen.

R. M.

J. Kerr. Experiments on the birefringent action of strained glasses. Phil. Mag. (5) XXVI. 321-342.

Nach einer kurzen Uebersicht über die Leistungen früherer Forscher berichtet der Verfasser über eine Reihe von Versuchen, die er über die doppelbrechende Wirkung gepresster Gläser angestellt hat. Die Ergebnisse sind in einer Reihe von 13 Sätzen geordnet, die eine gedrängte Zusammenstellung der behandelten Fragen und gewonnenen Resultate liefern.

Gbs. (Lp.)

F. Pockels. Ueber den Einfluss elastischer Deformationen, speciell einseitigen Druckes, auf das optische Verhalten krystallinischer Körper. Leipzig. J. A. Barth, Diss. Göttingen. 93 S. 8°.

O. Wiener. Gemeinsame Wirkung von Circularpolarisation und Doppelbrechung, geometrisch dargestellt. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 1-24.

Die Frage, deren Beantwortung die vorliegende Arbeit gewidmet ist, ist folgende: Wie kann man, falls circularpolarisirende und doppelbrechende Kräfte gleichzeitig auftreten, aus der bekannten Einzelwirkung der Circularpolarisation und Doppelbrechung die Gesamtwirkung beider voraussagen? Diese Frage ist schon von Herrn Gouy [Almeida J. (2) IV. 1885; vgl. auch F. d. M. XVII. 1885. 1005] untersucht. Während aber dieser

Autor sich der Rechnung bedient, stützt sich Herr Wiener auf geometrische Betrachtungen. Als Operationsmittel bedient er sich, und das ist das wesentlich Neue seiner Methode, des Begriffes „Circularelement“, worunter er eine Circularschwingung von unendlich kleiner Amplitude versteht.

Zunächst werden mehrere Sätze über die Zusammensetzung von Circularschwingungen aufgestellt; sodann wird die Formänderung, welche eine Circularschwingung innerhalb eines Wegelements durch die Doppelbrechung erfährt, zurückgeführt auf die Zusammensetzung jener Schwingung mit einem Circularelement. Hieraus ergiebt sich auch die Aenderung einer elliptischen Schwingung, die ja als aus zwei circularen bestehend angesehen werden kann, innerhalb eines Wegelements und weiter innerhalb einer endlichen Strecke. Nachdem noch die Wirkung der Circularpolarisation allein auf eine elliptische Schwingung erörtert ist, wird die oben erwähnte Hauptaufgabe in Angriff genommen. Es werden zunächst die von Gouy entdeckten sogenannten ausgezeichneten Schwingungen bestimmt, d. h. diejenigen elliptischen Schwingungen, welche sich bei gleichzeitiger Wirkung von Doppelbrechung und Circularpolarisation ohne Drehung und Formänderung in dem betrachteten Medium fortpflanzen. Dann wird der Specialfall durchgeführt, in dem das einfallende Licht parallel einer Axe der Doppelbrechung geradlinig polarisirt ist, endlich der allgemeine Fall, bei dem die in den Körper eintretende Schwingung ein beliebiges Azimut und beliebige Elliptícität besitzt. In beiden Fällen wird die Aufgabe zuerst constructiv gelöst, und aus der Construction werden dann die entsprechenden Formeln abgeleitet. Indem wir hinsichtlich dieser Formeln auf die Arbeit selbst verweisen, führen wir das folgende Resultat an, welches die Hauptergebnisse der Untersuchung zusammenfasst: „Herrscht bei der gleichzeitigen Wirkung von Circularpolarisation und Doppelbrechung die eine vor, so wird die andere teilweise verdeckt. Eine starke Doppelbrechung drückt die Drehung der Circularpolarisation und eine starke Circularpolarisation das Elliptischmachen der Doppelbrechung herab“.

Zum Schluss mag noch bemerkt werden, dass die Resultate des oben erwähnten allgemeinen Falles, der von Gouy nicht behandelt ist, neu sind; dass ferner Herr Wiener auch in Bezug auf verschiedene andere Einzelresultate über Gouy hinausgeht.

Wn.

Sir William Thomson. On the reflexion and refraction of light. Phil. Mag. (5) XXVI. 414-425, 500-501.

Der Zweck dieses Aufsatzes wird wohl am besten durch den folgenden Auszug aus der Einleitung angegeben. Green's Lehre, nach welcher der Aether ein unzusammendrückbarer elastischer Körper mit gleicher Starrheit, aber ungleichen Dichtigkeiten in verschiedenen Körpern ist, ergiebt bei der Anwendung auf die Reflexion und Brechung des Lichtes Fresnel's Sinusgesetz für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, für Schwingungen in der Einfallsebene aber eine Formel, die mit Fresnel's Tangentengesetz nur übereinstimmt, wenn der Brechungsindex unendlich wenig von 1 abweicht. Indem der Verfasser nach einer dynamischen Begründung für das Fresnel'sche Reflexions- und Brechungs-Gesetz sucht, nimmt er, „nachdem er scheinbar die Möglichkeiten in Betreff des incompressibeln elastischen Aethers erschöpft hat", in dieser Abhandlung den Aether als einen Körper von solcher negativen Compressibilität an, welche die Geschwindigkeit der Verdichtungs- und Verdünnungswelle zu Null macht. Diese Hypothese nebst anderen von Green her ungeändert übernommenen Annahmen befriedigt genau Fresnel's Tangentengesetz für Schwingungen in der Einfallsebene und sein Sinusgesetz für Schwingungen senkrecht zu ihr. Ferner wird angemerkt, dass homogener luftfreier Schaum, der vom Zusammenschwinden durch Adhäsion an einem ihn enthaltenden Gefässe zurückgehalten wird, das ringsherum unendlich weit sein mag, genau die Bedingung der Nullgeschwindigkeit für longitudinale Wellen erfüllt; ausserdem besitzt er eine bestimmte Starrheit und Elasticität der Form, ferner eine bestimmte Geschwindigkeit der Torsionswelle, die mit einer passenden Annäherung an die absolute Genauigkeit

erechnet werden kann. Der Artikel führt den Beweis für das ·inus- und das Tangenten-Gesetz durch. Gbs. (Lp.)

R. T. GLAZEBROOK. On the application of Sir William Thomson's theory of a contractile aether to double refraction, dispersion, metallic reflexion, and other optical problems. Phil. Mag. (5) XXVI. 521-540.

In diesem Aufsatze werden verschiedene optische Probleme in Betreff der im vorangehenden Berichte besprochenen Theorie von Sir William Thomson erörtert. Der Schluss, zu welchem der Verfasser kommt, besteht darin, dass die Theorie eines compressiblen Aethers „befriedigende Rechenschaft giebt von der Reflexion und Brechung sowohl an durchsichtigen Körpern als auch an Metallen, ebenso von der Doppelbrechung und der Dispersion mit Einschluss der anomalen Dispersion solcher Substanzen wie Cyanin, Fuchsin oder anderer Anilinfarbstoffe; ausserdem führt sie noch zu dem richtigen Ausdrucke für die Geschwindigkeit des Lichtes in einem sich bewegenden Mittel".

Gbs. (Lp.)

P. VOLKMANN. Bemerkungen zu den Phasenänderungen des von durchsichtigen Körpern in der Nähe des Polarisationswinkels partiell reflectirten Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 719-731.

Der Verfasser discutirt die Ausdrücke für die Amplituden des reflectirten Lichtes bei der Reflexion 1) an isotropen, 2) an anisotropen, 3) an circularpolarisirenden Medien, wobei er für den zweiten Fall die Formeln von MacCullagh benutzt, während er für den dritten Fall neue Formeln aufstellt, ohne jedoch deren Ableitung mitzuteilen. Das hauptsächlichste Resultat der Discussion ist folgendes. Definirt man in allen Fällen als Polarisationswinkel den Winkel, unter dem natürliches Licht auffallen muss, damit das reflectirte Licht ein Maximum von Polarisation nachweist, so fällt dieser Winkel im zweiten und dritten

Falle nicht mit demjenigen zusammen, unter dem sich für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente ein Maximum von Phasenänderung vollzieht. Wn.

P. Drude. Ueber das Verhältnis der Cauchy'schen Theorie der Metallreflexion zu der Voigt'schen. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 508-523.

Es werden zunächst die Grundzüge von Cauchy's Theorie der Metallreflexion entwickelt. Dabei wird darauf hingewiesen, dass die Cauchy'schen Resultate sich nur ergeben, wenn man über die Amplituden der longitudinalen Wellen eine Annahme macht, die weder aus den Differentialgleichungen der Bewegung, noch aus den Grenzbedingungen herzuleiten ist. Nach Einführung dieser Annahme und Elimination der longitudinalen Wellen ergiebt die Cauchy'sche Theorie zur Bestimmung der Amplituden der gebrochenen und reflectirten transversalen Welle genau dieselben Gleichungen, die in einer früheren Arbeit des Verfassers (cf. F. d. M. XIX. 1887. 1086) aus der Theorie des Herrn Voigt abgeleitet sind. Beide Theorien stimmen also in ihren Resultaten überein; doch ist dabei zu beachten, dass es sich nicht um die allgemeinsten Voigt'schen Formeln handelt, sondern um eine in den Anwendungen stets gebrauchte Specialisirung derselben. Weiter wird noch, unabhängig von der Uebereinstimmung der oben erwähnten Gleichungen, direct gezeigt, dass die letzten Formeln beider Theorien identisch sind. Aus diesen letzten Formeln, die durch Einführung gewisser Hülfsgrössen erlangt sind, werden durch Vernachlässigungen angenäherte Formeln abgeleitet, die für die Anwendung meistens genügen. Wn.

W. Voigt. Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an Schichten absorbirender isotroper Medien. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 76-100.

In Erweiterung einer früher von ihm behandelten Aufgabe (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 1002) stellt Herr Voigt die allge-

ıgen Formeln für die Reflexion und Brechung des
ner Lamelle einer absorbirenden isotropen Substanz
rseitig von absorbirenden isotropen Medien begrenzt
reinfachung der Formeln für die Amplituden des
ıd gebrochenen Lichtes werden gewisse Hülfsgrössen
ınd je nach der Wahl dieser Hülfsgrössen werden
den in doppelter Form dargestellt; unter manchen
wird die eine, unter anderen die andere Form die
ein. Die allgemeinen Resultate, die sich in Kürze
geben lassen, werden auf verschiedene specielle Fälle
indem bei einem oder zweien der Medien oder auch
ien von der Absorption abstrahirt wird, indem ferner
Reflexionen als total angenommen wird. Der Gang
ıg unterscheidet sich nicht von dem in früheren Ar-
Verfassers.
chluss wird darauf hingewiesen, dass eine experi-
ntscheidung zwischen der Fresnel'schen Reflexions-
der von F. Neumann bisher nicht erbracht ist.

Wn.

:. Ueber die Gesetze der Reflexion und Bre-
des Lichtes an der Grenze absorbirender
lle. Göttingen. Vandenhoek u. Ruprecht. 47 S.

diese Arbeit ist bereits F. d. M. XIX. 1887. 1086 ff.
ı berichtet. Wn.

ıCEK. Beiträge zur elektromagnetischen Licht-
e. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 673-711.

elben Hülfsvorstellungen, welche der Verfasser in zwei
Arbeiten (cf. F. d. M. XIX. 1887. 1097) benutzt hatte,
Grund der elektromagnetischen Lichttheorie die Disper-
erklären, nämlich die Annahme selbständiger elek-
Oscillationen in den ponderabeln Molecülen, wendet er
um die Doppelbrechung abzuleiten und das Reflexions-
zu erledigen. Es gelingt ihm in der That, 1) für das

Dispersionsgesetz eine Formel zu finden, die schon von Ketteler aufgestellt und durch Messungen bestätigt ist; 2) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Oscillationen in krystallinischen Medien eine Gleichung von der Form der Fresnel'schen Gleichung abzuleiten, nur dass dieselbe hier complexe Grössen statt der reellen enthält; 3) werden auch für das Reflexionsproblem Gleichungen ermittelt, die mit den von Drude (cf. F. d. M. XIX. 1887. 1086) aufgestellten übereinstimmen. Trotz dieser Uebereinstimmung der Resultate mit den aus der Elasticitätstheorie abgeleiteten kann Referent die Darstellung des Verfassers nicht als eine befriedigende ansehen. Abgesehen davon, dass hinsichtlich der Zulässigkeit der Grundvorstellung sowie verschiedener nebenbei benutzter Hülfsvorstellungen erhebliche Bedenken obwalten, entbehrt die Entwickelung vielfach der nötigen Strenge und hält sich von Willkürlichkeiten nicht frei.

Erwähnt sei noch, dass der Verfasser es unentschieden lässt, ob die Lichtbewegung den dielektrischen Verschiebungen oder den begleitenden magnetischen Kräften entspricht. Die eine Annahme würde die Fresnel'sche, die andere die Neumann'sche Vorstellung über die Lage der Polarisationsebene ergeben.

Wn.

Lord Rayleigh. On the reflexion of light at a twin plane of a crystal. Phil. Mag. (5) XXVI. 241-255.

Die vorliegende Abhandlung bezweckt die Berechnung der Reflexion des Lichtes an der Fläche zwischen zwei Zwillingskrystallen und die Herstellung ähnlicher Formeln wie die von Fresnel für denjenigen Fall entdeckten, in welchem beide Medien isotrop sind. In der Ansicht, dass Maxwell's elektromagnetische Lichttheorie die einzige ist, welche gleichzeitig Fresnel's Gesetze der Doppelbrechung in Krystallen und auch diejenigen zu erklären vermag, welche die Intensität der Reflexion beim Uebergange aus einem isotropen Mittel in ein anderes regeln, benutzt der Verfasser die Gleichungen dieser Theorie, indem er seine Forschungen mit den fundamentalen Gleichungen beginnt, so wie dieselben in Maxwell's

Electricity and Magnetism" gegeben sind. Zuerst werden die Gleichungen eines dielektrischen Mittels, für welches die magnetische Permeabilität durchweg gleich 1 ist, gegeben und dann die Grenzbedingungen, welche beim Uebergange aus einem homogenen Mittel in ein anderes erfüllt sein müssen, aufgestellt. Danach wird die Aufgabe der Reflexion ebener Wellen gelöst, wenn beide Mittel isotrop sind; doch wird die Lösung für den Fall, in welchem die elektrischen Verrückungen zu der Einfallsebene senkrecht sind, bloss angedeutet, dagegen ist der Fall der Verrückungen in der Einfallsebene vollständiger durchgearbeitet. Nachdem das Gesetz der Geschwindigkeiten für verschiedene Richtungen der Wellenfront in einem homogenen krystallinischen Medium kurz erörtert ist, wird die eigentliche Aufgabe der Abhandlung durchgeführt, nämlich die Reflexion ebener Wellen an einer Zwillingsfläche eines Krystalls. Nach der gemachten Annahme ist eine zur Trennungsebene senkrechte Ebene vorhanden, in Bezug auf welche jeder der Zwillinge symmetrisch ist, und die Betrachtung bei dem Reflexionsproblem beschränkt sich auf die Fälle, in denen die Einfallsebene 1) mit der Symmetrieebene zusammenfällt, 2) zu ihr senkrecht ist. In dem Abschnitte über die in der Symmetrieebene befindliche Einfallsebene werden die Schwingungen zuerst senkrecht zur Einfallsebene, nachher innerhalb derselben angenommen; in keinem dieser Fälle findet Reflexion des Lichtes statt. Der Fall, bei welchem die Einfallsebene zur Symmetrieebene senkrecht steht, ist verwickelter und wird vollständig durchgeführt sowohl für die Gleichungen in ihrer allgemeinen Form als auch für die einfacheren Gleichungen, die bei der Annahme entstehen, dass die doppelt brechende Kraft nur klein ist. Gbs. (Lp.)

Lord Rayleigh. On the remarkable phenomenon of crystalline reflexion described by Professor Stokes. Phil. Mag. (5) XXVI. 256-265.

Die fragliche Erscheinung, welche bei manchen Krystallen von Chlorkalium auftritt, besteht in einer eigentümlichen farbigen

inneren Brechung. Die besonderen Kennzeichen der Erscheinung, wie sie von Stokes beschrieben ist, werden kurz festgestellt, und mögliche Erklärungen erwogen. Gbs. (Lp.)

C. Viola. Le lamine sottili anisotrope colorate nella luce polarizzata parallela. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_1. 19-27.

Der Verfasser untersucht den Durchgang paralleler Lichtstrahlen durch ein dünnes Krystallblättchen unter der Annahme, dass die beiden senkrecht zu einander polarisirten Strahlen, die den Krystall durchdringen, verschieden stark absorbirt werden, und dass die Absorptionscoefficienten für verschiedene Farben verschieden sind. Er setzt ferner voraus, dass mit dem Polarisator sowohl als mit dem Analysator ein Gipsblättchen von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge Gangunterschied verbunden ist. Nach bekannten Methoden wird dann die Formel für die Intensität des schliesslich austretenden Lichtes abgeleitet, auf specielle Fälle angewandt und in diesen ausführlich discutirt. Wn.

K. E. F. Schmidt. Ueber die durch feine Röhrchen im Kalkspat hervorgerufenen Lichtringe und die Theorie derselben. Wiedemann Ann. (2) XXXIII. 534-548.

Beobachtungen der im Titel genannten Ringe, bei denen mehrere Abweichungen von Brewster's Beobachtungen gefunden wurden, führten den Verfasser auf die Analogie der Erscheinung mit einer andern, die sich an einem aus feinen Nadeln gebildeten Gitter zeigte. Auch hier liessen sich Ringe beobachten, die von den am Kalkspat auftretenden sich bloss durch den Mangel an Farben und das Fehlen der Polarisation unterscheiden; ausserdem war nur ein Bogen statt der zwei am Kalkspat entstehenden sichtbar. Diese Abweichungen sind leicht durch die Doppelbrechung des Kalkspats zu erklären, und es reicht daher aus, eine Theorie der Lichtringe zu entwickeln für ein Röhrengebilde, das mit der Lichtquelle und dem Auge sich in demselben isotropen Medium befindet. Die Grundlagen dieser

Theorie bilden die folgenden, leicht zu beweisenden, Sätze der geometrischen Optik.

1) Wird ein Strahl in einem Punkte einer Geraden gespiegelt, so liegt der zugehörige reflectirte Strahlenbündel auf der Oberfläche eines Kreiskegels.

2) Wird der von einem weit entfernt liegenden Punkte kommende Strahlenbündel an einem System in einer Ebene liegender paralleler Geraden reflectirt, so liegen die Punkte der verschiedenen Geraden, welche Strahlen nach einem festen Punkte senden, auf einer Parabel; vorausgesetzt, dass dieser Punkt in einer Ebene liegt, welche durch den Lichtpunkt geht und senkrecht steht zu der Ebene, welche die Geraden enthält.

3) Die durch diese Parabel und den festen Punkt bestimmte Kegelfläche ist congruent mit der Fläche des Kreiskegels, welche nach Satz 1) der Geraden zugehört, die in einer Ebene mit dem festen Punkte und der Lichtquelle liegt.

Nun handelt es sich bei der in Rede stehenden Erscheinung zwar nicht um Reflexion an Geraden, sondern an Cylinderflächen; aber die letztere lässt sich, wenn man parallel auffallende Strahlen annimmt, leicht auf die erstere zurückführen.

Wn.

K. E. F. Schmidt. Zur Theorie des Babinet'schen Compensators. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 360-369.

Es wird hier die Frage erörtert, an welcher Stelle des Raumes die im Compensator auftretenden Interferenzstreifen am deutlichsten sind. Die Intensität, welche die durch den Compensator gegangenen Strahlen an irgend einer Stelle des Raumes hervorbringen, lässt sich auf folgende Form bringen:

$$J = C.\int_{-\varphi'}^{\varphi'}[1+\cos(\delta_1-\delta_2)2\pi]d\varphi,$$

wo C ein constanter Factor, $\delta_1-\delta_2$ die Phasendifferenz zweier interferirenden Strahlen, φ' der äusserste Einfallswinkel ist. Für kleine φ' ergiebt sich ein angenäherter Ausdruck der Phasen-

differenz von der Form

$$\delta_1 - \delta_2 = A[\text{tg}(\varphi' - \beta) + \text{tg}(\varphi' + \beta)] + B;$$

und darin wird schliesslich noch, um das Integral ausführbar zu machen, die Tangente durch den Winkel ersetzt. Die Discussion des so gewonnenen Ausdrucks ergiebt, dass die Streifen auf der dem Beobachter zugekehrten Grenzfläche der Quarzcombination ihre grösste Dunkelheit haben. Wn.

M. Sternberg. Geometrische Untersuchung über die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde. Schlömilch Z. XXXIII. 191-192.

Auszug aus einem Aufsatz, über den bereits F. d. M. XVIII. 1003 berichtet ist. Wn.

E. Wilson. The law of dispersion. Phil. Mag. (5) XXVI. 385-389.

Die folgende empirische Formel wird als Ersatz der Cauchy'schen Formel für das Dispersionsgesetz vorgeschlagen:

$$\frac{v}{V} = \left(a + b\lambda + \frac{c}{\lambda}\right)e^{-\frac{h}{\lambda^2}};$$

in ihr bezeichnet v die Geschwindigkeit in einer brechenden Substanz für einen Lichtstrahl von der Wellenlänge λ, V die Geschwindigkeit im Vacuum. Zum Vergleiche der beobachteten und der berechneten Werte werden Tabellen des Brechungsindex in verschiedenen Fällen gegeben. Gbs. (Lp.)

T. Pelham Dale. On the numerical relation between the index of refraction and the wave-length within a refractive medium, and on the limit of refraction. Phil. Mag. (5) XXV. 325-338.

L. Bell. The absolute wave-length of light. Phil. Mag. (5) XXV. 245-263, 350-372.

Der erste Teil dieser Abhandlung berichtet über die von den älteren Forschern bei der Bestimmung der absoluten Wellenlänge des Lichtes befolgten Methoden und über die gewonnenen Ergebnisse, sodann aber über die bei der gegenwärtigen Arbeit benutzten Methoden, Apparate und Längenmasse. Zugleich wird eine recht umfangreiche Bibliographie des Gegenstandes bis zur Gegenwart gegeben. Im zweiten Teile werden die Einzelheiten der Versuchsanordnungen mitgeteilt nebst einer Besprechung der Endergebnisse und derjenigen Fragen von praktischem und theoretischem Interesse, welche sich an die Arbeiten neuerer Experimentatoren anschliessen. Gbs. (Lp.)

R. F. Gwyther. An application of Huyghens' principle to a spherical wave of light. Manchester Mem. (4) I. 61-87.

Dieser Aufsatz enthält einen Versuch zur Bildung einer Diffractionstheorie bloss auf geometrischen Principien. Unter der Annahme, dass in jedem Momente jedes Element einer gestörten Kugelfläche selbst als Ursprung einer Elementarwelle angesehen werden kann, wird der Versuch zur Bestimmung der Gestalt der Verrückung in den secundären Wellen gemacht, damit die sich ergebenden Verrückungen überall denen der ursprünglichen Welle gleichwertig seien. Der mathematische Inhalt eignet sich nicht zu einem gedrängten Auszuge. Gbs. (Lp.)

R. Straubel. Ueber die Berechnung der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen durch Randintegrale mit besonderer Berücksichtigung der Theorie der Beugung im Heliometer. Diss. Jena. H. Pohle. 63 S.

Die Componenten der Lichtintensität bei den Fraunhofer'schen (der Verfasser schreibt fälschlich Frauenhofer) Beugungserscheinungen sind bekanntlich den folgenden Integralen proportional:

$$C = \iint d\xi' d\eta' \cos 2\pi(\mu\xi' + \nu\eta'),$$

$$S = \iint d\xi' d\eta' \sin 2\pi(\mu\xi' + \nu\eta').$$

Die hier auftretenden Flächenintegrale, aus denen unmittelbar folgt, dass jede Fraunhofer'sche Beugungserscheinung eine Mittelpunktsfigur ist, lassen sich allgemein mittels des bekannten Analogons des Green'schen Satzes für die Ebene auf Randintegrale zurückführen. Diese, von Herrn Abbe angegebene, bisher aber noch nicht veröffentlichte, Transformation führt auf eine doppelte Form des Randintegrals, je nachdem man die Differentiation nach der Normale des Randes unter dem Integralzeichen ausführt oder dieselbe durch Hinzufügung eines entsprechenden Compensationsgliedes in eine Differentiation vor dem Integralzeichen verwandelt. Eine dieser Formen lässt eine einfache Interpretation zu, wonach man die Lichtwirkung der Oeffnung durch die Lichtwirkung der Begrenzungslinie ersetzen kann. Den erwähnten beiden Abbe'schen fügt der Verfasser eine dritte Form des Randintegrals hinzu, die er durch Einführung von Polarcoordinaten statt ξ', η', Ausführung der Integration nach dem Radiusvector und darauf folgende teilweise Integration ableitet.

Um die Anwendbarkeit der in Rede stehenden allgemeinen Transformationen zu zeigen, werden aus ihnen die bekannten Resultate für die Beugungsfiguren des Rechtecks, des regelmässigen n-Ecks und des Kreises abgeleitet. Sodann wendet sich der Verfasser, und diese Untersuchung umfasst den grössten Teil der Dissertation, einem Falle zu, der bisher noch keine genauere Behandlung erfahren hat, nämlich den Beugungserscheinungen für eine halbkreisförmige Oeffnung, Erscheinungen, die beim Heliometer ihre Anwendung finden. Von den Componenten C, S der Intensität des an einem Halbkreise gebeugten Lichtes ergiebt sich für C derselbe Wert wie bei einem vollen Kreise:

$$C = k \, . \, r^2 \pi \frac{J_1(v)}{v},$$

während

$$S = k \, . \, 2r^2 \psi,$$

$$\psi = \operatorname{tg}\sigma \frac{\sin(v\cos\sigma)}{v^2} - \int_0^\sigma \frac{\cos(v\cos\varphi)}{v} \cos\varphi d\varphi$$

$$= \int_0^\sigma \left[\frac{-\cos(v\cos\varphi)}{v\cos\varphi} + \frac{\sin(v\cos\varphi)}{v^2\cos^2\varphi} \right] d\varphi$$

ist. Die hierin vorkommenden Constanten haben folgende Bedeutung. Es ist k ein constanter Factor, r der Radius des Halbkreises,

$$v = 2\pi r\sqrt{\mu^2+\nu^2}, \quad \operatorname{tg}\sigma = \frac{\nu}{\mu}.$$

Die Complication gegenüber dem Resultat beim Kreise besteht einmal darin, dass hier S nicht verschwindet, andererseits darin, dass S und damit die ganze Intensität nicht nur von einer Variabeln v, sondern ausserdem von einer zweiten σ abhängt. Die hauptsächlichste noch zu erledigende Aufgabe besteht in der weiteren Behandlung der Function ψ von v und σ. Als Function von v betrachtet, genügt ψ der Differentialgleichung

$$v\psi'' + 3\psi' + v\psi = \frac{\sin(v\cos\sigma)}{v\cos\sigma}\sin\sigma,$$

und zwar ist ψ diejenige particuläre Lösung dieser Gleichung, welche man aus der allgemeinen Lösung dadurch erhält, dass man die darin enthaltenen willkürlichen Constanten gleich Null setzt. Daraus ergiebt sich für ψ leicht eine Reihenentwickelung nach steigenden Potenzen von v, deren einzelne Coefficienten Producte aus $\sin\sigma$ und geraden Functionen von $\cos\sigma$ sind; die letzteren Functionen lassen sich durch einfache Recursionsformeln bestimmen. Neben dieser für alle Werte von v und σ gültigen Reihe wird noch eine zweite von der Form

$$\psi = A\cos(v\cos\sigma) + B\sin(v\cos\sigma)$$

aufgestellt, wo A und B im wesentlichen Potenzreihen nach steigenden Potenzen von v sind, die für solche Werte von v und σ convergiren, für die

$$|v(1-\cos\sigma)| < 1$$

ist. Durch teilweise Integration des in dem ersten Ausdruck von ψ auftretenden Integrals endlich wird eine dritte semiconvergente Reihe gewonnen, die zur Berechnung von ψ für grosse Werte von v benutzt werden kann. Die gefundenen Reihen sind alle drei nicht einfach genug, um den allgemeinen Verlauf der Function ψ übersehen zu lassen, ohne dass numerische Tafeln vorlägen. Nur für kleine Werte von v und σ sowie für grössere Werte von v und zugleich für Werte von σ in der Nähe von

$\frac{1}{2}\pi$ lassen sich angenäherte Darstellungen von ψ geben. Der Verfasser schliesst aus der letzteren Darstellung, dass ein von Struve in Bezug auf die Lichtverteilung im Heliometer ausgesprochenes Resultat nicht richtig ist. Wn.

W. Donle. Ueber Fraunhofer'sche Ringe und die Farbenerscheinungen behauchter Platten. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 801-827.

Am Schluss der Arbeit, deren grösster Teil rein experimentellen Inhalts ist, wird die Intensität des durch einen Spalt gebeugten Lichtes für den Fall berechnet, dass in den Spalt eine dünne Lamelle eingesetzt ist. Der für die resultirende Intensität gewonnene Ausdruck besteht aus zwei Factoren, deren erster allein von der Beugung herrührt und mit der für die Beugungserscheinung eines einfachen Spaltes geltenden Formel identisch ist, während der zweite, vom Beugungswinkel unabhängige Factor nichts anderes darstellt, als die Intensität des aus dem dünnen Blättchen senkrecht austretenden Lichtes.

Wn.

Carimey. Sur la théorie des bandes de Talbot. Almeida J. (2) VII. 60-69.

Der Verfasser formulirt die von ihm behandelte Aufgabe wie folgt: Ein Bündel parallelen Lichtes, das aus einem Collimator tritt, wird durch einen rechteckigen Spalt begrenzt, von welchem eine Hälfte durch eine durchsichtige Platte bedeckt wird; man fängt sodann den Bündel mit einem Prisma auf, danach mit einer achromatischen Linse L; es handelt sich darum, die Erscheinungen zu bestimmen und zu erklären, die man in der Focalebene der Linse beobachtet. Lp.

A. Van Biervliet. Contribution à l'étude des dilatations par la mesure du déplacement des franges d'interférences. Brux. S. sc. XIII, B. 215-250.

E. Branly. Calcul de la largeur des franges dans l'expérience des deux miroirs. Almeida J. (2) VII. 69-72.

Bemerkungen zu den betreffenden Rechnungen nach Annäherungsmethoden in Billet's Traité d'optique physique und in Pfaundler's Lehrbuch der Physik. Lp.

Mascart. Sur l'expérience des trois miroirs de Fresnel. Almeida J. (2) VII. 183-193.

E. Lommel. Interferenz durch circulare Doppelbrechung. Münch Ber. 325-336.

Auf die eine Seitenfläche eines Quarzprismas, dessen optische Axe auf der Halbirungsebene des brechenden Winkels senkrecht steht, falle ein Bündel parallelen, geradlinig polarisirten Lichtes unter einem solchen Winkel, dass die Ablenkung ein Minimum ist. Aus dem einfallenden, geradlinig polarisirten Strahl entstehen dann zwei entgegengesetzt circular polarisirte Strahlen, welche das Prisma in der Richtung der optischen Axe mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen. An der zweiten Prismenfläche treten diese Strahlen teilweise aus, teilweise werden sie reflectirt; und die reflectirten Strahlen interferiren vermöge des vorher erlangten Gangunterschiedes. Man erhält in Folge dessen auf der Rückenfläche des Prismas sehr schöne, zur brechenden Kante parallele Interferenzstreifen. Herr Lommel verfolgt den Gang der Strahlen und berechnet die Intensität, mit der ein Punkt der Rückenfläche erleuchtet wird. Er zieht dann weiter den Umstand in Rechnung, dass die beiden circularen Strahlen, in welche sich der einfallende linear polarisirte Strahl zerlegt, vermöge der Verschiedenheit ihrer Brechungsindices, streng genommen, verschiedene Wege im Prisma einschlagen. Daher wird der Gangunterschied der interferirenden Strahlen an der Rückenfläche ein etwas anderer, als vorher, unter Voraussetzung gleicher Wege für die beiden circularen Strahlen, berechnet war. Die durch beide Rechnungen sich ergebenden

Gangunterschiede weichen indessen nur in den Gliedern höherer Ordnung von einander ab, so dass die zuerst besprochene einfachere Theorie zur Erklärung der Erscheinung ausreicht.

Wn.

Boitel. Sur les arcs surnuméraires qui accompagnent l'arc-en-ciel. C. R. CVI. 1522-1524.

Mascart. Sur l'arc-en-ciel. C. R. CVI. 1575-1577.

Beide Arbeiten betreffen die überzähligen Bogen beim Regenbogen. Dieselben haben ihre vollständige Erklärung zuerst in der Theorie Airy's (Cambridge Trans. VI, 1836; Poggendorff's Annalen, Supplementband II) gefunden, welche auf der Betrachtung der Wellenfläche des aus dem Tropfen tretenden Lichtes, einer Rotationsfläche mit der Meridiancurve

$$y = \frac{x^3}{3a^2},$$

beruht. Für die Constante a^2, die von Airy nicht weiter bestimmt wird, giebt jetzt Herr Boitel ohne Ableitung den Ausdruck

$$a^2 = \mathfrak{R}^2 \frac{\cos^2 J}{\sin J} \frac{(K+1)^2}{K(K+2)},$$

worin $\mathfrak{R}$ den Radius der Wasserkugel bezeichnet, J den Einfallswinkel des Strahls, dessen Ablenkung ein Minimum ist, K endlich die Ordnungszahl des Bogens. Die mit Hülfe dieses Ausdrucks gefundenen Zahlenwerte für die Ablenkungen der verschiedenen Bogen stimmen nun mit den Beobachtungen von Miller sowie mit den vom Verfasser angestellten nicht überein, und zwar wächst die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung mit der Ordnungszahl des Bogens. Aus diesem Grunde hält Herr Boitel die Airy'sche Theorie nur für eine erste Annäherung; er teilt zugleich mit, dass er an einer Verbesserung der Theorie arbeite.

Herr Mascart behandelt das in der Airy'schen Theorie für die resultirende Intensität aufgestellte Integral

$$u = \int_0^\infty \cos(x^3 - mx)\,dx.$$

Ein angenäherter Wert desselben ist, nach einer Mitteilung von Poincaré, für grosse m [m ist der Winkeldistanz des betrachteten Bogens vom Hauptbogen proportional]

$$u = \frac{\alpha}{\sqrt{m}} \cos\left(\frac{m^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3} + \beta\pi\right).$$

Aus diesem Ausdruck folgt leicht, für welche Werte von m die Maxima stattfinden, falls man für die Constante β den aus Beobachtungen entnommenen Wert $\frac{1}{4}$ setzt. Die so gewonnenen Resultate stimmen mit der Erfahrung ziemlich gut überein.

Wn.

R. de Kovesligethy. Die mathematische Analyse der Spectra. Phys. Ges. St. Pet. XX. 65-82. (Russisch.)

R. Schellwien. Optische Häresien, erste Folge, und das Gesetz der Polarität. Halle a. S. Pfeffer. 108 S. 8°.

Der Standpunkt des Verfassers ist bereits in dem Referat über eine frühere Schrift desselben (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 42) gekennzeichnet. In dem vorliegenden Buche wird die Polemik gegen die mechanische Weltanschauung und das mechanische Causalitätsprincip im allgemeinen sowie gegen die Lehren der Optik, vom Wesen des Lichtes insbesondere, fortgesetzt. Die Theorie des Lichtes sei eine intellectuelle Dichtung, welche das erfahrungsmässige Sein nicht erklären könne, weil sie ihm widerspreche. Sie sei principiell und im ganzen abzulehnen. Licht und Farben seien nichts anderes, als thätige Zustände der sichtbaren Körper selbst; sie beruhten ursprünglich auf einem polaren Process etc. Irgend welche physikalischen Gründe führt der Verfasser für seine Ansicht nicht an. Dass durch seine naturphilosophischen Sätze auch nur die geringste Erscheinung erklärt werde, dürfte ausser ihm selbst schwerlich jemand annehmen.

Wn.

C. Geometrische Optik.

O. Pabst. Leitfaden der theoretischen Optik zum brauche auf höheren Unterrichtsanstalten und Selbstunterrichte. Halle a. S. H. W. Schmidt. 100 S. 8°.

Der Titel des Buches ist irreführend; dasselbe beha nicht die theoretische, sondern die Elemente der geometris Optik in dem Umfange, wie sie auf höheren Schulen vo tragen werden. Die bei der Reflexion und Brechung entste den Brennlinien sind von der Betrachtung ausgeschlossen, gleichen die Erörterung der sphärischen Aberration der Lins In der Linsentheorie werden zwar die Hauptpunkte abgelei doch wird von ihnen kein Gebrauch zu irgend einer Constr tion gemacht, vielmehr die Discussion auf unendlich dünne Lin beschränkt. Das über achromatische Linsen Gesagte ist dürf Zur ersten Einführung in die geometrische Optik erscheint Buch, dessen einzelnen Capiteln einfache Uebungsaufgaben bei gegeben sind, allenfalls geeignet, für ein eingehenderes Studiu dieser Disciplin reicht es nicht aus. Wn.

F. Meisel. Lehrbuch der Optik. Weimar. Fr. Voigt. 50… 8°. Mit einem Atlas von 17 Foliotafeln.

Dieses Buch bezeichnet sich als die dritte Auflage des alte Barfuss'schen populären Lehrbuchs der Optik, Katoptrik un Dioptrik, es stellt aber naturgemäss gegenüber der im Jahr 1860 erschienenen zweiten Auflage ein völlig neues Werk dar Wenn wir hinzufügen, dass es den dritten Band einer Sammlun bildet, welche derselbe Verlag unter dem Gesamttitel „Neue Schauplatz der Künste und Handwerke. Mit Berücksichtigun der neuesten Erfindungen“ herausgiebt, so ist die Tendenz de Werkes damit bezeichnet. Es ist für den gebildeten Praktiker be stimmt, doch wird auch der Studirende und der Lehrer an manchen hübschen Wink, an der eingehenden Beschreibung so manche schwierigen Apparats seine Freude haben.

Ein klares Bild von der Wirkungsweise der optischen Instrumente zu vermitteln, ist der Hauptzweck, der Schwerpunkt des Buches liegt in der elementaren Optik; am ausführlichsten sind daher behandelt Cap. II Katoptrik 58 S., III Dioptrik 90 S., VII die praktische Anwendung der Linsen und das menschliche Auge 60 S., VIII Fernrohr und Mikroskop 90 S.; dagegen sind Interferenz-Erscheinungen samt Undulationstheorie auf 36 S., Polarisation und Doppelbrechung auf 20 S. erledigt. Nicht unwillkommen dürfte Cap. XI sein, welches auf Grund eingehender Mitteilungen des Herrn Abbe eine allerdings sehr gedrängte Uebersicht über die Technik der Optik giebt.

Zur Anwendung gelangen überall nur die Mittel der elementaren Geometrie; soweit diese es gestatten, sind auch die schwierigeren Probleme gründlich erledigt. Wir nennen z. B. die genaue Theorie des Winkelspiegels, die allgemeine Behandlung eines Systems centrirter brechender Kugelflächen (nach Abbe), die Bestimmung von Gesichtsfeld und Vergrösserung optischer Instrumente. Zu loben ist die häufige Einfügung von Zahlenbeispielen; weniger glücklich aber finden wir die von der Linse gegebene Darstellung; u. a. wird die Ableitung der Linsenformel an der convex-concaven Linse durchgeführt und daher abweichend vom gewöhnlichen Sprachgebrauch die Brennweite einer Sammellinse als negativ bezeichnet.

Die Ausstattung des Buches und die Figuren des Atlas sind gut, doch finden sich hier und da typographische und andere Ungenauigkeiten, z. B. stimmen auf Taf. II einige Figuren nicht zum Text. R. M.

R. S. Heath. Treatise on geometrical optics. London.

E. Hess. Ueber die Zahl und Lage der Bilder eines Punktes bei drei eine Ecke bildenden Planspiegeln. Marburg Ber. 35-53.

Das vielfach behandelte Problem (Literatur F. d. M. XVII. 1885. 1011), Zahl und Lage der Bilder eines Punktes zu be-

stimmen, der sich innerhalb eines von zwei Planspiegeln g bildeten Winkels befindet, ist schon 1879 vom Verfasser auf d Raum übertragen worden, indem er die Innenseiten einer dr oder mehrflächigen körperlichen Ecke als spiegelnd voraussetz auch hat er auf Grund seiner Untersuchungen sogenannte Polyed Kaleidoskope construiren lassen. (F. d. M. XIV. 1882. 447 u XV. 1883. 466 ff.) Die allgemeine Lösung des Problems l beliebigen Flächenwinkeln und beliebiger Lage des Punk scheint fast hoffnungslos schwierig; der Verfasser nimmt dah gestützt auf seine Lehre von der Kugelteilung, zunächst an, d der Ecke entsprechende sphärische Polygon sei so beschaffe dass es vermöge seiner direct symmetrischen und congruent Wiederholungen ein zusammenhängendes Netz liefert, welch die Kugelfläche einmal bedeckt. Alle Flächenwinkel müssen dah aliquote Teile von 360° sein. Fügt man die Forderung hinz dass sie Teile von 180° sind, so ergeben sich als mögliche L sungen nur vier sphärische Dreiecke. Ihre Spiegelflächen si drei benachbarte symmetrische Mittelebenen 1) einer regulär Doppelpyramide, 2) eines regulären Tetraeders, 3) eines regulär Oktaeders, 4) eines regulären Ikosaeders. Jeder gespiegel Punkt hat hierbei in jedem Dreiecke des Netzes den homologe Punkt als Bildpunkt; es lässt sich aber auch die Zahl der i einem Punkte zusammenfallenden Bilder, sowie die Gesamtza der möglichen ein- und mehrfachen Reflexionen mittels eine combinatorischen Verfahrens bestimmen. R. M.

A. Ricco. Immagine deformata del sole riflesso su mare, e dipendenza della medesima dalla rotondità della terra. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV_2. 450-454.

Herr Ricco hat (C. R. CVII. 590 ff.) der französischen Aka demie Mitteilung gemacht und Photographien vorgelegt von Be obachtungen, welche zeigen, dass das Spiegelbild der in geringe Höhe über dem Meeresspiegel befindlichen Sonnenscheibe keines wegs dem Object gleich und symmetrisch ist, sondern in verti caler Richtung zusammengedrückt ist. Diese interessante Beob

achtung giebt einen neuen Beweis für die Krümmung der Erde. In den beiden folgenden Sitzungen der Akademie haben Herr Wolf und Herr Forel weitere Bemerkungen daran geknüpft; ersterer macht numerische Angaben über die Grösse der Deformation, letzterer verweist auf ähnliche frühere Beobachtungen am Genfer See. In vorliegender Note kommt Herr Ricco ausführlicher auf die Berechnung des Phänomens zurück und constatirt eine noch näher zu untersuchende Abweichung zwischen Beobachtung und Rechnung. R. M.

O. DECHER. Die Prismentrommel. Zweite Aufl. München. Th. Ackermann. 52 S. 8°.

Die Combination zweier über einander gestellten und gegen einander drehbaren, gleichschenklig rechtwinkligen Glasprismen ist schon 1851 von Bauernfeind für Vermessungsinstrumente ausgeführt. Der Verfasser beschreibt eine verbesserte Einrichtung dieses „Prismenkreuzes", an dem er eine mechanische Einstellvorrichtung angebracht hat, entwickelt die Theorie desselben und giebt zahlreiche Beispiele seiner Anwendung zur Absteckung von Kreisbogen unter den verschiedensten Verhältnissen.

R. M.

L. MATTHIESSEN. Ueber ein merkwürdiges optisches Problem von Maxwell. Exner Rep. XXIV. 401-407.

Es handelt sich um Maxwell's „fish-eye problem": Ein durchsichtiges Medium sei so beschaffen, dass der Weg eines Lichtstrahles in demselben ein gegebener Kreis ist und der Brechungsindex eine Function des Abstandes von einem gegebenen Punkte in der Kreisebene. Es soll diese Function gesucht und gezeigt werden, dass für Licht von gleicher Brechbarkeit 1) der Weg eines jeden Strahles in diesem Medium ein Kreis ist, und 2) dass alle Strahlen, welche von irgend einem Punkte in dem Medium ausgehen, sich genau in einem anderen Punkte desselben treffen". Herr Matthiessen löst die Aufgabe, findet den Brechungsindex $n = b:(c^2+y^2)$ und macht Anwendung auf die Theorie des

Fischauges. Zuletzt stellt der Verfasser als Gegenstück zu dem Maxwell'schen Problem eine Aufgabe, bei welcher die Trajectorien der von einem Punkte ausgehenden Strahlen Ellipsen sind.

Lp.

L. Matthiessen. Untersuchungen über die Constitution unendlich dünner astigmatischer Strahlenbündel nach ihrer Brechung in einer krummen Oberfläche. Schlömilch Z. XXXIII. 167-183.

Die Brechung eines unendlich dünnen nicht homocentrischen Strahlenbündels, welcher zwei Brennlinien in zwei auf einander senkrechten Focalebenen besitzt, hat C. Neumann (1880) vollständig behandelt, jedoch mit der Annahme, dass die beiden Brennlinien vor und nach der Brechung auf dem Hauptstrahle senkrecht stehen. Der Verfasser hat schon früher auf das Unrichtige dieser Hypothese aufmerksam gemacht (F. d. M. XVI. 1884. 722 u. 934 ff.); in vorliegender Arbeit zeigt er, dass selbst dann, wenn die Brennlinien vor der Brechung auf dem Hauptstrahle senkrecht stehen, sie nach der Brechung im allgemeinen einen schiefen Winkel mit demselben bilden. Wenn die Azimute und Inclinationen der Brennlinien des einfallenden Strahlenbündels sowie ihre Distanzen vom Einfallspunkte gegeben sind, so lassen sich dieselben Elemente für den gebrochenen Strahlenbündel berechnen. Als Beispiel behandelt der Verfasser den Fall einer brechenden sphärischen Fläche, aus welcher der einfallende Strahlenbündel einen unendlich kleinen Kreis ausschneidet.

R. M.

A. Grusintzeff. Ueber die Brechung der Lichtstrahlen in brechenden Mitteln, welche von irgend welchen Oberflächen begrenzt sind. Charkow Ges. (2) I. 139-168. (Russisch.)

A. Gleichen. Allgemeine Theorie der Brechung ebener Strahlensysteme. Wiedemann Ann. XXXV. 100-106.

Der Verf. beschränkt sich auf Strahlen, welche durch Brechung nicht aus ihrer Ebene heraustreten; die bekannten optischen Tafeln von Schellbach zeigen, dass schon die Betrachtung solcher Systeme zur Erklärung vieler dioptrischen Erscheinungen ausreicht. Mit Hülfe weniger einfacher geometrischer Untersuchungen gewinnt er eine kurze Grundgleichung, in der alle Sätze über Reflexion und Refraction enthalten sind. Sie gilt für ein beliebiges Brechungsgesetz; wir erwähnen die Folgerung, dass für jedes Brechungsgesetz und für beliebig viele Brechungen immer die bekannte Formel $\frac{H_1}{h_1} + \frac{H_2}{h_2} = 1$ Geltung hat, in der H_1 und H_2 die beiden Brennweiten, h_1 und h_2 die Abstände des Object- resp. Bildpunktes von zwei bekannten conjugirten Punkten bezeichnen. R. M.

A. Gleichen. Beitrag zur Theorie der Brechung von Strahlensystemen. Diss. Kiel. 20 S. 8°.

Govi. Nuovo metodo per costruire e calcolare il luogo, la situazione e la grandezza delle imagini date dalle lenti o dai sistemi ottici complessi. Rom. Acc. L. Rend. (4) IV₁. 655-661.

Diese Mitteilung verdient die Aufmerksamkeit der Physiker in hohem Grade. Die bekannten optischen Constructionen sind zwar einfach genug, aber die Bestimmung der bezüglichen Punkte erfordert vorhergehende weitläufige Rechnungen oder Constructionen. Der Verfasser führt an ihrer Stelle zwei neue Punkte ein; es sind dies die Bilder der beiden Krümmungsmittelpunkte der vordersten resp. hintersten Fläche, jeder betrachtet durch die Combination aller andern Flächen. Diese beiden Punkte lassen sich sofort bestimmen, wenn für ein einziges bekanntes Object Lage und Grösse des Bildes beobachtet worden ist, und erlauben dann auf einfachste Weise die Construction jedes andern Bildes. R. M.

A. Handl. Graphische Darstellung der Linsenformel. Exner Rep. XXIV. 197-201.

Die Darstellung verwendet eine in Zeichnung gegebene gleichseitige Hyperbel. Lp.

N. Jadanza. Una nuova forma di cannocchiale. Torino Atti XXIII. 570-573.

Wenn ein gewöhnliches astronomisches Fernrohr zur Beobachtung eines in mässiger Entfernung (aber weiter als die doppelte Brennweite des Objectivs) aufgestellten Gegenstandes, z. B. eines geteilten Massstabes verwendet wird, so ist das Bild kleiner als der Gegenstand. Der Verfasser construirt daher ein aus einer Convex- und einer Concav-Linse zusammengesetztes Objectiv, dessen Brennweite der der ersten Linse gleich ist, und welches im fraglichen Falle ein Bild von gleicher oder sogar grösserer Dimension erzeugt. R. M.

J. A. C. Oudemans. Onderzoek naar de voorwaarde, waarop in den dubbele-beelden mikrometer van Airy, de waarde eener schroefomwenteling onafhankelijk is van de accomodatie van het oog. Amst. Versl. en Meded. (3) V. 149-155.

Theoretische Untersuchung eines Mikrometers von Airy mit Doppelbildern, das sich auf der Sternwarte zu Leiden befindet. G.

G. Füchtbauer. Einige Eigenschaften der optischen Linse in Bezug auf Centralstrahlen. Nürnberg. Ballhorn. 22 S.

C. Bohn. Ueber Linsenzusammenstellungen und ihren Ersatz durch eine Linse von vernachlässigbarer Dicke. Leipzig. Teubner. 88 S. 8°.

Bekanntlich kann jedes System brechender centrirter sphärischer Flächen (mit gewissen Einschränkungen) durch eine ein-

fache Aequivalent-Linse ersetzt werden. Ist dieselbe nämlich von derselben Brennweite wie die Linsencombination, und befindet sie sich in der ersten Hauptebene der Combination, so entwirft sie ein Bild, welches nach Art, Stellung und Grösse übereinstimmt mit dem Bilde, welches die Combination liefert; nur der Ort des Bildes ist ein anderer, es hat eine Verschiebung um den Abstand der beiden Hauptebenen stattgefunden. Der Verfasser bestimmt Ort und Beschaffenheit einer anderen Linse, welche absolute Deckung der beiden Bilder herbeiführt. Es zeigt sich natürlich, dass Brennweite und Stellung dieser „Ersatzlinse“ sich mit der Gegenstandsweite ändern, dass der Ersatz nicht immer vollständig, zuweilen unvollständig, zuweilen gar nicht möglich ist.

Der Verfasser berechnet die Fundamentalpunkte für die Zusammenstellung zweier Linsen und discutirt die Formeln mit behaglicher Breite, 50 Seiten sind der Besprechung von Einzelfällen und numerischen Beispielen gewidmet. R. M.

G. Fränkel. Die Wirkung der Cylinderlinsen, veranschaulicht durch stereoskopische Darstellung des Strahlenganges. Wiesbaden. J. F. Bergmann.

Acht unter das Stereoskop zu legende Doppelfiguren; die fünf ersten geben die Abbildung des unendlich fernen Punktes durch convexe oder concave Cylinderlinsen oder ihre Combination mit einer sphärischen Linse. Es sind jedesmal neun Strahlen gezeichnet, die sich zu je drei in drei Horizontal- und drei Vertical-Ebenen anordnen. Die drei letzten Tafeln geben für die Combination eines sphärischen und eines cylindrischen Convexglases die Abbildung einer Geraden, welche resp. zur Cylinderaxe parallel, senkrecht oder schief steht. Die Figuren liefern ein anschauliches Schema des Strahlengangs in astigmatischen Augen. R. M.

F. Wächter. Ueber Fernrohre und Binocles für militärischen Gebrauch. Mitt. üb. Art. u. Genie XIX. 411-438.

Erörterung der Fragen, was für ein Fernrohr für den militärischen Gebrauch das geeignetste sei, welche Eigenschaften dasselbe besitzen müsse, und welche Leistungsfähigkeit von demselben erwartet werden dürfte. Lp.

Laussedat. La première jumelle. Flammarion, Rev. d'Astron. VII. 67-68.

A. Bardou. La lunette binoculaire contruite en 1686 par le père Chérubin, capucin à Orléans. Flammarion, Rev. d'Astron. VII. 112.

Der Kapuzinerpater Chérubin aus Orléans, Verfasser zweier Werke: „La dioptrique oculaire ou la théorique, la positive et la mechanique de l'oculaire dioptrique et de toutes ses espèces" (Paris, 1671) und „La vision parfaite ou la veue distincte par le concours des deux axes en un seul point de l'objet" (Paris, 1681), hat im Jahre 1686 für Ludwig XIV ein binoculares Fernrohr von 4m Länge gebaut, das im Conservatoire des Arts et Métiers aufbewahrt wird. Die zweite Note bringt das Titelkupfer der dioptrique oculaire von 1671. Lp.

Lord McLaren. On the four surfaces of an aplanatic objective. Edinb. Proc. XV. 355-379.

Die Aufgabe ist die, zwei Linsen eines Objectivs anzufertigen (die nach Annahme sich berühren, sodass nur drei Oberflächen zu betrachten sind), sodass es die Forderungen erfüllt, aplanatisch und achromatisch zu sein. Zur Vereinfachung der Lösung nimmt der Verf. ein angenähertes Brechungsgesetz an, $\mu = \varphi/\varphi'$ statt $\mu = \sin\varphi/\sin\varphi'$. Cly. (Lp.)

Klingberg. Beiträge zur Dioptrik der Augen einiger Hausthiere. (I. Teil.) Pr. Domschule Güstrow. 22 S. 4°.

Für die Augen von Pferden, Schafen, Schweinen bestimmt der Verfasser die Brechungsindices der flüssigen Medien, sowie die Krümmungsverhältnisse der Hornhaut und der Linse. R. M.

S. Exner. Ueber den normalen irregulären Astigmatismus. Exner Rep. XXIV. 493-510.

L. Gartenschläger. Ueber die Abbildung eines astigmatischen Objects durch eine Linse für parallelen Durchgang der Lichtstrahlen. Exner Rep. XXIV. 537-574, Diss. Rostock. 38 S. 8°.

„Für die vorliegende Arbeit habe ich mir als Hauptaufgabe das Problem gestellt, die für die Abbildung eines solchen Punktes geltenden mathematischen Gesetze zu erweitern für ein sehr kleines astigmatisches, peripherisch gelegenes Quadrat, dessen Seiten senkrecht zum einfallenden Strahle sind und ein beliebiges Azimut gegen den Axenschnitt bilden, und zwar für den Fall des parallelen Durchgangs der Strahlen durch eine homogene, sphärische ungleichseitige Linse. Um dies Problem zu lösen, d. h. um die dioptrischen Elemente für den austretenden Strahlenbündel zu bestimmen, teilen wir die Aufgabe in mehrere Teile, indem wir I. die Bedingungen feststellen, die für den auffallenden Strahlenbündel erfüllt sein müssen, damit der Durchgang der Strahlen parallel sei; II. die Gleichungen ableiten, die für den zu betrachtenden Fall den Ort der Bilder, die Azimute der Seiten der letzteren und die Bildgrössen finden lassen; III. zur Bestätigung der Theorie die Resultate einer Reihe von praktisch ausgeführten Versuchen angeben". Lp.

C. Tschehowitsch. Bestimmung des Ortes des Bildes eines leuchtenden Punktes, welcher nach Brechung in einem brechenden von zwei Ebenen begrenzten Mittel gesehen wird. Phys. Ges. St. Petersb. XVIII. 150-168.

J. D. Everett. On the general laws of brightness of images. Phil. Mag. (5) XXV. 216-220.

Eine Untersuchung der Helligkeit eines Bildes, wenn die Strahlen durch ein Mittel von stetig veränderlichem Index gegangen sind. Die Art der Untersuchung ist der Erörterung im XII. Capitel der „Mechanischen Wärmetheorie" von Clausius und

der in jenem Capitel angeführten Kirchhoff'schen Abhandlung nachgebildet, zum Teil auch dem Artikel 334 der „Natural Philosophy" von Thomson und Tait. Zuerst wird der folgende Satz bewiesen: Es seien A_1, A_2 zwei kleine, gleich grosse, ebene Flächenstücke in solcher Stellung, dass ein Strahl aus dem Centrum des einen nach dem Centrum des anderen auf beiden senkrecht steht; ω_1, ω_2 die beiden körperlichen Winkel, welche von den Strahlen gebildet werden, die von der Peripherie des einen nach dem Centrum des anderen gehen; μ_1, μ_2 die Indices an den Centren von A_1 und A_2, dann ist $\mu_1^2 A_1\omega_1 = \mu_2^2 A_2\omega_2$. Dieser Satz wird dann auf die Untersuchung der Helligkeit angewandt. Bedeutet q die von A_2 auf dem Wege nach A_1 gesandte Lichtmenge, I_2 die wahre Helligkeit von A_2 und I seine scheinbare, wie sie von A_1 erscheint, so ist $I = \frac{q}{A_1\omega_1} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 I_2$, wenn kein Licht auf dem Wege verloren geht. Falls aber Licht auf dem Wege verloren geht, so ist die scheinbare Helligkeit $k\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 I_2$, wo k kleiner als 1 ist. Die Modification, wenn A das Bild von A_2 ist, wird auch erörtert.

Gbs. (Lp.)

H. Seeliger. Zur Photometrie zerstreut reflectirender Substanzen. Münch. Ber. 201-248.

Der Herr Verfasser teilt eine grössere Zahl von Messungen mit, aus denen hervorgeht, dass das Lambert'sche photometrische Grundgesetz für zerstreut reflectirende Substanzen nur ausnahmsweise als eine Annäherung an die Wahrheit betrachtet werden kann, und dass dasselbe namentlich bei grossen Emanationswinkeln nicht den beobachteten Helligkeiten entspricht. Er legt dabei kurz die theoretischen Vorstellungen Bouguer's, der die ganze Erscheinung auf einzelne regelmässige Reflexionen zurückzuführen sucht, in etwas allgemeinerer Fassung dar und hebt hervor, dass dieselben nicht auf das Lambert'sche Gesetz führen, auch nicht bei Hinzufügung specieller Annahmen. Ferner erwähnt er die Ergebnisse der von Lommel consequent durchge-

führten Absorptionstheorie und findet, dass die Berücksichtigung der Absorption allein, auch ohne Rücksichtnahme auf eine Oberflächenreflexion, jedes beobachtete photometrische Verhalten erklären könne, wenn nur über die Art der Lichtabgabe aus den tiefer gelegenen Schichten passende Annahmen gemacht würden.

Wn.

E. Wiedemann. Fluorescenz und Phosphorescenz. I. Abh. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 446-463.

Der Verfasser schlägt zunächst für gewisse Lichterscheinungen eine neue Terminologie vor; wir heben aus derselben den Namen „Luminescenz" hervor als Bezeichnung für eine Lichterregung durch äussere Ursachen ohne entsprechende Aenderung der Temperatur. Weiter teilt er die Ergebnisse von Versuchen über die Umwandlung von Fluorescenz in Phosphorescenz mit und beschreibt ein zu quantitativen Untersuchungen dieser und verwandter Erscheinungen geeignetes Phosphoroskop, dessen Princip darin besteht, dass vor einem phosphorescirenden Körper eine mit Löchern versehene Scheibe vorbeirotirt, die abwechselnd Licht auf den Körper fallen lässt und dasselbe abschneidet. Die Theorie dieses Instruments ist folgende: Für die Periode der Belichtung des phosphorescirenden Körpers wird die Intensität i des ausgestrahlten Lichtes durch die Differentialgleichung

$$di = [AJ - bi]\,dt$$

bestimmt, wobei J die constante Helligkeit des auffallenden Lichtes ist, während A und b Constanten sind. Für die Zeit der Verdunkelung dagegen gilt die Gleichung

$$di = -bi\,dt.$$

Integrirt man diese Differentialgleichungen und wendet das Resultat dann successive auf die einzelnen Perioden der Belichtung und Verdunkelung an, so ergiebt sich leicht die Helligkeit am Schluss irgend einer der genannten Perioden. Aus der so erhaltenen, schnell wechselnden Helligkeit folgt mittels des Talbot'schen Gesetzes die vom Auge wahrgenommene gleichförmige Helligkeit und deren Abhängigkeit von der Umdrehungsgeschwin-

digkeit. Zum Schluss werden einige Versuchsanordnungen beschrieben. Wn.

H. Mohn. The fog bow and Ulloa's ring. Nature XXXVII. 391-392.

J. C. McConnel. The fog bow. Nature XXXVII. 486-487.

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

Larmor. Electro-magnetic and other images in spheres and planes. Quart. J. XXIII. 94-101.

In einem unbegrenzten Medium befinde sich eine Kugel vom Mittelpunkt M und Radius a; ϱ sei die Entfernung eines variabeln Punktes P von einem festen, ausserhalb der Kugel in der Entfernung c vom Mittelpunkt liegenden Punkte Q; V_1 und V_2 zwei vorläufig unbestimmte Potentiale äusserer Massen für den Raum innerhalb und ausserhalb der Kugel. Bestimmt man zwei Potentiale für den innern und äussern Raum

$$V_i = V_1, \quad V_a = V_2 + \frac{\varepsilon}{\varkappa_2}\frac{1}{\varrho}$$

so, dass an der Oberfläche der Kugel die Gleichungen stattfinden

$$V_i = V_a, \quad \varkappa_1 \frac{dV_i}{dn} = \varkappa_2 \frac{dV_a}{dn},$$

so werden durch diese Bedingungen V_1 und V_2 bestimmt, und man kann sich, wie der Verfasser durch Entwickelung nach Kugelfunctionen zeigt, den ganzen Raum homogen denken und V_1 herstellen durch eine Masse

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \frac{2\varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}$$

im Punkt Q, und durch eine Belegung des von Q bis ins Un-

endliche reichenden Teils der Axe MQ, deren Liniendichtigkeit in der Entfernung x vom Mittelpunkt ist:

$$\delta_i = \varepsilon \frac{\varkappa_2(\varkappa_2-\varkappa_1)}{(\varkappa_1+\varkappa_2)^2 c}\left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}};$$

ebenso V_2 durch eine Masse

$$\varepsilon_a = \varepsilon \frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2}\frac{a}{c}$$

in dem conjugirten Bildpunkt Q' von Q und durch eine Belegung des Teiles MQ' der Axe mit der Liniendichtigkeit:

$$\delta_a = -\varepsilon \frac{\varkappa_2(\varkappa_2-\varkappa_1)}{(\varkappa_1+\varkappa_2)^2 a}\left(\frac{c'}{x}\right)^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2}}, \text{ wo } c' = MQ' = \frac{a^2}{c}.$$

Die Potentiale V_i und V_a lassen sich auf verschiedene Weise interpretiren.

1) Nimmt man $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ als die Dielektricitätsconstanten oder magnetischen Permeabilitäten der Kugel und des äussern Raumes, so sind V_i und V_a die durch eine im Punkt Q befindliche elektrische oder magnetische Masse ε in Folge der dielektrischen oder magnetischen Polarisation erzeugten Gesamt-Potentiale. Für $a = \infty$, d. h. wenn die Kugel in den von einer Ebene begrenzten Halbraum übergeht, wird $\delta_i = \delta_a = 0$, und man erhält die bekannten Resultate. Für $\varkappa_1 = \infty$ wird $\varepsilon_i = \delta_i = \delta_a = 0$, und V_2 wird das Potential der durch den elektrischen Punkt ε auf der leitenden Kugel inducirten Elektricität. Befindet sich in Q ein magnetisches Molecül vom Moment m längs der Axe, so lässt sich V_2 erzeugen durch ein in Q' befindliches magnetisches Molecül vom Moment

$$m_a = -m \frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2}\left(\frac{a}{c}\right)^3,$$

eine in Q' befindliche Menge von freiem Magnetismus

$$\varepsilon_a = -m \frac{\varkappa_1(\varkappa_2-\varkappa_1)}{(\varkappa_1+\varkappa_2)^2}\frac{a}{c^2}$$

und eine Liniendichtigkeit auf MQ'

$$\delta_a = m \frac{\varkappa_1\varkappa_2(\varkappa_2-\varkappa_1)}{(\varkappa_1+\varkappa_2)^3 ac}\left(\frac{c'}{x}\right)^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2}}.$$

Die Summe dieser hinzugefügten Magnetismen ist 0, wie es sein muss, damit in grosser Entfernung von der Kugel die Gesamtkraft gleich der des ursprünglichen Molecüls ist. Das Entsprechende für einen elektrischen Strom ergiebt sich hieraus leicht.

2) Nimmt man $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ als Leitungsfähigkeiten, Q als einen elektrischen Einströmungspunkt von der Intensität $4\pi\varepsilon$, so wird V das Strompotential.

3) Nimmt man $\varkappa_1 = 0$, so wird V_a das Geschwindigkeitspotential, welches von einem Quellpunkt Q von der Intensität $4\pi\varepsilon$ in einer unendlichen Flüssigkeit von der Dichte $\varkappa_2$, in welcher sich eine Kugel befindet, herrührt; V_2 lässt sich also erzeugen durch einen Quellpunkt $4\pi\varepsilon\frac{a}{c}$ in Q' und durch eine negative Quell-Linie MQ' von der linearen Intensität $\frac{4\pi\varepsilon}{a}$.

Lbg.

J. J. Thomson. Electrical oscillations on cylindrical conductors. Lond. M. S. Proc. XIX. 520-549.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, einige Folgerungen aus den Maxwell'schen und Helmholtz'schen Gleichungen mit einander zu vergleichen.

(Die Gleichungen des Verfassers sind mehrfach dadurch unrichtig geworden, dass er dieselben Grössen bald in magnetischem, bald wie Helmholtz in elektrostatischem Mass angiebt; ausserdem scheint mir aus der Helmholtz'schen Theorie nicht die Gleichung

$$\mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad \text{sondern} \quad \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

zu folgen, welche auch mit der Maxwell'schen Gleichung

$$\mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

stimmt, da die Maxwell'schen Grössen F, G, H, abgesehen von einem Differentialquotienten nach x, resp. y und z, gleich μ-mal den Helmholtz'schen sind. D. Ref.)

Während die übrigen Gleichungen nur Unterschiede in den Constanten zeigen, bildet den Hauptunterschied zwischen beiden Theorien die Gleichung für das elektrostatische Potential φ, welche nach Maxwell sowohl in einem Dielektricum wie in einem Leiter lautet

$$\Delta\varphi = 0,$$

bei Helmholtz dagegen in einem Dielektricum die Form hat

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = V^2\Delta\varphi,$$

also eine Fortpflanzung des Potentials mit der Geschwindigkeit V ergiebt. Der Verfasser wendet diese Gleichung auf den Fall an, dass in einem Dielektricum auf zwei concentrischen Kugelflächen das Potential eine gegebene periodische Function der Zeit ist. Weiter behandelt er nach beiden Theorien den Fall eines leitenden Cylinders in derselben Weise wie in einer früheren Abhandlung, über welche F. d. M. XVIII. 1886. 1019 eingehend berichtet worden ist. Dabei macht er auf einen dort in den Grenzbedingungen, p. 1021, begangenen Fehler aufmerksam, dass nämlich nicht die ersten Differentialquotienten von F_x, F_y, F_z continuirlich sind, sondern die Grösse

$$\frac{1}{\mu}a_\vartheta = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dF_z}{d\varrho} - \frac{dF_\varrho}{dz}\right).$$

Unterschiede, welche voraussichtlich zu einer Entscheidung zwischen beiden Theorien führen könnten, ergeben sich nicht.

Lbg.

K. O. Richter. Ueber die galvanische Induction in einem körperlichen Leiter. Schlömilch Z. XXXIII. 209-230 u. 240-291.

Der Verfasser betrachtet bloss den stationären Zustand und vernachlässigt die gegenseitige Einwirkung der inducirten Ströme; seine Formeln sind daher weniger allgemein als die von Jochmann. Die Componenten E_x, E_y, E_z der elektromotorischen Kraft leitet er aus dem Neumann'schen Potentialgesetz, welches in diesem Falle, wo alle Ströme geschlossen sind, mit dem Weber'schen Inductionsgesetz identisch ist, dadurch ab, dass er

das Linienintegral der elektromotorischen Kraft in die Form $\int\left(E_x\frac{dx}{ds}+\cdots\right)ds$ bringt. Die Umformungen von E_x, welche er für neu zu halten scheint und durch ziemlich ungeschickte, weitläufige Rechnungen entwickelt, sind schon vielfach angewandt; auch gelten die von ihm als allgemein aufgestellten Gleichungen der Induction in einem rotirenden Körper nur für den Fall eines zur Rotationsaxe symmetrischen Inducenten. Das Interesse der Abhandlung beruht daher in den ausgerechneten Beispielen (Induction in einem Rotationskörper durch Verschiebung eines coaxialen Kreisstroms längs der Axe; in einer unendlichen Platte durch Verschiebung zweier einander und der Platte parallelen Stromdrähte in einer zur Platte senkrechten Richtung, oder durch Verschiebung der Platte gegen einen ihr parallelen Kreisstrom in einer der Platte parallelen Richtung; in einer um ihre Axe rotirenden unendlichen Platte oder Kugel unter Einwirkung eines Magnetpols). Lbg.

Campetti. Sulla distribuzione delle correnti sulle superficie. Batt. G. XXVI. 377-380.

Bestimmt man die Punkte einer Fläche σ mit der Randcurve s durch zwei Flächencoordinaten μ, ν, sodass das Linienelement $ds=\lambda\sqrt{d\mu^2+d\nu^2}$ ist, so gilt die dem Green'schen Satz entsprechende Gleichung

$$(1)\qquad \int(v\Delta u-u\Delta v)d\sigma=\int\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)ds,$$

wo $\lambda^2\Delta u=\frac{d^2u}{d\mu^2}+\frac{d^2u}{d\nu^2}$ ist und n die nach aussen gerichtete Normale der Randcurve s bezeichnet. Es sei nun v das Strompotential, welches also überall auf σ der Gleichung $\Delta v=0$ genügt; ist $(\mu_1,\ \nu_1)$ ein beliebiger Punkt auf σ, und umgiebt man denselben mit einer unendlich kleinen Curve t, so genügt zwischen t und s die Function

$$(2)\qquad u=\log\sqrt{(\mu-\mu_1)^2+(\nu-\nu_1)^2}$$

ebenfalls der Gleichung $\Delta u=0$; nimmt man also in Gleichung

(1) für σ die Fläche zwischen t und s, so geht die Gleichung über in

$$0 = \int\left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right)ds - \int\left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right)dt.$$

Da man nun die von t umschlossene unendlich kleine Fläche als eben annehmen kann, so ergiebt sich leicht

$$\int u\frac{dv}{dn}dt = 0, \quad \int v\frac{du}{dn}dt = 2\pi v_1,$$

wo v_1 den Wert im Punkte (μ_1, ν_1) bezeichnet; also

$$(3) \qquad 2\pi v_1 = \int\left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right)ds.$$

Bezeichnet G die der Green'schen Function analoge Function, welche auf σ der Gleichung $\Delta G = 0$ und auf s der Gleichung $\frac{dG}{dn} = \frac{du}{dn}$ genügt, so ist nach Gleichung (1)

$$\int v\frac{dG}{dn}ds = \int v\frac{du}{dn}ds = \int G\frac{dv}{dn}ds,$$

wodurch Gleichung (3) übergeht in

$$(4) \qquad 2\pi v_1 = \int (G-u)\frac{dv}{dn}ds,$$

welche den Wert von v in jedem Punkt von σ durch die Werte von $\frac{dv}{dn}$ auf der Randcurve angiebt. Tritt in zwei Punkten a, b der Randcurve ein Strom J ein und aus, so ist hier, wenn k die Leitungsfähigkeit bezeichnet, $k\frac{dv}{dn}ds = \mp J$, also

$$(5) \qquad v_1 = \frac{J}{2\pi k}[G-u]_b^a.$$

Der Verfasser wendet diese Formel auf die Fläche an, welche durch Aufschneiden einer Ringfläche längs eines Parallelkreises entsteht. Lbg.

P. Duhem. De l'aimantation par influence. Toulouse Ann. II.

Schon in F. d. M. XIX. 1887. 1121 besprochen. Lbg.

P. Duhem. Étude historique sur la théorie de l'aimantation par influence. Toulouse Ann. II.

P. Duhem. Sur un théorème de l'électrodynamique. Journ. de Math. (4) IV. 369-405.

Der Verfasser beweist folgenden Satz: „Durch die ponderomotorische Wirkung eines gleichförmigen geschlossenen Stromes auf ein Stromelement, und durch die Bedingung, dass die bei der Bewegung zweier Stromelemente geleistete ponderomotorische Arbeit nur von der Lagenänderung der zwei Elemente gegen einander abhängt, ist das Gesetz der ponderomotorischen Wirkung zweier Stromelemente auf einander vollkommen bestimmt.“ Dabei wird die Wirkung als aus einer Kraft und einem Kräftepaar bestehend angenommen. So z. B. geben das Ampère'sche und das Grassmann'sche Gesetz dieselbe Wirkung eines geschlossenen Stroms, aber das letztere genügt nicht der obigen Bedingung in Betreff der Arbeit; das Ampère'sche Gesetz und das Helmholtz'sche Potentialgesetz genügen beide der letztern Bedingung, geben aber verschiedene Wirkungen eines geschlossenen Stroms. Ferner wird der analoge Satz auch für den Fall bewiesen, dass die Wirkung eines „realisirbaren“ nicht geschlossenen Stroms (d. h. eines solchen, in welchem sich die Intensität continuirlich ändert und an den Enden verschwindet) auf ein Stromelement gegeben ist.

Einen Auszug erlaubt die Abhandlung nicht. Lbg.

P. Duhem. Sur la pression électrique. Ann. de l'Éc. Norm. (3) V. 97-146.

1) Der erste Teil der Abhandlung ist ein Versuch, die Potentialdifferenz an der Berührungsfläche zweier Leiter zu erklären. Der Verfasser stellt die elektromotorische Kraft in einem Punkt p eines Systems sich berührender Leiter durch $-\frac{d(V+\vartheta)}{dx}$ dar, wo V das elektrische Potential,

$$\vartheta = \int F(r)dm'$$

und $F(r)$ eine Function der Entfernung r des Punktes p von dem Massenelement dm' ist; $F(r)$ hängt ausserdem noch von der Dichtigkeit und andern, den Zustand des Körpers im Punkt p' bestimmenden Parametern ab; für $r = 0$ wird es unendlich wie $\frac{1}{r}$ und ist für alle endlichen Werte von r unmerklich, sodass das Integral nur über eine den Punkt p umgebende Kugel von dem sehr kleinen Radius μ auszudehnen ist. Hiernach ist ϑ im ganzen Raum continuirlich, auch an der Grenzfläche zweier verschiedenen Media, wo der Zustand discontinuirlich sein kann, da beim Durchgang durch die Grenzfläche die Kugel allmählich aus dem einen Medium in das andere übertritt; dessen ungeachtet nimmt es beim Durchgang durch die „Grenzschicht" zweier verschiedenen Media a und b (d. h. eine Schicht von der Dicke $\lambda + \mu$, wo λ die in der Theorie der Capillarität betrachtete Schicht, innerhalb welcher die Beschaffenheit des Körpers variirt) endlich verschiedene Werte ϑ_a und ϑ_b an. Die Bedingung des elektrischen Gleichgewichts in einem System sich berührender Leiter ist $V + \vartheta =$ Const., welche Gleichung im Innern der Leiter in $V =$ Const. übergeht, während an einer Berührungfläche ist

$$V_a - V_b = \vartheta_b - \vartheta_a;$$

diese Gleichung drückt hiernach nur eine endliche Aenderung von V beim Durchgang durch die Grenzschicht, aber keine mathematische Discontinuität aus, welche bekanntlich bei einem Potential mit endlicher Dichtigkeit nicht möglich ist. Ferner folgt aus

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \int \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} (x - x') dm',$$

dass die ersten Differentialquotienten von ϑ überall endlich und continuirlich sind, sowie dass die zweiten Differentialquotienten überall ausser an einer Grenzfläche, wo der Zustand sich discontinuirlich ändert, endlich sind, mithin auch $\Delta\vartheta$. Im Innern eines Leiters folgt also aus den Gleichungen

$$V + \vartheta = \text{Const.}, \quad \Delta V = -4\pi\varrho:$$

$$(2) \qquad \Delta\vartheta = 4\pi\varrho,$$

welche Gleichung ausserhalb der Grenzschicht, wo $\vartheta =$ Const.

ist, in $\varrho = 0$ übergeht. Ist Q die ganze Elektricitätsmenge in einem auf der Grenzfläche normalen Cylinder von der Höhe der Grenzschicht, ds ein Element der Oberfläche des Cylinders mit der äussern Normale n, so ist bekanntlich

$$\int \frac{dV}{dn} ds = -4\pi Q \quad \text{oder} \quad \int \frac{d\vartheta}{dn} ds = 4\pi Q;$$

da nun überall auf der Oberfläche des Cylinders $\frac{d\vartheta}{dn} = 0$ ist, so ist $Q = 0$, d. h. die zwei elektrischen Schichten innerhalb der Grenzschicht bilden eine Doppelschicht. Dagegen ist auf der Grenzfläche selbst die Flächendichtigkeit $\sigma = 0$; denn es ist bekanntlich

$$4\pi\sigma = \frac{dV_a}{dn} - \frac{dV_b}{dn} = \frac{d\vartheta_b}{dn} - \frac{d\vartheta_a}{dn} = 0$$

wegen der Continuität von $\frac{d\vartheta}{dn}$. Auf der Grenzfläche eines Leiters und eines „idealen" Isolators hingegen ist

$$4\pi\sigma = \frac{dV_a}{dn} - \frac{dV_b}{dn} = -\frac{d\vartheta_a}{dn} - \frac{dV_b}{dn} = 4\pi(\sigma_1 + \sigma_2);$$

hier ist also eine Flächendichtigkeit vorhanden, welche aus der „natürlichen", längs der ganzen Fläche constanten und nur von der Beschaffenheit der Körper a und b abhängenden Dichtigkeit $\sigma_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\vartheta_a}{dn}$ und aus der „mitgeteilten" Dichtigkeit $\sigma_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV_b}{dn}$ besteht.

2) Zur Berechnung des Druckes auf der Oberfläche eines Systems sich berührender, elektrisch geladener Leiter, welche sich in einem isolirenden Medium befinden, wendet der Verfasser die Gleichung $\delta F = \delta A$ an, wo δA die Arbeit der äussern Kräfte (des Oberflächendrucks und der auf die Masse wirkenden Kräfte). F das innere thermodynamische Potential des Systems bezeichnet; letzteres ist (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 1039)

$$F = U - TS + W + \Sigma\vartheta q,$$

wo U und S die Energie und Entropie des ungeladenen Systems, wenn es seinen sonstigen Zustand beibehält, W die elektro-

statische Energie, ϑ die im Vorhergehenden betrachtete Constante, q die in einem Punkt befindliche Elektricitätsmenge bezeichnet. Für $U-TS$ wendet der Verfasser den von ihm in seiner Theorie der Capillar-Erscheinungen (Ann. de l'Éc. Norm. 1885) abgeleiteten Ausdruck an; er betrachtet eine Zustandsänderung, bei welcher bloss die Berührungsflächen der Leiter unter einander und mit dem isolirenden Medium, also die specifischen Volumina v, so geändert werden, dass die Schnittlinien dieser Berührungsflächen ungeändert bleiben. Durch eine Entwickelung, welche keinen Auszug gestattet, findet er den Druck an der Berührungsfläche irgend eines der Leiter mit dem isolirenden Medium als eine Summe von vier Teilen, nämlich dem hydrostatischen Druck, dem Capillardruck, dem Druck in Folge der natürlichen Dichtigkeit σ_1 (vgl. oben in 1)) und dem Druck in Folge der mitgeteilten oder freien Elektricität σ_2; letzterer ist

$$P = 2\pi\sigma_2^2+4\pi\sigma_1\sigma_2-\frac{Q}{M}\frac{d\vartheta}{dv},$$

wo M die Masse des betrachteten Leiters, Q die auf seiner Berührungsfläche befindliche freie Elektricitätsmenge bezeichnet; das erste Glied $2\pi\sigma_2^2 = \frac{1}{8\pi}R^2$, wo R die von der mitgeteilten Elektricität herrührende Kraft bedeutet, ist der elektrische Druck der gewöhnlichen Theorie. Lbg.

Adler. Ueber die elektrischen Gleichgewichts-Verhältnisse von Conductoren und die Arbeitsverhältnisse elektrischer Systeme überhaupt. Wien. Ber. XCVII. 90-118.
Schon in F. d. M. XIX. 1887. 1114 besprochen. Lbg.

Morelli. Elettrometro ad emicicli. Torino Atti XXIV. 22-35.

Der Apparat ist eine Modification des Quadranten-Elektrometers; je zwei auf derselben Seite der Nadel liegende Quadranten sind zu einem Halbcylinder verbunden, und die Nadel ist senkrecht zur Trennungslinie der Halbcylinder isolirend geteilt. Bei Aufstellung der Theorie nimmt der Verfasser zuerst

die vier Quadranten als getrennt und jeden Quadranten mit dem in seinem Innern liegenden Teil der Nadel als einen Condensator an und vernachlässigt die gegenseitige Wirkung der einzelnen Condensatoren; sind dann V_1, V_2, V_3, V_4 die Potentiale der vier Quadranten, V_5 und V_6 die der Nadelhälften, $C_1, \ldots, C_4$ die Capacitäten der vier Condensatoren, so ist die potentielle Energie des Systems

$$W = \tfrac{1}{2}C_1(V_1-V_5)^2+\tfrac{1}{2}C_2(V_2-V_5)^2+\tfrac{1}{2}C_3(V_3-V_6)^2+\tfrac{1}{2}C_4(V_4-V_6)^2$$

also das Drehungsmoment, wenn beim Drehungswinkel ϑ Gleichgewicht stattfindet, und wenn man

$$-\frac{dC_1}{d\vartheta} = \frac{dC_2}{d\vartheta} = -\frac{dC_3}{d\vartheta} = \frac{dC_4}{d\vartheta} = c$$

setzt,

$$h\vartheta = \frac{dW}{d\vartheta} = \frac{c}{2}[-(V_1-V_5)^2+(V_2-V_5)^2-(V_3-V_6)^2+(V_4-V_6)^2]$$

$$= c\Big[(V_1-V_2)\Big(V_5-\frac{V_1+V_2}{2}\Big)+(V_3-V_4)\Big(V_6-\frac{V_3+V_4}{2}\Big)\Big],$$

mithin, wenn 1 mit 4, 2 mit 3 verbunden ist,

$$(1) \qquad \vartheta = k(V_1-V_2)(V_5-V_6).$$

Eine strengere Theorie zeigt, dass diese Formel mit hinreichender Annäherung angewandt werden kann, wenn die Nadel der gewöhnlichen Form gegenüber bedeutend verbreitert wird. Der Hauptzweck des Apparates ist die directe Bestimmung der in einem Teil eines Stromkreises i entwickelten Energie W; dazu werden die Hälften 1 und 2 mit den Enden a und b dieses Stromteils, die Nadelhälften 5 und 6 mit den Enden c und d eines andern Stückes desselben Stromkreises verbunden; ist r der bekannte Widerstand des letztern Stückes, so ist

$$\vartheta = k(V_a-V_b)ir = krW.$$

Lbg.

Moutier. Sur les courants interrompus. Soc. Philom. Mém. 97-104.

Wird ein Strom J vom Widerstand r, in dessen Kreise sich eine Spirale vom Selbstinductions-Coefficienten w befindet, abwechselnd während einer Zeit ϑ geschlossen und während einer

Zeit ϑ_1 geöffnet, aber ohne dass Funken übergehen, so ist, wenn die Zeit t vom Beginn jeder Periode an gerechnet und $\frac{r}{w} = \varrho$ gesetzt wird, die Stromstärke während einer Schliessungs- resp. Oeffnungs-Periode

$$i = J + Ae^{-\varrho t} \quad \text{und} \quad i = Be^{-\varrho t},$$

wo sich A und B durch die Intensität zu Anfang der Periode bestimmen. Bezeichnet i_{2p-1} die Intensität am Ende der p^{ten} Schliessungsperiode, i_{2p} die Intensität am Ende der p^{ten} Oeffnungsperiode, und setzt man

$$m = e^{-\varrho\vartheta}, \quad m_1 = e^{-\varrho\vartheta_1},$$

so ist

$$i_{2p-1} = mi_{2p-2} + (1-m)J, \quad i_{2p} = m_1 i_{2p-1},$$

woraus

$$(1) \quad i_{2p-1} = (1-m)\frac{1-m^p m_1^p}{1-mm_1}J, \quad i_{2p} = m_1 i_{2p-1}.$$

Nach einer so langen Zeit, dass man $m^p m_1^p$ vernachlässigen kann, bleiben diese Stromstärken unveränderlich, nämlich

$$(1^a) \quad i_{2p-1} = \frac{1-m}{1-mm_1}J, \quad i_{2p} = \frac{m_1(1-m)}{1-mm_1}J.$$

Bezeichnet Q_{2p-1} und Q_{2p} die während einer Schliessungs- resp. Oeffnungs-Periode durchgegangene Elektricitätsmenge, so ist

$$(2) \quad Q_{2p-1} + Q_{2p} = J\vartheta - \frac{1}{\varrho}(1-m)m_1(mm_1)^{p-1}J,$$

also nach Eintritt des stationären Zustandes

$$(2^a) \quad Q_{2p-1} + Q_{2p} = J\vartheta = \frac{\vartheta}{\vartheta+\vartheta_1}Q,$$

wo Q die Elektricitätsmenge bezeichnet, welche während derselben Zeit im nicht unterbrochenen Strom durchgehen würde; von da an ist also die während irgend einer Zeit durchgehende Elektricitätsmenge $= Jt$, wo t die Zeit bezeichnet, während welcher der Strom geschlossen ist, übereinstimmend mit den Beobachtungen von Pouillet. Die ganze bis zum Eintritt des stationären Zustandes inducirte Elektricitätsmenge ist nach (2)

$$\varDelta = -\frac{1}{\varrho}(1-m)m_1 J\sum_1^\infty (mm_1)^{p-1} = -\frac{1}{\varrho}\frac{(1-m)m_1}{1-mm_1}J.$$

Bleibt während des stationären Zustandes vom Ende der p^{ten} Oeffnungsperiode an der Strom geschlossen, so ist die von Anfang an inducirte Elektricitätsmenge

$$\varDelta + (i_{2p} - J)\int_0^\infty e^{-\varrho t}dt = -\frac{1}{\varrho}J,$$

d. h. ebenso gross, als wenn der Strom von der ersten Schliessung an geschlossen geblieben wäre; bleibt er vom Ende der p^{ten} Schliessungsperiode an geöffnet, so ist die ganze inducirte Elektricität

$$\varDelta + i_{2p-1}\int_0^\infty e^{-\varrho t}dt = \frac{1}{\varrho}\frac{(1-m)(1-m_1)}{1-mm_1}J,$$

sie ist also für sehr kleine Werte von ϑ und ϑ_1 verschwindend klein. Lbg.

Robin. Distribution de l'électricité induite par des charges fixes sur une surface fermée convexe. C. R. CVI. 413-416.

1) In einer früheren Abhandlung (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 1132) hat der Verfasser folgenden Satz bewiesen: „Sind p und p' irgend zwei Punkte einer geschlossenen Fläche σ, $r = pp'$, n die innere Normale in p, $\varphi = \sphericalangle(pp', n)$, und bildet man mittels einer beliebigen Function f die Ausdrücke

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\int f'\frac{\cos\varphi}{r^2}d\sigma',$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\int f_1'\frac{\cos\varphi}{r^2}d\sigma', \ldots, f_n = \frac{1}{2\pi}\int f_{n-1}'\frac{\cos\varphi}{r^2}d\sigma',$$

so ist $\lim f_n = ce$, wo e die Dichtigkeit einer Gleichgewichtsbelegung der Fläche und c eine Constante bedeutet".

In vorliegender Abhandlung bestimmt der Verfasser zunächst den Wert von c, wenn e die Gleichgewichtsbelegung mit der Ladung 1 ist. Es ist nämlich nach einem bekannten Satze

$$\int f_1 d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int f'd\sigma'\int\frac{\cos\varphi}{r^2}d\sigma = \int f'd\sigma',$$

also

$$\int fd\sigma = \int f_1 d\sigma = \int f_2 d\sigma = \ldots = \lim\int f_n d\sigma = c\int ed\sigma = c,$$

mithin

$$(1)\qquad c = \int f d\sigma.$$

2) Die Dichtigkeit ε, welche auf einer geschlossenen Fläche durch die Kraft äusserer Massen inducirt wird, deren nach der äusseren Normale gerichtete Componente gleich f ist, ergiebt sich aus einem vom Verfasser in einer anderen Abhandlung (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 1026) abgeleiteten Satze, wonach

$$2\pi\varepsilon = f + \int \varepsilon' \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma'$$

ist; aus der obigen Definition der Functionen f_n folgt ohne weiteres

$$(2)\qquad 2\pi\varepsilon = \sum_0^\infty f_n,$$

welche Reihe sich als convergent erweisen lässt. Liegen die inducirenden Massen im Innern der Fläche, und ist f die nach innen gerichtete normale Componente, so ist nach demselben Satze

$$2\pi\varepsilon = f - \int \varepsilon' \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma',$$

welcher genügt wird durch

$$(2^a)\qquad 2\pi\varepsilon = \sum_0^\infty (-1)^n f_n.$$

Lbg.

O. Venske. Zur Theorie des Hall'schen Phänomens. Gött. N. 313-319.

Sind u und v die Stromcomponenten in einer leitenden Platte, α der Winkel, um welchen die Ströme durch die Wirkung der Magnetkraft gedreht werden, so gelten bekanntlich die Gleichungen

$$(1)\qquad u + v\operatorname{tg}\alpha = -\varkappa \frac{dV}{dx}, \quad -u\operatorname{tg}\alpha + v = -\varkappa \frac{dV}{dy},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0,$$

und am Rande s, welchem die Strömung parallel sein muss,

$$(2)\qquad \frac{dV}{dn}\cos\alpha - \frac{dV}{ds}\sin\alpha = 0,$$

wo die Elemente ds und dn der Randcurve und ihrer Normale so zu einander liegen wie die y-Axe zur x-Axe. Ist nun $z_1 = x_1+iy_1$ die Anode resp. Kathode eines in die Platte eintretenden Stroms, z_2 ihr Spiegelbild in einer beliebigen Geraden, $m = \pm \frac{J}{2\pi\varkappa\cos^2\alpha}$, so wird die Gleichung (2) längs der Geraden erfüllt, wenn man für V den reellen Teil nimmt von

$$U+iW = m\log(z-z_1)+me^{2i\alpha}\log(z-z_2).$$

Hiernach ergiebt sich der Wert von V für eine keilförmige Platte als die Summe der Werte von U für die successiven Spiegelbilder der Elektroden an den Winkelschenkeln. Ausser für zwei punktförmige Elektroden berechnet der Verfasser auch noch V für den Fall, wo die Kathode punktförmig ist, während die Anode durch den einen Winkelschenkel gebildet wird.

Lbg.

O. Tumlirz. Zur Einführung in die Theorie der dielektrischen Polarisation. Schlömilch Z. XXXIII. 251-255.

Enthält eine einfache, auf die Niveauflächen gegründete Ableitung der Gleichung $V = \frac{P}{K}$, wo P das Potential eines in einem Dielektricum von der Dielektricitätsconstante K befindlichen Leiters, V das durch die Polarisation veränderte Gesamtpotential bezeichnet.

Lbg.

J. Delsaux. Sur la tension électrique suivant les lignes de force dans les milieux diélectriques. Brux. S. sc. XII. B. 97-104.

Beweis des Maxwell'schen Satzes: „Die mechanische Wirkung, welche ein elektrisirtes System auf einen der Körper des Systems ausübt, ist auf Elementarwirkungen zurückführbar, welche auf die Punkte einer beliebigen geschlossenen Oberfläche ausgeübt werden würden, die den einzigen betrachteten Körper umgiebt und unabänderlich mit ihm verbunden ist. Damit diese Elementarkräfte zu den Oberflächenelementen, die sie angreifen,

senkrecht sind, ist es nötig und hinreichend, dass diese Elemente zu den Kraftlinien normal oder tangential sind, und in beiden Fällen sind jene Kräfte gleich dem Quotienten aus dem Quadrate der elektromotorischen Kraft durch 8π".

Mn. (Lp.)

D. Bos. Volume - veranderingen van dielectrica. Diss. Groningen. Wolters. 99 S.

Zu vorliegender Dissertation hat der Widerspruch Veranlassung gegeben, der sich aus den entgegengesetzten Resultaten ergeben hatte, welche Quincke und Röntgen bei ihren Versuchen über elektrische Ausdehnung erhielten. Verfasser beabsichtigte anfänglich durch experimentelle Untersuchungen zu der Entscheidung der Frage zu kommen; da ihm aber die Gelegenheit zu Versuchen fehlte, begnügte er sich mit rein theoretischen Betrachtungen. So behandelt der erste Teil seiner Arbeit das Phänomen von Duter (Comptes rendus 1887 S. 828) und die Erklärung desselben durch Korteweg und Boltzmann. Der zweite Teil betrachtet näher die Kräfte, welche beim Laden eines Dielektricums auftreten, der dritte die Volumenänderungen von Flüssigkeiten und Gasen nach den Untersuchungen von Quincke mit dem Ergebnis, dass für die Erklärung der sogenannten elektrischen Ausdehnung keine einzige neue Wirkung der Elektricität angenommen zu werden braucht, sondern dass sie vielmehr bei den dielektrischen Flüssigkeiten in deren Erwärmung ihren Grund hat.

G.

Ulbricht. Die Widerstandsgleichung einer Potential-Niveaufläche. Schlömilch Z. XXXIII. 372-373.

Enthält den Beweis des folgenden Satzes: „In einem körperlichen Leiter, in welchem durch Anlegung zweier Elektroden eine stationäre Strömung hergestellt ist, ist für jeden Punkt einer Niveaufläche die Differenz der Widerstände des Leiters zwischen diesem Punkte und den zwei Elektroden constant". Lbg.

Malavasi. Note al saggio teorico della pila secondo il principio di Volta. Modena Mem. (2) VI. 173-186.

Die Abhandlung enthält im wesentlichen nichts weiter als den Beweis des auf der Hand liegenden Satzes, dass in einer offenen Hydro- oder Thermo-Kette von n gleichartigen Elementen die Potentialdifferenz an den Enden das n-fache der Potentialdifferenz bei einem Element ist, unabhängig von den elektrischen Capacitäten der das System bildenden Metalle und Flüssigkeiten. Der Beweis wird mit Hülfe der absoluten Werte des Potentials geführt, welche sich auf beiden Seiten einer elektromotorischen Fläche nach dem umgekehrten Verhältnis der Capacitäten der zwei durch diese Fläche getrennten Teile des Systems verteilen: eine ganz unnötige Complicirung, da die absoluten Werte der Potentiale bei Berechnung der resultirenden Potentialdifferenz offenbar gar nicht in Betracht kommen.

Lbg.

E. Bazzi. Sullo spostamento delle linee di livello che si osserva in un disco metallico ruotante traversato da correnti voltaiche. Pisa Ann. V. 51-75.

Wirken die Pole eines Elementes auf zwei gegenüberliegende Punkte einer leitenden Platte, und wird die Platte in Rotation versetzt, während die Pole fest bleiben, so bewegen sich die Niveaulinien der Platte rückwärts. Der Verfasser, der dieses Phänomen beobachtet hat, versucht dasselbe durch die Induction der die Platte durchfliessenden Ströme auf die rotirende Platte selbst zu erklären.

Vi.

C. H. C. Grinwis. De energie van den bolvormigen condensator. Amst. Versl. en Meded. (3) V. 349-357.

Eine theoretische Untersuchung betreffs der Energie eines kugelförmigen Condensators, welche sich an frühere Untersuchungen des Verfassers über elektrische Energie anschliesst (Siehe F. d. M. XVII. 1885. 1054). Alle besonderen Fälle, die bei dem kugel-

förmigen Condensator eintreten können, werden eingehend untersucht und die Werte der Energie für sie ermittelt.

G.

H. Holden. A method of calculating the electrostatic capacity of a conductor. Manch. Mem. (4) I. 112-120.

Nach der angegebenen Methode wird anfänglich der Zustand des dielektrischen Mittels betrachtet. Die Capacität eines Teiles eines Dielektricums, welches durch Kraftlinien und äquipotentielle Oberflächen begrenzt ist, wird als die Elektricitätsmenge erklärt, welche über das eine Ende zu verteilen ist (während eine gleiche Menge der entgegengesetzten auf dem anderen sich befindet), um die Einheit der Potentialdifferenz zwischen den Enden hervorzubringen. Die Capacität eines Leiters bei Gegenwart anderer Leiter ist die Capacität jenes Teiles des Dielektricums, welches durch die Leiter begrenzt und von den Kraftlinien durchschnitten wird. Die Berechnung der Capacität geschieht wie folgt. Gegeben sei ein geladener Leiter A mit dem Potential V_A in Gegenwart anderer Leiter B, C, ..., mit den Potentialen V_B, V_C, ... Ist dS der Inhalt eines senkrechten Querschnittes einer elementaren Kraftröhre, die von A nach B reicht, im Abstande r, welcher längs der Röhre von irgend einem Ursprunge an gemessen wird; dq die Menge auf der Elementarfläche von A; K die specifische inductive Capacität, dann ist

$$-\frac{\partial V}{\partial r}\cdot dS = \frac{4\pi}{K}\cdot dq; \qquad \frac{K(V_A - V_B)}{4\pi\, dq} = \int \frac{dr}{dS},$$

indem die Integration sich auf r längs der Kraftröhre bezieht. Bezeichnet man die Capacität $q/(V_A - V_B)$ des Teils des Dielektricums, welches durch die Kraftröhren von A nach B eingeschlossen wird, mit C_{AB}, so erhält man:

$$4\pi C_{AB}/K = \int \left\{ 1 \Big/ \int \frac{dr}{dS} \right\}.$$

Aehnliche Integrale können für die Kraftröhren gefunden werden, welche nach den anderen Leitern gehen. Als Beispiel nehme man zwei concentrische Kugeln mit den Radien R_1, R_2:

$$\int \frac{dr}{dS} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2 d\omega} = \frac{1}{d\omega}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

$$\frac{4\pi C}{K} = \int \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} d\omega = \frac{4\pi R_1 R_2}{R_1 - R_2}.$$

Noch andere Beispiele werden gegeben. Gbs. (Lp.)

A. Foeppl. Versuch einer mathematischen Theorie der Gasentladungen. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 222-240.

Es fehlt bis jetzt an einem grundlegenden Gesetz für die Leitung der Elektricität in verdünnten Gasen; nur das eine scheint sicher, dass weder das Ohm'sche Gesetz noch eine Modification desselben die Erscheinungen befriedigend darstellt. Der Verfasser glaubt dem zu erstrebenden Ziele näher zu kommen, indem er sich in seinen Untersuchungen einerseits auf die kinetische Theorie der Gase, andererseits auf die Elektrostatik stützt. Er zählt alle a priori möglichen Hypothesen auf, von denen man zur Erklärung des Mechanismus der Gasentladungen ausgehen kann, zieht die theoretischen Folgerungen aus denselben und vergleicht diese mit den vorliegenden Erfahrungen. Das Ergebnis der Untersuchung ist, dass man die Entladung als eine wesentlich convective aufzufassen habe, sei es, dass die unzersetzten Molecüle, sei es, dass die durch Elektrolyse aus denselben hervorgehenden Ionen die Vehikel der Elektricität bilden.

Sbt.

F. Lucas. Généralisation du théorème de Rolle. C. R. CVI. 121-122.

Die sämtlichen Wurzeln einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades $F(z) = 0$ mit reellen oder imaginären Coefficienten werden in der complexen Zahlenebene durch materielle Punkte von der Masse 1 repräsentirt, die einen Punkt von gleicher Masse im umgekehrten Verhältnis ihrer Entfernung von diesem abstossen. Die isodynamischen Linien, längs welcher die Abstossungsresultante ihre Grösse nicht ändert, sind algebraische Curven vom Grade $2p$; ihre rechtwinkligen Trajectorien bilden

eine Schar algebraischer Curven vom Grade $p-1$ und werden „lignes halysiques" genannt. Auf jeder Curve dieser Schar liegen die den sämtlichen Wurzeln von $F(z)=0$ und denen von $F'(z)=0$ entsprechenden Punkte, und zwar derart, dass die Wurzelpunkte von $F(z)=0$ durch die von $F'(z)=0$ getrennt werden. F.

F. Lucas. Détermination électrique des racines réelles et imaginaires de la dérivée d'un polynôme quelconque. C. R. CVI. 195-197.

Das gegebene Polynom p^{ten} Grades sei

$$F(z) = F(x+iy) = X(x,y)+i\,Y(x,y).$$

Nachdem Verfasser die p Wurzeln z der Gleichung $F(z)=0$ als Punkte in der complexen Zahlenebene dargestellt hat, denkt er sich die letztere als eine die Elektricität leitende Platte, deren eine Dimension als unendlich klein und deren beide anderen Dimensionen als unendlich gross zu betrachten sind, und die p Punkte z als Spitzen von Elektroden, deren jede dieselbe Elektricitätsmenge der Platte zuführt. Unter dieser Voraussetzung lautet die Gleichung für die Curven gleichen elektrischen Potentials

$$X^2+Y^2 = \text{const}.$$

Nun entspricht jedem Knotenpunkte einer solchen Curve eine Wurzel von

$$F'(z) = 0.$$

Das Gesagte bleibt gültig, wenn die Platte durch einen Kreis von hinreichend grossem Radius begrenzt wird. Alsdann lassen sich aber die Linien gleichen Potentials experimentell darstellen. Taucht man nämlich eine isolirte, kreisförmige Metallplatte in eine passend gewählte Salzlösung, nimmt als eine Elektrode eine Cylinderfläche, deren Rand die Grenze der Platte berührt, und als andere Elektrode einen Bündel von Drähten, deren Spitzen bei den Punkten z eintreten, so stimmen nach Guébhard die entstehenden Farbenringe nahezu mit den Linien gleichen Potentials überein. F.

F. Lucas. Résolution électrique des équations algébriques. C. R. CVI. 268-270.

Die Resultate der vorangehenden Arbeit benutzt Verfasser dazu, um die Auflösung einer Gleichung p^{ten} Grades

$$F(z) = 0$$

auf die von Gleichungen niedrigerer Grade zurückzuführen.

Erste Methode. Es lässt sich leicht eine Function $\Phi(z)$ vom Grade $p+1$ angeben, deren Ableitung gleich $F(z)$ ist und von welcher zwei Nullwerte durch Auflösung einer Gleichung vom Grade $\frac{p}{2}$ oder $\frac{p-1}{2}$, je nachdem p gerade oder ungerade ist, gefunden werden können, so dass nur die Lösung einer Gleichung vom Grade $p-1$ zur Aufsuchung der sämtlichen Wurzeln von $\Phi(z) = 0$ erforderlich ist. Hat man aber diese, so kann man, wie in der vorhergehenden Arbeit gezeigt ist, auf empirischem Wege die Wurzeln der abgeleiteten Gleichung $F(z) = 0$ bestimmen.

Zweite Methode. Bezeichnen z', z'' zwei willkürlich gewählte Constanten, so werden die Wurzeln von

$$F(z) - F(z') = 0$$

und die von

$$F(z) - F(z'') = 0$$

durch Auflösung je einer Gleichung $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades gefunden. Die zu diesen beiden Gleichungen gehörigen Systeme von Curven gleichen Potentials lassen sich alsdann auf experimentellem Wege bestimmen, und die Wurzeln von $F(z) = 0$ sind unter den Schnittpunkten einer gewissen Curve des einen Systems und einer gewissen Curve des anderen Systems enthalten. F.

F. Lucas. Détermination électrique des lignes isodynamiques d'un polynôme quelconque. C. R. CVI. 587-589.

Die den Wurzeln einer algebraischen Gleichung $F(z) = 0$ entsprechenden isodynamischen Linien (vgl. oben S. 1158—59) sind identisch mit den Curven gleichen Potentials, welche zu dem aus

den Wurzeln von $F(z) = 0$ und aus denen von $F'(z) = 0$ gebildeten Systeme gehören, falls man die ersteren in der als leitende Platte gedachten complexen Zahlenebene als Eintrittsstellen positiver, die letzteren als Eintrittsstellen negativer Elektricität ansieht (vgl. oben S. 1159). Es lassen sich demnach (vgl. ebenda) die isodynamischen Linien auf elektrolytischem Wege experimentell darstellen. F.

F. LUCAS. Résolution immédiate des équations au moyen de l'électricité. C. R. CVI. 645-648.

$F(z) = 0$ sei die gegebene Gleichung p^{ten} Grades mit reellen, numerischen Coefficienten. $f(z)$ sei eine ganze rationale Function $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Nullwerte willkürlich gewählte reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ sind. Man stelle den Quotienten $\frac{F(z)}{f(z)}$ als eine Summe von Partialbrüchen dar und bezeichne die Zähler, den Grössen λ entsprechend, mit $\mu_1, \ldots, \mu_{p+1}$. Betrachtet man nunmehr den durch einen hinreichend grossen Kreis ausgeschnittenen Teil der Zahlenebene als homogene, die Elektricität leitende Platte und führt an den Punkten λ Elektricitätsmengen (positive und negative) ein, welche den Grössen μ proportional sind, dann entsprechen den Knotenpunkten der Linien gleichen Potentials die Wurzeln der vorgelegten Gleichung $F(z) = 0$. Wie die genannten Curven gefunden werden können, ist in einer früheren Arbeit angegeben (vgl. S. 1159). F.

F. LUCAS. Résolution des équations par l'électricité. C. R. CVI. 1072-1074.

Enthält eine Ergänzung der vorigen Arbeit (C. R. CVI. 645-648). Die Entwickelung bleibt gültig, wenn die Hülfsfunction $f(z)$ nicht vom Grade $p+1$, sondern vom Grade $p+2$ gewählt wird. Im letzteren Falle ist aber $\Sigma\mu = 0$, d. h. die Menge der eingeführten positiven Elektricität ist gleich der der negativen Elektricität; man ist demnach nicht genötigt, die Aus-

gleichung der beiden Arten von Elektricität durch eine besondere, dem Rande der Platte entsprechende Elektrode vorzunehmen.

F.

R. Ferrini. Sulle formole per il calcolo delle dinamo a corrente continua. Lomb. Ist. Rend. (2) XXI. 671-684.

W. G. Hankel. Das elektrodynamische Gesetz ein Punktgesetz. Leipz. Ber. 89-109; Wiedemann Ann. (2) XXXVI.

Das Ampère'sche Gesetz für die x-Componente der Kraft eines Stromelementes $i'ds'$ auf ein Stromelement ids lässt sich bekanntlich schreiben

$$X = ii'ds\,ds'\Big[-\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\Big) + \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{dr}{dx}\Big) + \frac{d}{ds'}\Big(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dx}\Big)\Big].$$

Bei Berechnung der Kraft eines geschlossenen Stroms i' kann man das letzte Glied weglassen und den obigen Ausdruck in die Form bringen

$$(1)\quad X = \frac{ii'ds\,ds'}{r^2}\sin(r, ds')(\cos\nu y\cos\gamma - \cos\nu z\cos\beta)$$
$$= \frac{ii'ds\,ds'}{r^2}\sin(r, ds')\cos\psi\cos Nx,$$

wo α, β, γ die Winkel von ds mit den Axen, ν die Normale der Ebene (r, ds'), ψ den Winkel von ds mit dieser Ebene, N das Lot auf ds in der Ebene (r, ds') bezeichnet; die resultirende Kraft ist also

$$(2)\qquad R = \frac{ii'ds\,ds'}{r^2}\sin(r, ds')\cos\psi,$$

und ihre Richtung liegt in der Ebene (r, ds') und ist senkrecht auf ds. Dies ist das von Grassmann auch für die Wirkung zweier Stromelemente auf einander als gültig angenommene Gesetz. Setzt man nun

$$i'\int\frac{ds'}{r^2}\sin(r, ds')\cos\nu x = Q\cos(Q, x)\ \text{ etc.},$$

so wird die Kraft eines geschlossenen Stroms nach Gleichung (1)

$$(3)\ X = idsQ(\cos(Qy)\cos\gamma - \cos(Qz)\cos\beta) = idsQ\sin(Q, ds)\cos N'x,$$

wo N' die Normale der Ebene (Q, ds) bezeichnet; die Kraft erscheint also als ein Product zweier Factoren, von denen der eine Q ein durch den Ort von ds bestimmter Vector ist, während der andere nur von der Richtung von ds gegen diesen Vector abhängt. Man kann dies so erklären, dass der Strom i' um sich herum einen Zustand hervorbringt, welcher in jedem Punkte durch den Vector Q definirt ist, und dass dieser am Ort von ds stattfindende Zustand eine Kraft auf ds hervorruft, welche nur von der Richtung von ds gegen Q abhängt. Zum Schluss deutet der Verfasser darauf hin, dass die von ihm aufgestellte Theorie (Pogg. Ann. CXXVI), wonach die Aethermolecüle im Querschnitt eines von einem Strom durchflossenen Drahtes einen Wirbel bilden, in Folge dessen alle auf einer Kugelfläche um ds' liegenden Aethermolecüle eine gleiche Rotationsgeschwindigkeit um die Axe ds' erhalten, die Gleichung (3) ergiebt, und dass nach derselben Q die von dem Strom i' an den Ort von ds übertragene Linear-Geschwindigkeit ist. Lbg.

J. Fröhlich. Zur Integration der Differentialgleichungen der elektrodynamischen Induction. Math. naturw. Ber. Ungarn. VI. 296-308.

Der Aufsatz giebt eine Uebersicht über die Ueberlegungen, welche den Ausgangspunkt der Preisarbeit des Verfassers „Allgemeine Theorie des Elektrodynamometers“ bilden, und skizzirt kurz ihre Einleitung und ihren Inhalt. Dieselbe ist als Sonderausgabe der dritten Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und in deutscher Sprache bei R. Friedländer und Sohn in Berlin erschienen. Lp.

S. H. Burbury. On the induction of electric currents in conducting shells of small thickness. Lond. Phil. Trans. CLXXIX. 297-324.

Es wird angemerkt, dass die Aufgabe der elektrischen Ströme in festen Körpern oder Hohlschalen von verschiedenen

Gelehrten behandelt worden ist (Niven, Lamb, Larmor, Heaviside), im allgemeinen aber nur mit Rücksicht auf Leiter von besonderer Gestalt, wie Kugeln, unendliche Ebenen, Cylinder oder Ellipsoide, und mit Rücksicht auf specielle Aenderungen des äusseren magnetischen Feldes.

Das Ziel des Aufsatzes ist die Aufstellung einer allgemeinen, auf Oberflächen jeder Gestalt anwendbaren Theorie bei Gegenwart eines äusseren magnetischen, beliebig sich ändernden Feldes.

Benutzt wird ein Schluss von Herrn Lamb, dass nämlich die Verrückungs-Ströme (displacement currents), welche nach der Maxwell'schen Theorie im Dielektricum vorhanden sind, in allen dem Experimente zugänglichen Fällen keinen merkbaren Einfluss auf die Modification der Leitungsströme haben, welche in metallischen Leitern inducirt werden. Die Leitungsströme werden daher als die einzig möglichen Ströme behandelt.

Cly. (Lp.)

Sir William Thomson. A simple hypothesis for electromagnetic induction of incomplete circuits; with consequent equations of electric motion in fixed homogeneous or heterogeneous solid matter. Nature XXXVIII. 569-571.

Vortrag in der British Association.

E. Budde. Ueber den Einfluss der Erdrotation auf das Clausius'sche Gesetz. Berl. phys. Ges. Verh. VII. 10-13.

Der Verfasser zeigt, dass nach dem Clausius'schen Gesetz der Einfluss der Erdrotation unmerklich ist. Lbg.

A. Hempel. Ueber elektrische Induction. Progr. d. Fr.-Werder'schen Oberrealschule, Berlin.

Enthält eine elementare Theorie der Dynamo-Maschine.

Lbg.

E. Dorn. Eine Bestimmung des Ohm. Berl. Ber. 731-744.

Mittels der Dämpfungs-Methode. Lbg.

Vaschy. Propagation du courant sur une ligne télégraphique. C. R. CVII. 1145-1148.

Enthält ohne Beweis einige Folgerungen aus der Integration der Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} = CR\frac{dV}{dt} + CL\frac{d^2V}{dt^2},$$

worin V das Potential, R, C, L Widerstand, Capacität und Selbstinductions-Coefficient der Längeneinheit des Drahtes bezeichnet, für den Fall, dass zu Anfang am einen Ende plötzlich ein bestimmter Wert von V hergestellt wird. Danach erleidet, wenn man die ganze Länge des Drahtes mit l bezeichnet und $\vartheta = l\sqrt{CL}$ setzt, die Stromstärke am ersten Ende zu den Zeiten $0, 2\vartheta, 4\vartheta, \ldots$, am andern Ende zu den Zeiten $\vartheta, 3\vartheta, 5\vartheta, \ldots$ plötzliche Aenderungen, welche sich also mit der Geschwindigkeit $\frac{l}{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{CL}}$ fortpflanzen. Lbg.

P. Duhem. Sur l'aimantation des corps diamagnétiques. C. R. CVI. 736-738.

In seiner Abhandlung „Théorie nouvelle de l'aimantation par influence" (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 1121) hatte der Verfasser die Frage, ob die Magnetisirung eines diamagnetischen Körpers bei gegebener äusserer Kraft eine eindeutige sei, unentschieden gelassen. In der vorliegenden Note findet er, dass, wenn ohne sonstige Aenderung in einem einzelnen Volumenelement eines diamagnetisirten Körpers das Moment verschwindet, die freie Energie (das „innere thermodynamische Potential") abnimmt; dass also entweder von einem Gleichgewichtszustand aus die freie Energie von selbst continuirlich abnimmt, mithin dieser Gleichgewichtszustand kein stabiler ist und auch bei ungeänderter äusserer Kraft niemals zu einem stabilen Gleichgewichtszustand führt;

oder (was wahrscheinlicher ist), dass die freie Energie unendlich viele Maxima, der Körper mithin bei derselben äusseren Kraft unendlich viele stabile Gleichgewichtslagen besitzt.

Lbg.

JANET. Sur l'application du phénomène de l'aimantation transversale à l'étude du coefficient d'aimantation du fer. C. R. CVI. 200-203.

Geht ein momentaner Strom von der (magnetisch gemessenen) Dichtigkeit u oder der Intensität J durch die Masse einer Eisenröhre von der Länge l und dem innern und äussern Radius ϱ_0 und ϱ_1 parallel der Axe, so ist die Magnetkraft des Stroms, wenn man denselben als unendlich lang betrachtet, in einem Punkt, welcher die Entfernung x von der Axe hat, senkrecht zur Diametralebene gerichtet und hat den Wert

$$f = 4u\int_0^\pi d\vartheta \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{x-\varrho\cos\vartheta}{r^2}\varrho d\varrho, \quad \text{wo} \quad r^2 = x^2+\varrho^2-2x\varrho\cos\vartheta.$$

Ausserhalb der Masse der Röhre ergiebt sich hieraus $f = 0$, und innerhalb

$$(1) \quad f = J\left(mx+\frac{m'}{x}\right), \quad \text{wo} \quad m = \frac{2}{\varrho_1^2-\varrho_0^2}, \quad m' = -\frac{2\varrho_0^2}{\varrho_1^2-\varrho_0^2},$$

und dies ist die ganze Magnetkraft, da der inducirte Transversal-Magnetismus keine Wirkung ausübt. Befindet sich nun in der Axe der Röhre ein geradliniges Stück eines geschlossenen Drahtes, so wird in diesem eine elektromotorische Kraft E inducirt; ist w der Widerstand des Drahtes, μ die magnetische Permeabilität des Eisens, so ist die bei einem Inductionsstoss durchgehende Elektricitätsmenge

$$Q = \frac{1}{w}\int E dt = \frac{l}{w}\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \mu f dx,$$

also wenn α die dadurch erzeugte Geschwindigkeit der Galvanometernadel, α_1 die durch eine bekannte Elektricitätsmenge Q_1 hervorgebrachte Geschwindigkeit bezeichnet,

$$(2) \quad \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \mu f dx = \frac{wQ_1}{l\alpha_1}\alpha.$$

μ ist eine Function von f, für welche der Verfasser die Form annimmt

$$(3) \qquad \mu = \sum_0^\infty A_n f^n;$$

setzt man also

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \left(mx + \frac{m'}{x}\right)^{n+1} dx = B_{n+1},$$

so folgt

$$\sum_0^\infty A_n B_{n+1} J^{n+1} = \frac{wQ_1}{l\alpha_1}\alpha.$$

Die Beobachtung ergiebt nun α als Function von J in der Form

$$\alpha = \sum_0^\infty C_{n+1} J^{n+1},$$

mithin

$$(4) \qquad A_n = \frac{wQ_1}{l\alpha_1}\frac{C_{n+1}}{B_{n+1}},$$

und dadurch μ. Auf diese Weise hat der Verfasser für kleine Werte von J, wo α eine quadratische Function von J war, gefunden

$$\mu = 183{,}8 + 10{,}48 f.$$

Lbg.

O. Heaviside. On electromagnetic waves, especially in relation to the vorticity of the impressed forces; and the forced vibrations of electromagnetic systems. Phil. Mag. (5) XXV. 130-156, XXVI. 360-382, 488-500.

O. Heaviside. Note on a paper on electromagnetic waves. Phil. Mag. (5) XXV. 202-210.

H. W. Watson. Note on the electromotive force in moving conductors. Phil. Mag. (5) XXV. 271-273.

Bezeichnet E_x die x-Componente der durch Bewegung des Leiterpunktes inducirten elektromotorischen Kraft, F_x die Componente des Vectorpotentials, a_x die der magnetischen Induction in diesem Punkte, und bezieht sich das Zeichen $\frac{\partial}{dt}$ auf die Be-

wegung, so ist bekanntlich für einen geschlossenen Leiter s

$$(1)\qquad \int E_s ds = -\frac{\delta}{dt}\int F_s ds.$$

Für einen ungeschlossenen Leiter ist hierdurch E_x bis auf den Differentialquotienten einer willkürlichen Function nach x bestimmt; setzt man

$$\psi = F_x \frac{\delta x}{dt} + F_y \frac{\delta y}{dt} + F_z \frac{\delta z}{dt},$$

so ergiebt sich bekanntlich aus Gleichung (1)

$$\int E_s ds = \int \left[\left(a_y \frac{\delta z}{dt} - a_z \frac{\delta y}{dt}\right)\frac{dx}{ds} + \cdots\right] ds - \int \frac{d\psi}{ds} ds,$$

mithin, wenn man jene Function gleich ψ annimmt,

$$(2)\qquad E_x = a_y \frac{\delta z}{dt} - a_z \frac{\delta y}{dt} - \frac{d\psi}{dx} = -\frac{\delta F_x}{dt}$$
$$+(\beta F_z - \gamma F_y) = -\frac{\delta' F_x}{dt},$$

wo α, β, γ die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit bezeichnen, $\frac{\delta' F_x}{dt}$ die Aenderung von F_x, wenn der Leiterpunkt ruht und der Inducent entgegengesetzt bewegt wird; da nun bei einer Bewegung δ' des Inducenten die elektromotorische Kraft nach Maxwell ist

$$E'_x = -\frac{\delta' F_x}{dt},$$

so ist bei der obigen Annahme $E_x = E'_x$, d. h. die Induction hängt nur von der relativen Bewegung des Inducenten und des Leiterpunkts ab. (Nach dem Weber'schen Inductionsgesetz wird dieser Bedingung bekanntlich dadurch genügt, dass hier

$$E_x = a_y \frac{\delta z}{dt} - a_z \frac{\delta y}{dt}, \quad E'_x = -\frac{\delta' F_x}{dt} + \frac{d\psi}{dx}$$

ist, wo ψ wieder der obige Wert ist, bezogen auf eine gedachte, der des Inducenten entgegengesetzte Bewegung des Leiterpunktes. Vgl. Lorberg, Zur Theorie der elektromagnetischen Induction, Wiedemann Ann. XXXVI. D. Ref.) Nach der Annahme von Maxwell dagegen ist

$$E_x = a_y \frac{\delta z}{dt} - a_z \frac{\delta y}{dt},$$

mithin

$$\int E_s ds = -\frac{\delta'}{dt}\int F_s ds + \int \frac{d\psi}{ds} ds = -\frac{\delta}{dt}\int F_s ds + \int \frac{d\psi}{ds} ds = \frac{Z}{dt},$$

wo $Z = \int F_s ds$ ist, ausgedehnt über den ganzen Umfang der von dem Leiterstück s in der Zeit dt beschriebenen Fläche, d. h. gleich der Anzahl der durch diese Fläche gehenden Kraftlinien; während nach der anderen Annahme Z sich nur auf die zwei Stücke s des Umfangs bezieht. Nach Gleichung (2) genügt E, ebenso wie E', der Gleichung

$$\frac{dE_x}{dx} + \cdots = 0.$$

Lbg.

Th. H. Blakesley. On a method of determining the difference between the phase of two harmonic currents of electricity having the same period. Phil. Mag. (5) XXV. 295-296.

Sind J_1 und J_2 die Amplituden der zwei Ströme, ϑ ihr Phasenunterschied, und leitet man zuerst den einen, dann den anderen durch beide Rollen eines Dynamometers hinter einander, dann den einen durch die eine, den anderen durch die zweite, so sind die Ablenkungen in diesen drei Fällen $\alpha_1 = cJ_1^2$, $\alpha_2 = cJ_2^2$, $\alpha_3 = cJ_1J_2\cos\vartheta$, woraus $\cos^2\vartheta = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1\alpha_2}$.

Lbg.

Ch. V. Burton. On the electromotive forces of contact. Phil. Mag. (5) XXVI. 43-53.

Der Verfasser stellt folgende Ansicht über die Natur der Contactkraft auf. Die an der Berührungsfläche zweier Körper entstehende elektromotorische Kraft E treibt eine Elektricitätsmenge M durch die Contactstelle, bis eine Potentialdifferenz $-E$ entstanden ist; die dabei erzeugte elektrische potentielle Energie ist $\frac{1}{2}EM$, während die andere Hälfte der ganzen Arbeit EM der Molecularkraft E in Joule'sche Wärme verwandelt wird. Da

nun die verbrauchte moleculare Energie EM bei beliebig kleiner Berührungsfläche durch Vergrösserung der Capacität der beiden Körper beliebig gesteigert werden kann, so kann sie nur aus Wärmeenergie und chemischer Energie bestehen; dem entsprechend ist die elektromotorische Molecularkraft oder die schliessliche Potentialdifferenz $E = E_1 + E_2$; der Teil $E_1 M$ der verbrauchten Energie ist die absorbirte Peltier'sche Wärme, $E_2 M$ die verbrauchte chemische Energie. E_1 ist sehr klein; auch beim Contact zweier Metalle in der Luft besteht der Hauptteil der elektromotorischen Kraft aus den chemischen Kräften zwischen der Luft und den Metallen. Lbg.

H. Lorberg. Einige Bemerkungen zur Theorie der Thermoströme. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 661-672.

1) Bekanntlich hat W. Thomson durch Anwendung der zwei Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie auf einen Thermostrom folgende zwei Gleichungen abgeleitet. Es sei ein Kreis aus zwei Metallen a und b gegeben, deren Lötstellen die absoluten Temperaturen T_1 und $T_2 > T_1$ haben, und in welchem ein Thermostrom an der Lötstelle T_1 von b nach a geht; es bezeiche $\Pi(T)$ die an einer Contactstelle von der Temperatur T beim Uebergang der Elektricitätseinheit von a nach b erzeugte Peltier'sche Wärme, σ_a die „specifische Wärme der Elektricitätseinheit" in dem Metall a. Der erste Hauptsatz giebt dann die elektromotorische Kraft

$$(\mathrm{I}) \qquad E = \Pi(T_1) - \Pi(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_a - \sigma_b)\, dT$$

und der zweite

$$(\mathrm{II}) \qquad \sigma_a - \sigma_b = \frac{d\Pi}{dT} - \frac{\Pi}{T},$$

mittels welcher Beziehung die Gleichung (I) sich auch schreiben lässt

$$(\mathrm{I^a}) \qquad E = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi}{T}\, dT.$$

Dieselben Gleichungen hat Duhem aus seiner Theorie des thermo-

dynamischen Potentials abgeleitet (Ann. de l'Éc. Norm. (3) II, vgl. F. d. M. XVII. 1885. 1043); der Verfasser hat aus dieser Theorie eine weitere Folgerung gezogen, welche allerdings in einer ihm erst nachträglich bekannt gewordenen Abhandlung (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 1133) schon von Duhem selbst in anderer Weise abgeleitet worden war. Nach Duhem ist nämlich die Energie U eines mit einer Elektricitätsmenge e geladenen Leiters von der Entropie S, der gewöhnlichen Energie U_0 und der elektrostatischen Energie $W = \frac{1}{2}Ve$

$$\text{(a)}\qquad U = U_0 + W + e(\vartheta + h),$$

wo ϑ und h zwei dem Leiter eigentümliche und von seiner Gestalt und Grösse unabhängige Constanten sind, durch welche sich die Gleichgewichts-Potentialdifferenz zweier Leiter a und b sowie die Grösse Π mittels der Gleichungen bestimmen

$$\text{(1)}\qquad \chi = V_a - V_b = \vartheta_b - \vartheta_a, \qquad \Pi = h_a - h_b;$$

ferner setzt er die Entropie-Aenderung, wenn die Elektricitätseinheit von einem Punkte von der Temperatur T zu einem Punkte von der Temperatur $T + dT$ übergeht,

$$dS = \frac{\sigma}{T}\,dT.$$

Da nun dies eine umkehrbare Zustandsänderung ist, so schliesst der Verfasser, dass

$$TdS = \frac{dU}{dT}\,dT, \quad \text{d. h.} \quad T\frac{dS}{dT} = \sigma = \frac{d(\vartheta + h)}{dT}$$

sein muss, mithin nach Gleichung (1)

$$\text{(2)}\qquad \sigma_a - \sigma_b = \frac{d(\Pi - \chi)}{dT},$$

wodurch aus (II) und (I^a) folgt

$$(\text{II}^a)\qquad \Pi = T\frac{d\chi}{dT},$$

$$(\text{I}_b)\qquad E = \chi(T_1) - \chi(T_2).$$

2) Der Verfasser vergleicht mit diesen Resultaten die Entwickelungen von Lorentz (Arch. Néerl. XX. 1885). Lorentz setzt die Energie eines mit einer Elektricitätsmenge e geladenen Metalls

$$\text{(b)}\qquad U = U_0 + W + eU',$$

mithin die Thomson'sche specifische Wärme der Elektricitätseinheit

$$\text{(c)} \qquad \sigma = \frac{dU'}{dT},$$

was mit Duhem übereinstimmt, wenn man $U' = \vartheta + k$ annimmt. Setzt man

$$\text{(d)} \qquad q = U'_a - U'_b,$$

so leitet Lorentz die Gleichung ab

$$\text{(3)} \qquad q = \Pi - \chi,$$

welche mit dem angegebenen Wert von U' auch aus den Duhem'schen Gleichungen (1) folgt, und woraus sich die Gleichung (2) ergiebt. Schliesslich leitet er, und zwar ohne Benutzung des zweiten Hauptsatzes, die Gleichung ab

$$\text{(4)} \qquad q = T\frac{d\chi}{dT} - \chi,$$

woraus auch die Gleichung (II^a) ohne Benutzung des zweiten Hauptsatzes folgt; indem er ferner bloss an den Contactstellen eine elektromotorische Kraft annimmt, stellt er direct die Gleichung (I^b) auf, welche vermöge der angegebenen Gleichungen auch mit (I) und (I^a) identisch ist. Zur Ableitung der Gleichung (3) denkt sich Lorentz zwei Metallkörper (Uebertrager) G_a und G_b durch zwei Drähte aus denselben Metallen a und b verbunden und durch Aenderung der Capacitäten von G_a und G_b Elektricität durch den Contactpunkt der Drähte hindurchgetrieben; Budde (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 1144) hat aber darauf aufmerksam gemacht, dass hierbei teils die Werte von U' für die Oberfläche, teils für das Innere ins Spiel kommen; demgemäss unterscheidet der Verfasser die Werte von q der Gleichung (d) für das Innere und die Oberfläche, q_i und q_w, wodurch sich statt Gleichung (3) ergiebt

$$(3^a) \qquad q_i = \Pi - \chi.$$

Zur Ableitung der Gleichung (4) benutzt Lorentz einen Kreisprocess, bei welchem zuerst die Uebertrager G_a und G_b mit zwei dem ersten Contactpunkt von der Temperatur T benachbarten Punkten verbunden werden und Elektricität von G_b auf G_a durch den Contactpunkt getrieben wird; dann werden G_a und G_b ab-

getrennt und auf $T+dT$ erwärmt, und darauf dieselbe Elektricitätsmenge von G_a auf G_b durch den zweiten Contactpunkt von der Temperatur $T+dT$ getrieben; mittels der erwähnten Modification erhält man daraus an Stelle der Gleichung (4)

$$(4^a) \qquad q_w = T\frac{d\chi}{dT} - \chi.$$

Aus den Gleichungen (I), (3^a) und

$$(e) \qquad \sigma_a - \sigma_b = \frac{dq_i}{dT}$$

folgt dann wieder die Gleichung (I^b); und aus (3^a) und (4^a)

$$(5) \qquad q_i - q_w = \Pi - T\frac{d\chi}{dT}.$$

Nimmt man auch den zweiten Hauptsatz, d. h. die Gleichung (II), als gültig an, was der Verfasser für gerechtfertigt hält, so folgt aus (5) und (3^a)

$$q_w = q_i.$$

Lbg.

H. A. Lorentz. Zur Theorie der Thermoelektricität. Wiedemann Ann. (2) XXXVI. 593-624. (1889.)

In dieser Abhandlung berücksichtigt der Verfasser ebenfalls den obigen Einwurf von Budde (vergl. den vorigen Bericht); er setzt

$$U'_w - U'_i = k, \quad \text{also} \quad q_w - q_i = k_a - k_b$$

und nimmt ausserdem noch zwischen zwei Teilen desselben Metalls von den Temperaturen T und $T+dT$ eine Potentialdifferenz ψdT an; dadurch erhält er

$$\sigma = \frac{dU'_i}{dT} + \psi, \quad \text{also} \quad (1) \quad \sigma_a - \sigma_b = \frac{dq_i}{dT} + \psi_a - \psi_b$$

statt der Gleichung (e) des vorigen Berichts. Diese Gleichung und die vorigen (I), (3^a), (4^a) geben dann

$$(2) \qquad E = \chi(T_1) - \chi(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} (\psi_a - \psi_b)\, dT,$$

$$(3) \qquad k_a - k_b = T\frac{d\chi}{dT} - \Pi,$$

$$(4) \qquad \sigma_a - \sigma_b = \frac{d\Pi}{dT} - \frac{\Pi}{T} + \psi_a - \psi_b - \frac{k_a - k_b}{T}.$$

Ist also der zweite Hauptsatz anwendbar, so muss

$$T(\psi_a - \psi_b) = k_a - k_b$$

sein. Lbg.

M. Planck. Zur Theorie der Thermoelektricität in metallischen Leitern. Wiedemann Ann. (2) XXXVI. 624-643. (1889.)

1) Es wird angenommen, dass, wenn sich zwei Metalle a und b mit reinen Oberflächen berühren, eine Potentialdifferenz $e_{ab} = V_b - V_a$ entsteht. Geht eine Elektricitätsmenge ε von a nach b, so wächst die elektrostatische Energie um εe_{ab}, es muss also an der Berührungsfläche ein gleicher Betrag einer anderen Energie verschwinden. Wäre dies nur die absorbirte Peltier'sche Wärme $-\varepsilon\pi_{ab}$, so wäre $e_{ab} = -\pi_{ab}$; dass die Beobachtung diese Gleichung nicht bestätigt, ist kein vollgültiger Beweis gegen ihre Richtigkeit, da die beobachtete Potentialdifferenz von der der reinen Metalle e_{ab} verschieden ist. Es müsste dann aber $e_{ab} = 0$ sein bei derjenigen Temperatur t_1, bei welcher $\pi_{ab} = 0$ ist (z. B. 284° bei Eisen); denken wir uns nun die zwei Metalle bei 0° in Berührung gebracht, so entsteht elektrostatische Energie, es wird also Wärme absorbirt; erwärmen wir sie dann auf t_1, so würde diese elektrostatische Energie verschwinden, also dieselbe Wärme wiedererzeugt werden; trennen wir sie darauf, was ohne Arbeitsleistung geschehen würde, und kühlen sie auf 0° ab, so hätten wir einen Kreisprocess, bei welchem ohne Arbeitsleistung Wärme von 0° in Wärme von t_1^0 verwandelt wäre, was dem zweiten Hauptsatz widerspricht. Es muss also der Elektricitätsmenge ε in einem Metall a noch eine andere Energiemenge εu_a zukommen, welche der Verfasser elektromoleculare Energie nennt; und da die ganze an der Berührungsfläche erzeugte Energie gleich Null sein muss, so muss die Gleichung stattfinden

$$(1) \qquad e_{ab} + \pi_{ab} + u_b - u_a = 0.$$

Ferner wird angenommen, dass in einem Thermostrom, welcher an der Contactstelle 1 von b nach a geht, die treibende Kraft nur in den elektrostatischen Kräften besteht; ist also w_a der

Widerstand der Längeneinheit von a, W der Gesamtwiderstand des Kreises, und wird die Richtung von ds im Sinne des Stromes i genommen, so ist

$$iw_a = -\frac{dV}{ds},$$

$$(2)\quad E = iW = -\int \frac{dV}{ds}\,ds = V_{a1} - V_{a2} + V_{b2} - V_{b1}$$
$$= (e_{ab})_2 - (e_{ab})_1 = \chi(T_1) - \chi(T_2),$$

wenn man $\chi(T) = -e_{ab}$ setzt. Indem die Elektricitätsmenge i ein Element ds von a durchläuft, wächst die Energie um

$$i\frac{dV}{ds}\,ds + i\frac{du_a}{ds}\,ds = -i^2 w_a\,ds + i\frac{du_a}{dT}\,dT,$$

es wird also hier eine gleiche Wärmemenge verbraucht; die beim Uebergang der Elektricitätseinheit von T zu $T+dT$ verbrauchte Thomson'sche Wärme ist also gleich $\sigma_a dT$, wo

$$(3)\qquad \sigma_a = \frac{du_a}{dT}.$$

Die im ganzen Kreise durch die durchgehende Elektricitätseinheit erzeugte Wärme besteht also aus der Joule'schen Wärme E, der Peltier'schen Wärme $(\pi_{ab})_2 - (\pi_{ab})_1 = \Pi(T_2) - \Pi(T_1)$, und der Thomson'schen Wärme

$$-\int_{T_1}^{T_2} (\sigma_a - \sigma_b)\,dT = (u_a - u_b)_1 - (u_a - u_b)_2,$$

deren Summe nach Gleichung (1) gleich Null ist, wie es nach dem ersten Hauptsatz sein muss; statt Gleichung (2) kann man daher auch schreiben

$$(2^a)\qquad E = \Pi(T_1) - \Pi(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_a - \sigma_b)\,dT.$$

2) Weiter benutzt der Verfasser den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, aber wie Boltzmann (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 1141) in seiner allgemeinen Form, in welcher der Verfasser ihn das „Princip der Vermehrung der Entropie" genannt hat, wonach bei jeder Zustandsänderung die Gesamtentropie aller bei der Zustandsänderung beteiligten Körper (Entropie der Natur) entweder ungeändert bleibt oder wächst, je nachdem

die Zustandsänderung umkehrbar ist oder nicht; er nimmt aber abweichend von Boltzmann an, dass Wärmeleitung und Elektricitätsleitung unabhängig neben einander hergehen, also das Princip auf jeden der beiden Vorgänge für sich angewandt werden darf. Da nun in einem stationären Thermostrom, wo durch Ab- und Zuführen von Wärme die Temperatur eines jeden Leiterelements constant erhalten wird, auch die Entropie eines jeden Leiterelements constant bleibt, so besteht die einzige Veränderung in der Wärme-Aufnahme und -Abgabe des umgebenden Mediums; der Entropiezuwachs desselben bei einer Wärmeaufnahme dQ ist $\frac{dQ}{T}$, folglich der ganze Entropiezuwachs des Mediums, wenn das Σ sich auf die einzelnen Leiter und Lötstellen bezieht,

$$\Sigma\int_1^2 \frac{i^2 w_a}{T}\,ds - i\Sigma\int_1^2 \frac{du_a}{dT}\frac{dT}{T} + i\Sigma\frac{\pi_{ab}}{T} \geqq 0.$$

Diese Gleichung muss aber auch gelten, wenn man (z. B. durch einen Magneten) bei denselben Temperaturen dem i einen ganz beliebigen Wert giebt, also auch wenn man den Strom umkehrt, wobei die Vorzeichen der zwei letzten Glieder sich umkehren, während das erste beliebig klein gemacht werden kann; daher muss die Summe der zwei letzten Glieder gleich Null sein, d. h.

$$(4)\qquad -\Sigma\int_1^2 \frac{du_a}{dT}\frac{dT}{T} + \Sigma\frac{\pi_{ab}}{T} = 0.$$

Aus dieser Gleichung, auf einen Kreis aus zwei Metallen angewandt, ergiebt sich π_{ab} und dann nach Gleichung (1) auch e_{ab} in der Form

$$\pi_{ab} = \pi_b - \pi_a, \qquad e_{ab} = e_b - e_a,$$

wo

$$\pi_a = -T\frac{de_a}{dT}, \quad u_a = -e_a + T\frac{de_a}{dT}, \quad \sigma_a = \frac{du_a}{dT} = T\frac{d^2 e_a}{dT^2}.$$

(Die Gleichungen (1), (2), (2^a), (3), (4) sind identisch mit den Lorentz-Duhem'schen Gleichungen (3^a), (I^b), (I), (c), (II) des obigen Referats über die Abhandlung von Lorberg; die Gleichung (4) drückt den zweiten Hauptsatz in seiner für einen umkehrbaren

Kreisprocess geltenden Form aus, in welcher er dort angewandt wurde. D. Ref.) Lbg.

J. Parker. On thermoelectric phenomena. Phil. Mag. (5) XXVI. 353-360.

Durch eine ganz ähnliche Betrachtungsweise kommt der Verfasser zu denselben Gleichungen wie Lorentz in der oben besprochenen Abhandlung, nur mit dem Unterschied, dass er die dortige Grösse $k = U'_w - U'_i = 0$ setzt, und dass er durch einen Kreisprocess die dortige Grösse $\psi = \varkappa T$ findet, wo $\varkappa$ eine Constante ist. Lbg.

F. Himstedt. Ueber eine neue Bestimmung der Grösse v. Wiedemann Ann. (2) XXXIII. 1-12.

Nach der Maxwell'schen Methode durch Ladung eines in dem einen Zweig einer Wheatstone'schen Brücke befindlichen Condensators. Lbg.

E. Lecher. Ueber elektromotorische Gegenkräfte in galvanischen Lichterscheinungen. Wiedemann Ann. (2) XXXIII. 609-639.

Durch eine Reihe von Versuchen, welche sich ohne Figuren nicht klar beschreiben lassen, kommt der Verfasser zu folgenden Resultaten: „Die elektromotorische Gegenkraft des elektrischen Funkens ist unwahrscheinlich; sämtliche Beweise Edlund's für dieselbe sind unrichtig. Die von Edlund behauptete elektromotorische Gegenkraft des galvanischen Lichtbogens ist noch nicht direct durch einen Rückstrom nachgewiesen. Bei einer negativen Elektrode von Eisen oder Platin ist die Entladung discontinuirlich.“ Lbg.

F. Himstedt. Ueber die Bestimmung der Capacität eines Schutzring-Condensators in absolutem elektromagnetischem Mass. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 126-136.

Der Verfasser hat die Bestimmung von v nach derselben Methode, wie in der obigen Abhandlung, auch mittels eines

Schutzring-Condensators ausgeführt; die Capacität desselben, nach der Maxwell'schen Formel berechnet, ergab eine bessere Uebereinstimmung der Beobachtungen als die Kirchhoff'sche Formel.

Lbg.

A. Gockel. Bemerkung zu einem Aufsatz des Herrn Duhem, die Peltier'sche Wirkung in einer galvanischen Kette betreffend. Wiedemann Ann. (2) XXXIII. 710-712.

Der Verfasser berichtigt ein Missverständnis Duhem's bei der Kritik einer früheren Abhandlung, auf welches schon in dem betreffenden Referat (F. d. M. XIX. 1887. 1134) aufmerksam gemacht worden ist. Lbg.

E. Cohn und L. Arons. Messung der Dielektricitätsconstante leitender Flüssigkeiten. Wiedemann Ann. (2) XXXIII. 13-31.

Die Methode, nach welcher die Verfasser die Dielektricitätsconstante leitender Flüssigkeiten in einer früheren Arbeit (Wied. Ann. XXVIII. 1886) beobachtet haben, ist für besser leitende Flüssigkeiten wegen der Notwendigkeit, Zeitintervalle von weniger als 1 Milliontel Secunde zu messen, nicht verwendbar; für solche wenden die Verfasser in vorliegender Arbeit nach Silow folgende Methode an. Ein Elektrometer F befindet sich in der Flüssigkeit; die Nadel und das eine Quadrantenpaar sind mit dem einen Pol eines Inductors verbunden, dessen anderer Pol sowie das zweite Quadrantenpaar zur Erde abgeleitet ist; daneben ist ein zweites Elektrometer M in Luft geschaltet, welches zugleich mit F beobachtet wird. Sind F_0 und M_0 die Ablenkungen von F und M, wenn F Luft enthält, F_f und M_f dasselbe, wenn F sich in der Flüssigkeit befindet, V_0 und V das Mittel des Potentials des ersten Quadrantenpaares während einer Periode des Stroms bei der ersten, resp. zweiten Beobachtung, so ist

$$F_0 = aV_0^2, \quad M_0 = bV_0^2, \quad F_f = a\mu V^2, \quad M_f = bV^2,$$

woraus die Dielektricitätsconstante

$$\mu = \frac{F_f}{M_f}\frac{M_0}{F_0}.$$

Es ergab sich z. B. für Petroleum, Aethylalkohol und destillirtes Wasser resp. $\mu = 2$, $\mu = 26$ und $\mu = 75$. Lbg.

L. SOHNCKE. Beiträge zur Theorie der Luftelektricität. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 925-943.

Bekanntlich hat Exner die Luftelektricität teils durch ein negatives Potential der Erde, teils durch die von Wasserdampf mitgeführte negative Elektricität erklärt. (Vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 1036.) Nach Versuchen von Sohncke findet nun eine solche Mitführung der Elektricität durch Dampf nicht statt, sondern die Exner'schen Beobachtungen erklären sich durch die niedersinkenden kalten Luftströme. Lbg.

L. SOHNCKE. Beiträge zur Theorie der Luftelektricität. Münch. Ber. 21-70.

Der erste Teil der Abhandlung, welcher sich mit einer experimentellen Widerlegung der Exner'schen Theorie der Luftelektricität beschäftigt, ist mit der vorstehend besprochenen identisch. Im zweiten Teil giebt der Verfasser eine Theorie der Luftelektricität auf Grund der aus früher von ihm angestellten Beobachtungen hervorgehenden Thatsache, dass sich Eis bei Reibung an Wasser positiv ladet. Da die unterhalb der Isothermfläche 0 liegenden Luftschichten vorwiegend Wasser, die oberen vorwiegend Eiskrystalle enthalten, so werden erstere früher in die unteren Luftschichten kommen und diese negativ elektrisiren, während die oberen positiv geladen bleiben, sodass man die Isothermfläche 0 als positiv geladen ansehen kann; dadurch erklärt der Verfasser die Thatsache, dass das Potential der Erde negativ ist und nach oben wächst Der Hauptteil der Abhandlung beschäftigt sich damit, die periodischen Aenderungen des Potentialgefälles durch Senkung oder Hebung einzelner Teile der Isothermfläche 0 zu erklären, welche, wenn sie überall der Erdoberfläche concentrisch wäre und sich nur concentrisch ausdehnte oder zusammenzöge, wie dies Exner in seiner Kritik annimmt, allerdings keinen Einfluss auf das Potentialgefälle haben

würde. Der Verfasser betrachtet zunächst den einfachsten Fall, wo eine punktförmige Elektricitätsmenge e sich von der als eine concentrische Kugelfläche betrachteten Isothermfläche 0 aus der Höhe H über dem Erdboden in eine Höhe h herabsenkt; auf diesem Radius ist dann am Boden das Potentialgefälle

$$\frac{dV}{dx} = -4\pi(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3),$$

wo η_1 die ursprüngliche Dichtigkeit in dem betrachteten Punkt ist, η_2 und η_3 die Dichtigkeiten, welche durch die im oberen, resp. unteren Punkt befindliche Elektricitätsmenge $-e$ und $+e$ auf der Erdkugel inducirt wird; daraus ergiebt sich dann weiter das Potentialgefälle, wenn die auf einem kalottenförmigen Stück der Isothermfläche 0 befindliche Elektricitätsmenge auf die entsprechende Kalotte in der Höhe h heruntersinkt. Es ergiebt sich, dass dabei das Potentialgefälle immer wächst, z. B. um 25 pCt. bei Senkung einer Kalotte vom Winkel 2' von 4000 auf 2000 Meter; je grösser der Winkel der Kalotte, desto kleiner ist der Zuwachs. Lbg.

J. Fröhlich. Allgemeine Theorie des Elektrodynamometers. Ein Beitrag zur Anwendung und Integration der Differentialgleichungen der elektrischen Induction. Berlin. Friedländer. 168 S.

Vergl. oben S. 1163.

L. Sohncke. Entstehung des Stroms in der galvanischen Kette. Münch. Ber. 371-384.

Der Verfasser legt die beiden Clausius'schen Hypothesen zu Grunde, nämlich: 1) die Jonen eines Elektrolyten laden sich bei der Verbindung entgegengesetzt; 2) sie sind teilweise dissociirt; solange kein Strom durchgeht, geschehen ebenso viele Wiedervereinigungen wie neue Trennungen; dabei behalten die Jonen ihre Ladungen und geben sie nur an die Elektroden ab.

Befindet sich nun z. B. eine Zinkplatte und eine Platinplatte in H_2SO_4, so gehen in Folge der chemischen Anziehung mehr negative Jonen in der Richtung zum Zink als zum Platin und

machen hier negative Elektricität frei, während an der andern Platte positive Elektricität frei wird; sind die Platten durch einen Draht verbunden, so dauert dieser Vorgang an, während er im entgegengesetzten Falle bald zum Stillstand kommt; aber auch bei Verbindung der Platten bewirkt die Ansammlung der Jonen an einer oder beiden Elektroden eine Wanderung der Jonen in entgegengesetzter Richtung, den Polarisationsstrom. Die Quelle der Stromenergie ist hiernach die potentielle elektrische Energie der dissociirten Jonen, also die bei der Dissociation teils gegen die chemische, teils gegen die elektrische Anziehung verbrauchte Arbeit oder Wärme; von dieser Wärme wird an der Zinkplatte nur der der chemischen Anziehung entsprechende Teil wiedererzeugt, weil das negative Jon seine Ladung an das Zink abgegeben hat; der Rest wird als elektrische Arbeit in den Schliessungsbogen übergeführt und tritt hier als Wärme auf.

Lbg.

H. Hertz. Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen Wirkungen. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 551-570.

Ein primärer Leiter besteht aus zwei quadratischen Metallplatten, verbunden durch einen Draht mit Funkenstrecke, durch welche die Entladungen eines Inductoriums hindurchgehen; gegenüber der einen dieser Platten befindet sich eine ebensolche Platte, von welcher aus ein 8 Meter langer, frei in der Luft endigender Draht α ausgespannt ist. In ihm entstehen durch Reflexion stehende Schwingungen, deren Wellenlänge λ der Verfasser bestimmt als die doppelte Entfernung je zweier Knotenpunkte, d. h. solcher Punkte, denen gegenüber die Funken in der Funkenstrecke eines secundären Leiters (eines kleinen rechteckigen oder kreisförmigen Drahtes) verschwinden, wenn dieser eine solche Lage hat, dass die direct vom primären Leiter aus durch die Luft fortgepflanzte elektrische Kraft nicht auf ihn wirkt; aus der so bestimmten Wellenlänge $\frac{\lambda}{2} = 2{,}8^m$ und aus der bekannten Schwingungsdauer von $1{,}4 . 10^{-7}$ Sec. ergab sich die Fortpflanzungsgeschwin-

digkeit im Draht = 2.10[5] Km/Sec. Darauf wurde der Draht α in grosser Entfernung in die Erde geführt, sodass keine Reflexion stattfand, also fortschreitende Schwingungen entstanden, und der secundäre Leiter in eine solche Lage gebracht, dass in ihm die vom primären Leiter aus durch die Luft fortgepflanzte mit der von α ausgehenden elektrischen Kraft interferirte; findet gegenüber einem bestimmten Punkt von α eine derartige Interferenz statt, dass sich die Wirkungen einander verstärken, so müssten sie sich in einem um $\frac{\lambda}{2}$ entfernten Punkte schwächen, wenn sich die Kraft durch die Luft momentan fortpflanzte. Nun ergab sich aber diese Entfernung = $7{,}5^m$; in derselben Zeit also, in welcher die elektrische Kraft in der Luft um $7{,}5^m$ fortschreitet, schreitet sie im Draht nur um $7{,}5-2{,}8 = 4{,}7^m$ fort; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Luftwellen verhält sich also zu der der Drahtwellen wie 7,5 : 4,7, ist mithin 3,2.10[5] Km/Sec.

Lbg.

H. Hertz. Ueber elektrodynamische Wellen im Luftraum und deren Reflexion. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 609-623.

Bei den vorliegenden Versuchen wurden nur Wellen in der Luft beobachtet, und zwar stehende Wellen, welche durch Reflexion an einer mit Zinkblech bedeckten Wand erzeugt wurden; der primäre Leiter (vgl. das vorige Referat) stand vertical, und der Mittelpunkt des kreisförmigen secundären Leiters lag in dem Lot L aus dem Mittelpunkt des primären Leiters auf die Wand, sodass die elektrische Kraft in demselben nahezu vertical war. Steht der secundäre Leiter senkrecht auf L, so ist der Funke im Maximum, wenn die Funkenstrecke in der Horizontalebene von L liegt, weil er hauptsächlich durch die Induction an dem der Funkenstrecke gegenüberliegenden Teil des Kreises zu Stande kommt; er verschwindet dann in den Knotenpunkten, von denen der erste etwas hinter der Wand liegt, weil dieselbe nicht vollkommen leitend ist. Liegt der secundäre Leiter in der Verticalebene von L, so ist aus dem angegebenen Grunde der Funke stärker, wenn die Funkenstrecke einem Schwingungs-

bauch abgewandt, als wenn sie ihm zugewandt ist; liegt der secundäre Leiter in einem Schwingungsbauch selbst, so ist der Funke in beiden Lagen gleich stark und verschwindet, wenn die Funkenstrecke im höchsten oder tiefsten Punkt des Kreises liegt. Auf diese Weise konnten die Knotenpunkte und Bäuche bestimmt werden; die halbe Wellenlänge ergab sich = 4,8^m^, während die früheren Beobachtungen sie zu $\frac{7,5}{4,7} \cdot 2,8 = 2,5^{\text{m}}$ ergeben hatten. Lbg.

G. Quincke. Elektrische Untersuchungen. Ueber die magnetischen Eigenschaften der Gase. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 401-446.

In einem Glasgefäss befindet sich über einer diamagnetischen Flüssigkeit, z. B. Petroleum, das Gas, dessen Druck p durch ein Manometer gemessen wird; in den oberen und unteren Teil des Gefässes mündet eine zweimal rechtwinklig gebogene Glasröhre, und das Flüssigkeits-Niveau im verticalen Teil derselben befindet sich zwischen den verticalen Polflächen. Sind K und K_1 die Diamagnetisirungs-Constanten (magnetischen Permeabilitäten) des Gases und der Flüssigkeit, h die Senkung des Niveaus bei Erregung des Magnetfeldes von H_0 auf H, $H_1^2 - H_0^2 = H^2$, σ das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist

$$h\sigma = \frac{K_1 - K}{8\pi} H^2, \quad \frac{K}{8\pi} = C_0 + Cp,$$

also

$$h\sigma = \left(\frac{K_1}{8\pi} - C_0 - Cp\right) H^2$$

und beim Druck 0

$$h_0\sigma = \left(\frac{K_1}{8\pi} - C_0\right) H^2,$$

woraus sich C und die nur von der Flüssigkeit abhängige Constante $\frac{K_1}{8\pi} - C_0$ berechnen lassen. Lbg.

H. Jahn. Ueber die an der Grenzfläche heterogener Leiter auftretenden localen Wärmeerscheinungen. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 755-785.

Zur Prüfung der Thomson'schen Gleichung

$$\Pi = -T\frac{dE}{dT}$$

für die Berührungsstelle zweier Metalle befand sich ein Teil d zusammengelöteten Drähte in einem Eiscalorimeter; sind und W_2 die darin in 1 Sec. erzeugten Wärmemengen, wenn Strom J_1 in der einen, nachher J_2 in der anderen Richtung b durchgeht, so ist $W_1 = \alpha w J_1^2 + \Pi J_1$, $W_2 = \alpha w J_2^2 - \Pi J_2$, wora sich Π ergiebt. $\frac{dE}{dT}$ wurde bestimmt als die einer Temperat differenz von 1° entsprechende thermoelektromotorische Kra Zwischen zwei Metallen fand sich die obige Gleichung bestäti nicht aber zwischen einem Metall und einer Flüssigkeit, was d Verfasser dadurch erklärt, dass hier noch durch Ueberführu des Metalls in den flüssigen Zustand oder umgekehrt eine A sorption oder Erzeugung von Wärme stattfindet. Lbg.

E. Dorn. Zur Bewegung eines Magnets innerhalb eine dämpfenden Multiplicators. Wiedemann Ann. (2) XXX 189-200, 270-290.

Der Verfasser untersucht den Einfluss der durch den Stro und den Erdmagnetismus erzeugten Quermagnetisirung, sow den Einfluss der im Magneten inducirten Ströme. Lbg.

L. Arons. Ueber den elektrischen Rückstand. Wiedeman Ann. (2) XXXV. 291-311.

Die zwei Condensatorplatten befanden sich vollständig i geschmolzenem und erstarrten Paraffin; der Condensator wurd zuerst geladen, dann während $\frac{1}{20}$ Sec. entladen und darauf m dem Elektrometer verbunden; ein Rückstand zeigte sich nich übereinstimmend mit der Maxwell'schen Theorie für einen homo genen Körper. Da sich das Paraffin als ein vollkommene Isolator herausstellte, so durfte sich nach derselben Theorie auc kein Rückstand zeigen, wenn sich zwischen der einen Conden-

satorplatte und dem Paraffin eine Luftschicht befand, was ebenfalls der Versuch bestätigte. Das entgegengesetzte Resultat von Dieterici (Wied. Ann. XXV) erklärt der Verfasser durch Spuren von Oel im Paraffin. Lbg.

FR. STENGER. Ueber die Gesetze des Krystallmagnetismus. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 331-353.

Ist v das Volumen einer an einem Faden aufgehängten Krystallkugel, F die Stärke des horizontalen homogenen Magnetfeldes, sind ferner ϑ und ψ die Winkel der Krystallaxe mit der Verticalen und der Verticalebene durch die Krystallaxe mit den Kraftlinien, k_1 und k_2 die Magnetisirungsconstanten nach der Krystallaxe und senkrecht zu ihr, so ist nach W. Thomson das Drehungsmoment

$$D = \tfrac{1}{2} v F^2 (k_2 - k_1) \sin^2\vartheta \sin 2\psi.$$

Der Verfasser hat — im Gegensatz zu seinen früheren Resultaten — diese Formel jetzt durch Ablenkungs- und Schwingungsbeobachtungen bestätigt; für die angewandten Kräfte ergab sich $k_2 - k_1$ constant. Lbg.

H. E. J. G. DU BOIS. Susceptibilität und Verdet'sche Constante von Flüssigkeiten. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 137-167.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass die Quincke'sche Formel für die Steighöhe einer Flüssigkeit im Magnetfelde, wonach dieselbe dem Quadrat der Feldstärke proportional ist, nur unter der Voraussetzung gilt, dass die magnetische Susceptibilität $\varkappa$ der Substanz in der Gleichung $m = \varkappa\alpha$ (m das magnetische Moment der Volumeneinheit, α die magnetisirende Gesamtkraft) von der Kraft unabhängig ist, und er giebt zunächst eine von dieser Voraussetzung unabhängige Ableitung der Steighöhe. Der enge Schenkel des Steigrohrs befinde sich zwischen den verticalen Polflächen, zwischen denen die horizontale Magnetkraft H als in verticaler Richtung veränderlich vorausgesetzt wird; der weitere Schenkel befinde sich ausserhalb

des Magnetfeldes; im Querschnitt $z = 0$ des engen Schenk sei $H = 0$, die Höhen der Flüssigkeit bei nicht erregtem Ma- $(H = H_1)$ und bei erregtem Magnet $(H = H_2)$ seien z_1 und z_2. magnetische Energie der Volumeneinheit eines Flüssigkeitssch chens in der Höhe z ist $E = -mH$, wenn m das magneti Moment der Volumeneinheit; also die verticale magnetische Ki auf die Volumeneinheit $Z = -\frac{dE}{dz} = m\frac{dH}{dz}$. Ist also δ die Di tigkeit der Flüssigkeit, p der Druck, so ist

$$-\frac{dp}{dz} = g\delta - Z,$$

also bei nicht erregtem, resp. bei erregtem Magnet

$$p_0 - p_1 = g\delta z_1 - \int_0^{z_1} m\frac{dH}{dz}dz, \quad p_0 - p_2 = g\delta z_2 - \int_0^{z_2} m\frac{dH}{dz}dz,$$

mithin, da der Capillardruck an der Oberfläche $p_1 = p_2$ ist,

$$(1) \quad g\delta(z_2 - z_1) = \int_{z_1}^{z_2} m\frac{dH}{dz}dz = \int_{H_1}^{H_2} m\,dH.$$

Ist $\varkappa$ in der Gleichung $m = \varkappa\alpha$ constant, und nimmt man $\alpha =$ an, so erhält man die Quincke'sche Formel

$$g\delta(z_2 - z_1) = \frac{\varkappa}{2}(H_2^2 - H_1^2).$$

Durch Beobachtung der Steighöhen fand der Verfasser für g löste magnetische und diamagnetische Salze, Flüssigkeiten u Gase $\varkappa$ bis zu den grössten angewandten Feldstärken consta Da ferner nach seinen früheren Beobachtungen die magnetisc Drehung der Polarisationsebene selbst bei den stark magneti baren Körpern dem magnetischen Moment proportional war, s ist dasselbe auch bei Flüssigkeiten zu erwarten; da nun hi $\varkappa$ constant ist, so muss die Drehung proportional der Feldstärk also die Verdet'sche Constante von der Feldstärke unabhän sein, was in der That die Versuche bestätigten. Lbg.

C. LA ROCHE. Untersuchungen über die Magnetisirun elliptischer und rechtwinkliger Platten von weiche Eisen. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 168-188.

Die Platte befand sich im Innern einer ellipsoidischen Spirale, deren Windungen auf der grössten Axe senkrecht standen; ihre Längsrichtung fiel in diese Axe; die äussere magnetisirende Kraft X ist hier in allen Punkten constant und proportional der Stromstärke i. Das Moment M der Platte wurde durch die Ablenkung eines Galvanometers bestimmt, indem die Wirkung der Spirale selbst compensirt wurde. Die Grösse $G = \frac{M}{cX} = \frac{m}{X}$ wuchs bis zu einem Maximum und nahm dann wieder ab; betrachtet man die elliptische Platte als ein Ellipsoid, und ist X_1 die magnetisirende Gesamtkraft, $k = \frac{m}{X_1}$ die magnetische Susceptibilität, so ist bekanntlich $G = \frac{k}{1+Pk}$, wo Px die Anziehung des homogenen Ellipsoids auf einen innern Punkt; hiernach ist $k = \frac{G}{1-PG}$, also das Maximum von $G < \frac{1}{P}$; den Umstand, dass bei einigen Platten diese Bedingung nicht erfüllt war, erklärt der Verfasser daraus, dass dieselben nicht genau als Ellipsoide betrachtet werden konnten. Lbg.

A. Hartwich. Ein Quadrantenelektrometer mit constanter Empfindlichkeit. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 772-791.

Um die Ablenkung von den Schwankungen des Nadelpotentials unabhängig zu machen, hängt der Verfasser die Nadel bifilar auf; ist dann W die elektrische Energie des Systemes, G das Gewicht der Nadel, so ist die Ablenkung φ bestimmt durch die Gleichung

$$\sin\varphi = -c\,\frac{\frac{dW}{d\varphi}}{G+\frac{dW}{dz}}.$$

Die Berechnung von $\frac{dW}{d\varphi}$ (wofür er den Maxwell'schen Ausdruck erhält) und $\frac{dW}{dz}$ zeigt, dass für kleine Quadranten-Potentiale und

ein grosses Nadel-Potential φ von den Schwankungen des letzten unabhängig wird, wenn die verticale, nach unten gericht auf die Nadel wirkende elektrische Kraft gleich ihrem Gewi ist, zu welchem Zweck die Nadel etwas näher den unteren Qu dranten liegen muss; der dazu nötige Wert des Nadelpotenti lässt sich experimentell dadurch finden, dass er φ zum Maxim macht. Lbg.

GOUY. Sur l'électromètre à quadrants. Almeida J. (2) V 97-109.

„Bei einem gut gebauten Instrumente bedarf man nur d Kenntnis zweier Coefficienten γ und λ zur Berechnung der W kungen des Apparates. Der erste wird durch die gewöhnli Theorie gegeben; der zweite, welcher bei der symmetrisch Ladung eine wesentliche Rolle spielt, scheint dagegen sehr schw berechenbar; man kann jedoch beide leicht durch den Versu bestimmen." Lp.

C. L. WEBER. Drei neue Methoden zur Bestimmun der magnetischen Inclination. Wiedemann Ann. (2) XXX 810-818.

O. WIENER. Gemeinsame Wirkung von Circularpolari sation und Doppelbrechung. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 1-

Der Verfasser leitet auf geometrischem Wege folgende, zum Teil schon von Gouy aufgestellte Sätze ab, welche sich übrigen ohne alle Schwierigkeit auch durch Rechnung ergeben.

1) Zwei gleichgedrehte circulare Schwingungen von (wi überall im folgenden vorausgesetzt wird) gleicher Schwingung dauer, aber verschiedener Amplitude und Phase setzen sich z einer circularen Schwingung zusammen. Zwei entgegengesetz gedrehte circulare Schwingungen von den Radien a_1 und $a_2 < a_1$ setzen sich zu einer elliptischen Schwingung mit den Axen $a_1 + a_2$ und $a_1 - a_2$ zusammen, deren grössere Axe in den gemeinschaft lichen Radius fällt, und deren Schwingungssinn mit demjenigen der Schwingung vom grösseren Radius übereinstimmt.

2) Ersetzt man nach 1) eine elliptische Schwingung durch zwei entgegengesetzt circulare, und erhalten diese einen Phasenunterschied w, so setzen sie sich nach 1) wieder zu einer um den Winkel $\frac{w}{2}$ gedrehten elliptischen Schwingung zusammen; die Wirkung der Circularpolarisation auf eine elliptische Schwingung besteht also in einer blossen Drehung der Ellipse um denselben Winkel, um den eine geradlinige Schwingung gedreht wird.

3) Erhält die grössere Axencomponente a einer rechtsgedrehten elliptischen Schwingung durch Doppelbrechung einen unendlich kleinen Phasenzuwachs $d\delta$, so entsteht eine elliptische Schwingung mit denselben Axen a und b, welche, wenn wir $\frac{b}{a} = k$ setzen, um einen Winkel

$$d\varphi = \frac{k}{1-k^2}\, d\delta$$

nach links gegen die ursprüngliche Ellipse gedreht ist; und jede der beiden Axencomponenten erhält gegen die entsprechende einen Phasenzuwachs

$$d\delta' = \frac{d\delta}{1-k^2}.$$

Fällt die kleinere Axe b in die beschleunigende Axe der Doppelbrechung, so erhält man, indem man hierin a und b vertauscht,

$$d\varphi_1 = -\frac{k}{1-k^2}\, d\delta, \quad d\delta'_1 = -\frac{k^2}{1-k^2}\, d\delta.$$

Die Drehung der Ellipse geschieht also nach links oder nach rechts, je nachdem ihre grosse oder kleine Axe in die beschleunigende Axe der Doppelbrechung fällt („je nachdem sie das Azimut 0 oder 90° hat"), umgekehrt bei einer links gedrehten Schwingung; und die Beschleunigung einer Ellipse vom Azimut 0 gegen eine solche vom Azimut 90° ist

$$d\delta' - d\delta'_1 = \frac{1+k^2}{1-k^2}\, d\delta.$$

4) Eine beliebige elliptische Schwingung lässt sich ersetzen durch zwei entgegengesetzt gedrehte elliptische Schwingungen

von den Azimuten 0 und 90° und von beliebigem, aber gleiche Axenverhältnis.

5) Auf dem Wegelement dl bewirke die Circularpolarisati eine Drehung $\frac{1}{2}dw$ (z. B. nach rechts), die Doppelbrechung ein Phasenzuwachs $d\delta$ für die Componente nach der Axe der Dopp brechung. Ersetzt man nach 4) die gegebene elliptische Schw gung durch die zwei ausgezeichneten elliptischen Schwingung von den Azimuten 0 und 90°, und nimmt für die erste d Schwingungssinn nach rechts, so bewirkt die Doppelbrechu bei beiden eine Drehung $d\varphi = \frac{k}{1-k^2}d\delta$ nach links; bestim man also k so, dass $d\varphi = \frac{1}{2}dw$ wird, also

$$\frac{2k}{1-k^2} = \frac{dw}{d\delta} = v,$$

wo v das Verhältnis des durch die Circularpolarisation und de durch die Doppelbrechung bewirkten Phasenunterschiedes b zeichnet, so bleiben die zwei ausgezeichneten Schwingung ellipsen nach Lage und Gestalt ungeändert und erfahren n einen Phasenunterschied

$$d\psi = \frac{1+k^2}{1-k^2}d\delta$$

gegen einander. Nun ist in der Regel $\frac{dw}{dl}$ und $\frac{d\delta}{dl}$ constan also auch v und k; um also die auf einem endlichen Wege dur Circularpolarisation und Doppelbrechung geänderte elliptisch Schwingung zu erhalten, hat man nur den zwei ausgezeichnete Schwingungsellipsen einen Phasenunterschied

$$\psi = \frac{1+k^2}{1-k^2}\delta = \sqrt{v^2+1}\,\delta = \sqrt{\delta^2+w^2}$$

zu erteilen und sie zusammenzusetzen. (Vergl. den Bericht S. 1110ff.) Lbg.

W. Wedding. Die magnetische Drehung der Polarisationsebene bei wachsender Doppelbrechung in dilatirtem Glase. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 25-48.

Enthält eine experimentelle Bestätigung der im vorigen Referat angeführten Sätze. Lbg.

F. Kohlrausch. Ueber den elektrischen Widerstand des Quecksilbers. Münch. Ber. 8-14.

J. D. Everett. Physikalische Einheiten und Constanten. 3te Aufl. Deutsch von P. Chappuis und D. Kreichgauer. Leipzig.

Die dritte Auflage dieses anerkannt trefflichen Buches, welches zugleich eine kurze Uebersicht über die Resultate der Physik giebt, ist, abgesehen von der Berücksichtigung neuerer Untersuchungen, gegen die vorige nicht wesentlich verändert.

Lbg.

May und Krebs. Lehrbuch des Elektromagnetismus. Stuttgart. J. Maier.

Das Buch bietet eine hinreichend gründliche Einführung in die Gesetze und die Elemente der Theorie des Elektromagnetismus. Ob die Form der Frage und Antwort, welche offenbar eine schnelle Repetition ermöglichen soll, sich nicht unbeschadet dieses Zweckes mit geringerem Raumaufwand durch am Rande angebrachte Inhaltsangaben hätte ersetzen lassen, möge dahingestellt bleiben. Lbg.

R. Weber. Aufgaben aus der Elektricitätslehre. Berlin. Springer.

Eine recht reichhaltige und zweckmässige Aufgabensammlung aus dem gesamten Gebiet der Elektricitätslehre.

Lbg.

Weitere Literatur.

O. Lodge. Modern views of electricity. Part. II. Current electricity (continued). Nature XXXVII. 8-13. Part III. Magnetism. ibid. 105-110, 322-323, 344-348, 366-368; Part IV. Radiation. ibid. XXXVIII. 389-393, 416-419, 590-592.

WM. HARKNESS, A. W. RÜCKER. On the constant *P* i: observation of terrestrial magnetism. Nature XXXVI 127-128, 272-273.

Beide Autoren haben für diese Constante Ausdrücke b. rechnet, über deren Genauigkeit sie sich abfinden. Lp.

G. ADLER. Ueber die Energie und die Gleichgewichts verhältnisse magnetisch oder dielektrisch polarisirte Körper. Exner Rep. XXIV. 733-758.

Neue Bearbeitung der Aufsätze aus den Wien. Ber. XCI und XCV, vergl. F. d. M. XVII. 1885. 1082 und XIX. 18-7 1112. Lp.

O. CHWOLSON. Ueber den zweiten Kirchhoff'schen Satz. Exner Rep. XXIV. 291-293.

Kritik des üblichen Beweises und Ersatz desselben durch einen neuen: „Die algebraische Summe aller Gefälle des Potentials muss gleich sein der algebraischen Summe aller Sprünge desselben hinauf". $\Sigma ir = \Sigma e$. Lp.

O. CHWOLSON. Ueber die Dimension der elektromagnetischen Einheit des elektrischen Potentials. Exner Rep. XXIV. 294-297.

Abänderung des in den Lehrbüchern gebräuchlichen Ganges der Herleitung. Lp.

A. KURZ. Ueber die Einführung in die beiderlei elektrischen Systeme. Exner Rep. XXIV. 674-676.

Vorschläge zu weiteren Modificationen bei der von Herrn Chwolson angeregten Methode. Lp.

G. JÄGER. Folgerungen aus den Eigenschaften der elektrischen Leitungsfähigkeit von Salzlösungen. Exner Rep. XXIV. 416-433.

R. FELICI. Sul potenziale di un conduttore in movimento sotto la influenza di un magnete. Nuovo Cimento (3) XXIV. 32-40.

G. FERRARIS. Sulle differenze di fase delle correnti, sul ritardo dell' induzione e sulla dissipazione di energia nei trasformatori; ricerche sperimentali e teoriche. Nuovo Cimento (3) XXIII. 138-158, 193-211, XXIV. 110-123, 242-256.

A. RIGHI. Studi sulla polarizzazione rotatoria magnetica. Nuovo Cimento (3) XXIII. 213-236.

H. HÜBSCHMANN. Die Ringfunctionen und ihre Anwendung auf die elektrostatischen Probleme des Ringes. Diss. Leipzig. 34 S. 4°.

F. PASCHEN. Ueber die zum Funkenübergang in Luft, Wasserstoff und Kohlensäure bei verschiedenen Drucken erforderliche Potentialdifferenz. Leipzig. J. A. Barth 1889. Diss. Strassburg. 34 S. 8°.

E. GARTHE. Ueber die tägliche und jährliche Periode der Variationen der erdmagnetischen Kraft im Moltkehafen auf Süd-Georgien während der Polarexpeditionen von 1882 und 1883. Diss. Göttingen. 36 S. 4°.

PH. HUFF. Ueber den jährlichen und täglichen Gang der erdmagnetischen Kräfte in Tiflis während der Zeit der internationalen Polarexpeditionen 1882 und 1883. Diss. Göttingen. 35 S. 4°.

A. LEDUC. Sur la période variable d'un courant dans le circuit d'un électro-aimant de Faraday. Almeida J. (2) VII. 38-47.

M. PILTSCHIKOFF. Sur la théorie des anomalies magnétiques. Almeida J. (2) VII. 437-441.

Der Aufsatz ist ein Auszug aus einer in russischer Sprache veröffentlichten Arbeit, über deren Zweck sich der Verfasser in folgenden Worten ausspricht. „Um die Ursachen der magnetischen Anomalien zu bestimmen, habe ich die Beziehung untersuchen müssen, welche zwischen den störenden magnetischen Massen und den Gestaltswandlungen der verschiedenen isomag-

netischen Linien besteht, nämlich den äquipotentiellen, den i- dynamischen, den isogonischen und den isoklinischen Linie Dies bedeutete aber die Eröffnung eines neuen Weges in d Wissenschaft; denn bis zur Stunde ist die Theorie der Anomali noch nicht in Angriff genommen worden (abgesehen von einig Andeutungen des Hrn. Thalén). Ich habe daher eine schaff zu müssen gemeint und habe zu diesem Zwecke die uranfär liche Frage studirt nach der Theorie der Anomalien, welche der Erdoberfläche durch eine im Inneren der Erde befindlich magnetische Masse $\pm \mu$ erzeugt werden". Lp.

Capitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

Ph. Gilbert. Sur les principes de la thermodynamique Rev. des qu. sc. XXIII. 225-246.

In einem Berichte über die Werke von Moutier (La thermodynamique. 1885), Zeuner (Technische Thermodynamik. 1887 Clausius (Théorie mécanique de la chaleur, traduite par F... et Ronkar. 1887), Bertrand (Thermodynamique. 1887) unterwirft der Verfasser die schwierigsten Principien der mechanischen Wärmetheorie einer kritischen Prüfung. Folgendes sind einige seiner Folgerungen: 1. Es ist schwierig, die Einführung der partiellen Ableitungen einer Grösse Q, welche nicht eine Function zweier Veränderlichen ist, in die Thermodynamik zu rechtfertigen. 2. Es ist besser, das Princip von der Aequivalenz als eine Folgerung aus dem mechanischen Theorem der Energie in seiner Anwendung auf die schwingende Bewegung anzusehen, welche die Wärme ausmacht. 3. Die beste Grundlage für das zweite Princip der mechanischen Wärmetheorie scheint das folgende

Postulat zu sein: „Die lebendige Kraft der schwingenden Wärmebewegung ist der absoluten Temperatur proportional.“ Ausserdem wird zum Beweise des Princips angenommen, dass die absolute Temperatur für einen gegebenen Körper eine Function des Volumens und des Druckes ist. Mn. (Lp.)

J. Parker. On an extension of Carnot's theorem. Phil. Mag. (5) XXV. 512-514.

Die Note bezweckt, den Nachweis zu führen, dass die Ansicht, kein nicht umkehrbarer Mechanismus könne so wirksam sein wie der Carnot'sche, unhaltbar sei. Indem ein „Gleichgewichtsweg“ als ein Weg definirt wird, bei welchem das betrachtete System in jedem Punkte im Gleichgewichte ist, wird die Bemerkung gemacht, dass ein umkehrbarer Weg immer ein Gleichgewichtsweg ist; allein einige vom Verfasser angestellten Versuche über die Löslichkeit von Stoffen zeigen, dass ein Gleichgewichtsweg nicht mit Notwendigkeit umkehrbar ist. Diese Versuche haben ihn zu dem Schlusse geführt, dass in jedem beliebigen nicht umkehrbaren Gleichgewichts-Cyklus die zerstreute Energie gleich Null ist, dass dagegen in allen anderen nicht umkehrbaren Cyklen die zerstreute Energie einen constanten Wert hat. Daher ist jeder nicht umkehrbare Gleichgewichts-Mechanismus ebenso wirksam wie Carnot's vollkommen umkehrbare Maschine, und alle anderen nicht umkehrbaren sind weniger wirksam. Gbs. (Lp.)

A. Lodge. Note on the dimensions and meaning of J, usually called the mechanical equivalent of heat. Nature XXXVII. 320.

A. Lodge. Mechanical equivalent of heat. Nature XXXVII. 365.

Statt das mechanische Wärmeäquivalent als das Verhältnis von Arbeit zu Masse mal Temperatur zu definiren, setzt der Verfasser statt „Temperatur“ die „Temperatur-Erhöhung“ um

1°, und dann wird J gleich der specifischen Wärme von Wasse sodass die erste Gleichung der mechanischen Wärmetheorie wir

$$dQ - p \,.\, dV = cJm \,.\, d\theta + mdI.$$

In der zweiten Note wird die Priorität dieser Anschauung b Clerk Maxwell, Theory of heat, anerkannt. Lp.

A. Pérot. Sur la mesure du volume spécifique de vapeurs saturées et la détermination de l'équivalen mécanique de la chaleur. Ann. de Chim. et Phys. (6) XII 145-190, Almeida J. (2) VII. 129-148.

Auf Grund einer vorangehenden Experimentaluntersuchun berechnet der Verfasser am Schlusse seiner Arbeit mit Hül theoretischer Betrachtungen das mechanische Wärmeäquivalen zu $E = 424{,}63$ mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0,34.

Lp.

H. Le Chatelier. Sur les fonctions caractéristiques de M. Massieu. C. R. CVI. 1343-1344.

Massieu's charakteristische Function wird in der Form dargestellt:

$$H' = -T.\left[\int U.d\left(\frac{1}{T}\right)+A\int V.d\left(\frac{P}{T}\right)+A'\int J.d\left(\frac{E}{T}\right)\right].$$

deren Eigentümlichkeit die ist, dass jedes Glied als Function einer einzigen Veränderlichen erscheint. Sbt.

P. Duhem. Sur un mémoire de M. Max Planck ayant pour titre: „Sur le principe de l'accroissement de l'entropie“. Almeida J. (2) VII. 124-127.

Besprechung einiger Stellen der in F. d. M. XIX. 1887. 1166 angezeigten Arbeit des Herrn Planck. Unter Verweisung auf seine Schrift: „Sur le potentiel thermodynamique et ses applications“ (Paris 1886) sucht der Verfasser nachzuweisen,

dass er in Betreff des Clausius-Horstmann'schen Princips derselben Ansicht sei wie Herr Planck, der von diesem ihm vorgeworfene Irrtum also nicht vorhanden sei; in anderen Dingen nimmt Herr Duhem für sich die Priorität in Anspruch.

Lp.

M. Brillouin. Chaleur spécifique pour une transformation quelconque et thermodynamique. Almeida J. (2) VII. 148-152.

M. Brillouin. Note sur un point de thermodynamique. Almeida J. (2) VII. 315-316.

Bemerkungen über die Hypothesen, welche bei der Aufstellung der Formel der Wärmetheorie

$$dQ = Adp + Bdv$$

stillschweigend gemacht worden. In der zweiten Note zieht der Verfasser, von Herrn Haga dazu veranlasst, eine Kritik der Edlund'schen Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents zurück.

Lp.

B. Stankewitsch. Stüdien auf dem Gebiete der kinetischen Theorie der Körper. Warsch. Nachr. 1888. 80 S. (Russisch.)

B. Stankewitsch. Zur mechanischen Wärmetheorie. Warsch. Nachr. 1888. 16 S. (Russisch.)

N. Pirogoff. Ueber das Virial der Kräfte. Phys. Ges. St. Petersb. XX. 1-20. (Russisch.)

P. de Heen. Détermination des variations que le coefficient de frottement des solides éprouve avec la température. Belg. Bull. (3) XVI. 57-62.

P. de Heen. Détermination des variations que le frottement intérieur de l'air, pris sous diverses pressions, éprouve avec la température. Belg. Bull. (3) XVI. 195-206.

Die letzte Arbeit des Herrn de Heen entkräftet die Schlüsse des Herrn Hirn gegen die kinetische Gastheorie.

Mn. (Lp.)

Ph. Gilbert. Sur les relations entre les coefficients calorimétriques d'un corps. Brux. S. sc. XII, B. 91-96.

Kennt man die Beziehung zwischen dem Drucke, dem Volumen und der absoluten Temperatur eines Körpers, so kann man die calorimetrischen Coefficienten eines anderen nur mit einer willkürlichen Function der absoluten Temperatur vollständig bestimmen. Der Verfasser findet nach einer einfachen Methode die partiellen Differentialgleichungen, denen die beiden specifischen Wärmen genügen, und zieht in den Fällen, wo sie nur von der Temperatur abhängen, daraus einige Folgerungen.

Mn. (Lp.)

P. de Heen. Note sur le travail moléculaire des liquides organiques. Détermination des variations de la chaleur spécifique des liquides avec la température. Belg. Bull. (3) XV. (165-191); au voisinage de la température critique. ibid. 522-528.

Ueber die experimentelle Bestätigung der Beziehung:

$$T = CP-2\,.\,4n = \text{const.}$$

zwischen der mittleren specifischen Wärme C, dem Moleculargewichte P und der Anzahl n von Atomen, die im Molecül enthalten sind; T ist die moleculare Arbeit. Mn. (Lp.)

G. P. Grimaldi. Sur la dilatation thermique des liquides à diverses pressions. Almeida J. (2) VII. 72-79.

P. de Heen. Note touchant un travail de M. Grimaldi „Sur la dilatabilité thermique des liquides". Almeida J. (2) VII. 155-158.

Auf Grund von Versuchen kritisirt Herr Grimaldi die bezüglichen theoretischen Formeln, unter diesen besonders die

Gleichungen des Herrn de Heen. Dieser letztere verteidigt in der zweiten Notiz seine Theorie gegen die Auffassung des ersteren Autors. Lp.

H. Fritz. Beiträge zu den Beziehungen der physikalischen Eigenschaften der Körper. Wolf Z. XXXIII. 56-65.

Bei weiterer Verfolgung früherer Untersuchungen des Verfassers ergab sich folgende einfache Beziehung zwischen dem Atomgewicht A, der specifischen Wärme s, der Dichtigkeit Δ und der absoluten Temperatur des Schmelzpunktes T:

$$As \,.\, \Delta s \,.\, \sqrt[3]{\frac{A}{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{T \,.\, \Delta s}{1{,}28}}.$$

Die Formel wurde an 48 Elementen und 40 teils unorganischen, teils organischen Verbindungen geprüft und ergab meist gute Uebereinstimmung mit den Beobachtungen. Sbt.

A. Weilenmann. Volumen und Temperatur der Körper, insbesondere der Flüssigkeiten. Wolf Z. XXXIII. 37-56, Exner Rep. XXIV. 660-673.

Die Thatsache der Abnahme des Ausdehnungscoefficienten mit der Erniedrigung der Temperatur scheint darauf hinzudeuten, dass nicht nur für das Wasser, sondern auch für andere Flüssigkeiten jener Coefficient einmal 0 und darauf negativ werden müsste, wenn nicht für die meisten Flüssigkeiten das Minimum des Volumens unter dem Erstarrungspunkte läge. Der Verfasser sucht für jene Umkehrung eine Erklärung zu geben. Unter der Voraussetzung, dass die Cohäsion, die ihm identisch erscheint mit der Schwerkraft, umgekehrt proportional ist dem Quadrate des Molecularabstandes, führt die Anwendung des Princips der Erhaltung der Energie auf die Umwandlung von dem Volumen v_0 zu v unter dem Drucke p zu der Gleichung:

$$\frac{k \,.\, \lambda}{v^{\frac{1}{3}}} - \frac{k \,.\, \lambda}{v_0^{\frac{1}{3}}} + p(v - v_0) = \beta \,.\, (z + z_1) \,.\, (m + t),$$

wo z die Anzahl der inneren Aether-, z_1 die der Körpermolecüle, k, λ, β und m aber Constanten bedeuten.

Von besonderer Wichtigkeit ist nun die Annahme einer „Aetherverdunstung“, nämlich einer Veränderlichkeit der Zahl der Aethermolecüle. „Steigt die Temperatur, so erhöht sich im Innern die kinetische Energie, also auch die Geschwindigkeit, und es treten anfänglich mehr Molecüle aus als ein, ihre Anzahl im Körper vermindert sich, bis schliesslich wieder Gleichgewicht eintritt.“ Der Verfasser setzt daher $dz = -f(t) \,.\, dt$ und findet, dass die Hypothese $f(t) = \frac{\varrho}{m+t}$ das Verhalten des Wassers zu erklären vermag. Die oben angeführte Gleichung, die übrigens für Gase leicht die bekannte Form annimmt, liefert dann, wenn noch statt v die Dichte $d = \frac{1}{v}$ eingeführt wird, nach einigen Umformungen:

$$d^{\frac{1}{2}} = \nu + \varepsilon(m+t) - \sigma(m+t) \,.\, \log(m+t) - \eta \,.\, p \,.\, (v - v_0).$$

Für gewöhnlich kann der äussere Druck p vernachlässigt und somit das letzte Glied unterdrückt werden. Die Constanten haben dann für Wasser folgende Werte: $\nu = 0{,}992\,713$; $\log\varepsilon = 0{,}948\,983-4$; $\log\sigma = 0{,}644\,907-4$; $m = 34^\circ$. Die nach der Formel berechneten Zahlen zeigen gute Uebereinstimmung mit den Ergebnissen verschiedener Beobachter, insbesondere auch die aus der vollständigen Formel erhaltenen Werte mit den für höhere Temperaturen angestellten Beobachtungen von Hirn.

Auch für Alkohol werden die Resultate der Formel mit den Beobachtungen von Kopp und Recknagel, sowie für Methylalkohol, Ameisen-, Essig- und Buttersäure mit Kopp's Beobachtungen verglichen. Sbt.

O. Pilling. Ueber die Grösse der Molecüle in Flüssigkeiten. Pr. Realgymn. Erfurt. 1887 u. 1888.

Es wird versucht, das Volumen der Molecüle von Flüssigkeiten aus der Temperatur des Siedepunktes und dem dabei beobachteten specifischen Volumen herzuleiten. In der von van der Waals gegebenen Gleichung $\left(p + \frac{a}{v^2}\right) \cdot (v - b) = R(1 + \alpha t)$ bedeutet b das vierfache Volumen der Molecüle, aber nur, wenn

$v \geqq 2b$. Da für Flüssigkeiten meistens $v < 2b$ sein wird, so muss die Gleichung für diese besonders untersucht werden, und da in ihr mehrere Constanten vorkommen, so müssen zu deren Bestimmung noch weitere Gleichungen abgeleitet werden.

Durch Untersuchung der Anziehung der Flüssigkeitsteilchen, die an der Oberfläche eine Art Druck bewirkt, ergiebt sich zunächst $2vP = Q$, und zwar bedeutet v das Volumen der Masseneinheit, P den von der Anziehung der inneren auf die nahe der Oberfläche gelegenen Teilchen herrührenden, auf die Flächeneinheit bezogenen Druck, Q die Arbeit, die erforderlich ist, um die Masseneinheit der Flüssigkeit aus dem Inneren so weit nach aussen zu bringen, dass keine Einwirkung seitens der Flüssigkeit mehr stattfindet. Diese Gleichung wird zuerst unter der Voraussetzung abgeleitet, dass die Dichte von der Oberfläche an durchaus constant sei; es zeigt sich aber nachher, dass sie auch noch gilt, wenn man die der Wirklichkeit besser entsprechende Annahme einer oberflächlichen Uebergangsschicht mit veränderlicher Dichtigkeit macht. — Nach der Untersuchung der Einwirkung der Molecüle auf eins derselben wird die Grösse Q näher bestimmt, die verwandt ist mit der inneren latenten Wärme.

Die Zustandsgleichung für Flüssigkeiten wird nach van der Waals hergeleitet aus einer von Clausius gegebenen Beziehung. Sie erscheint hier zuletzt in der Form $P.(v-\sigma) = R.T$, und zwar bedeutet σ den Raum, der von je einem Molecül für die anderen unzugänglich gemacht wird; T ist die Temperatur, die dem Drucke p des gesättigten Dampfes entspricht; R ist eine dem Moleculargewicht umgekehrt proportionale Grösse.

Eine nähere Untersuchung der schon erwähnten Uebergangsschicht führt zu einer dritten Gleichung: $\log\frac{P}{p} = \frac{aQ}{RT}$, wo $a = \frac{1}{2}\log e$.

Durch Verbindung der drei Gleichungen erhält man, wenn $\frac{2v}{v-\sigma}$ mit x bezeichnet wird:

$$\log\frac{RT}{pv} = 0{,}301 - \log x + ax,$$

und wenn endlich $v_1 = \frac{v}{N} = vm$ (N Anzahl der Molecüle), $\sigma_1 = \sigma m$ ist, also $x = \frac{2v_1}{v_1 - \sigma_1}$:

$$ax = \log x + \log \frac{T}{v_1} + 1{,}6131.$$

Zur Berechnung von σ_1 aus dieser Gleichung legt man am besten Tabellen an, die neben x die der Gleichung entsprechenden Werte von $\frac{T}{v_1}$ enthalten, nimmt aus ihnen dann für ein gegebenes $\frac{T}{v_1}$ das x und berechnet σ_1. Der Verfasser teilt die Werte für eine Reihe von Stoffen mit; beispielsweise für H_2O ist $T = 373$, $v_1 = 18{,}7$, $\sigma_1 = 16{,}0$.

Der von einem Molecül ausgeschlossene Raum ist bestimmt durch die Art und Weise der Aneinanderlagerung der Massen. Ist λ_0 der ausgeschlossene Raum für ein Molecül, so wird $\lambda_1 = \lambda_0 . 0{,}84$, $\lambda_2 = \lambda_0 . 0{,}69$ u. s. w., je nachdem ein, zwei u. s. w. andere Molecüle sich an das erste anlagern. Sbt.

C. Puschl. Ueber die specifische Wärme und die inneren Kräfte des Wassers. Wien. Ber. XCVII. 1118-1127.

Ist r die ausdehnende Kraft der in einem bestimmten Volumen Flüssigkeit enthaltenen Wärmemenge, p der äussere Druck und q eine von der Wärme verschiedene innere Kraft, die der Ausdehnung entgegenwirkt, so ist für das Gleichgewicht $r = p + q$. Mit Hülfe gewisser Gleichungen, die der Verfasser entwickelt, wird es möglich, aus Versuchen über specifische Wärme die Intensität der Kraft r zu bestimmen. Diese Gleichungen werden angewandt auf das durch das Dichtigkeitsmaximum und die beiden Minima der specifischen Wärme eigentümliche Verhalten des Wassers. Es ergiebt sich für das Maximum der Dichtigkeit $r = 42180$ und für den Gefrierpunkt $r = 41050$ Atmosphären. Die Kräfte r und q scheinen dem Verfasser, wie er ausführt,

ihrem Wesen nach ganz andere zu sein, als man nach den Principien der kinetischen Wärmetheorie gegenwärtig annimmt.

Sbt.

P. Duhem. Sur un mémoire de M. Robert von Helmholtz: „Sur la variation du point de congélation". Almeida J. (2) VII. 122-123.

Prioritäts-Reclamation, gestützt auf Citate aus des Verfassers Werk „Le potentiel thermodynamique". Lp.

J. Parker. The thermodynamics of cryohydrates. Phil. Mag. (5) XXV. 406-409.

Der Aufsatz begründet interessante Ergebnisse über die Wirkung des Drucks auf den Gefrierpunkt und auf die Zusammensetzung der Krystallhydrate. Gbs. (Lp.)

P. H. Dojes. Over eenige formules, betrekking hebbende op de veranderingen in samenstelling der oplossingen, door druk- en temperatuursveranderingen bewerkt. Amst. Versl. en Meded. (3) V. 226-249.

Diese Arbeit enthält eine Anwendung der Theorie des thermodynamischen Potentials auf die durch geänderten Druck oder Temperatur bewirkten Abweichungen in der Zusammensetzung der Auflösungen.

Im Anschluss an die Untersuchungen von Gibbs und Duhem werden nach einander behandelt: 1) zwei teilweise mischbare Stoffe, 2) feste Körper und Gase, 3) Frieren von Salzlösungen, 4) Kryohydrate. Der letzte Gegenstand war bereits von Herrn Parker (vgl. den vorangehenden Bericht) behandelt, aber nach der Ansicht des Verfassers in nicht ganz zutreffender Weise.

G.

P. C. F. Frowein. Die Dissociation krystallwasserhaltiger Salze. Zs. für phys. Chemie I. 5ff. [Almeida J. (2) VII. 316-321.]

Die Thermodynamik beweist eine Beziehung zwischen der Bildungswärme des krystallwasserhaltigen Salzes und seiner Dissociationsspannung. Herr Frowein beabsichtigt in seiner Abhandlung die Einwürfe Naumann's gegen die Anwendbarkeit der Thermodynamik auf die chemischen Vorgänge zu entkräften. und meint die Bestätigung jener Beziehung gefunden zu haben. Herr Duhem dagegen ist anderer Ansicht und entwickelt in seiner Anzeige der Frowein'schen Arbeit in Almeida J. VII eine durchaus neue Lösung der Aufgabe. Dadurch gelangt er zur Formel $L = ART \log \frac{F}{f}$, während die Frowein'sche lautet

$$L = -ART^2 \frac{d}{dt} \log \frac{F}{f}.$$

„Der Irrtum des Herrn Frowein rührt davon her, dass er einen ungenauen Satz als selbstverständlich aufgefasst hat, nämlich: Die Bildungswärme des Hydrates ist die Differenz zwischen der zur Dissociation und der zur Verdampfung reinen Wassers nötigen Wärme.“ Lp.

Ch. Antoine. Tensions des vapeurs: nouvelle relation entre les tensions et les températures. C. R. CVII. 681-684. 778-780, 836-837.

Die Abhängigkeit des Dampfdruckes P von der Temperatur θ, die für jeden Dampf von einem besonderen Nullpunkte an zu rechnen ist, wird in der Form gegeben $\log P = A.\left(D - \frac{1000}{\theta}\right)$. A und D bedeuten Constanten, die empirisch zu bestimmen sind. Ihre Werte und die Lage des Nullpunktes werden für eine Reihe von Dämpfen mitgeteilt. Sbt.

P. Gerber. Der absolute Nullpunkt der Temperatur. Die Arbeit der Wärme beim Sieden und die Dämpfe im Zustande der Sättigung. Leopold. Akad. LII. 103-105, 106-124.

Die bisherige Bestimmung des absoluten Nullpunktes aus dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze ist unsicher wegen der beschränkten Gültigkeit dieses Gesetzes. Da letzteres vielmehr dahin abzuändern ist, dass die Spannung p des Gases um den gegen die Ausdehnung gerichteten Moleculardruck q vermehrt und der Gesamtraum v desselben um den Raum der Molecüle b vermindert wird, so gilt die Gleichung:

$$(p_t+q_t) \cdot (v_t-b_t) = (p_0+q_0) \cdot (v_0-b_0) \cdot (1+tx),$$

und diese muss zur Bestimmung des absoluten Nullpunktes $\left(-\frac{1}{x}\right)$ benutzt werden. Bei den Versuchen von Regnault, bei denen die Temperatur von 0 auf 100° erhöht und dann entweder die Druckzunahme bei constantem Volumen oder die Ausdehnung bei constantem Druck beobachtet wurde, war die Temperatur vom Punkte der Verflüssigung weit genug entfernt, sodass der Moleculardruck vernachlässigt werden kann, und da für 0° das Mariotte'sche Gesetz gilt, also auch der Molecularraum ausser Betracht kommen kann, so erhält man für zwei Versuche:

$$p_{100}(v_{100}-b_{100}) = p_0 v_0 (1+100x),$$
$$p'_{100}(v'_{100}-b'_{100}) = p'_0 v'_0 (1+100x).$$

Innerhalb enger Grenzen der Druckzunahme wird $b_{100} = b'_{100}$ sein, und da $p_0 v_0 = p'_0 v'_0$, so folgt

$$b_{100} = b'_{100} = \frac{p_{100} \cdot v_{100} - p'_{100} \cdot v'_{100}}{p_{100} - p'_{100}}.$$

Daraus erhält man schliesslich, wenn die Coefficienten der Druckzunahme oder Ausdehnung α und α' heissen:

$$100x = \frac{\alpha' \cdot p_{100} - \alpha \cdot p'_{100}}{p_{100} - p'_{100}}.$$

Der Verfasser benutzt zur Bestimmung die Beobachtungen Regnault's an Luft, Kohlensäure und schwefliger Säure, und die erhaltenen Werte schwanken nur zwischen 0,36392 und 0,36469. Aus den für Luft geltenden Werten folgt, dass der absolute Nullpunkt bei —274,43° C. liegt.

In der zweiten Abhandlung leitet der Verfasser aus dem zweiten Hauptsatze der Wärmetheorie die folgenden beiden Sätze ab:

1) Die äussere oder innere Arbeit, welche Wärme be. veränderlicher Temperatur vollführt, hängt von der Grösse Wärme und Temperatur so ab, dass ihre Variation zugleich der Variation der Wärmegrösse verschwindet.

2) Das Verhältnis der bei unveränderlicher Temperatur einen Körper übergeführten Wärme zum absoluten Werte Temperatur selbst ist von dieser und der Geschwindigkeit welcher die Grösse der Wärme sich beim Uebergange zu ei anderen Temperatur ändert, so abhängig, dass seine Variat zugleich mit der Variation jener Geschwindigkeit Null wird

Bei der Anwendung dieser Sätze auf die Verdampfung giebt sich aus 1), dass das Verhältnis der äusseren zur gas Arbeit der Wärme bei der Verdampfung proportional ist von einem gewissen Anfangswerte gezählten Temperatur. Gesetz wird bestätigt durch die vorliegenden Beobachtungen Wasser, Chloroform, Schwefelkohlenstoff und Aether. Eine F. desselben ist, dass jeder Stoff eine Verdampfungsgrenze bes die berechnet werden kann, oder dass eine Temperatur exi unterhalb deren die Verdampfung nicht möglich ist; und fern dass für jeden Stoff bei einer gewissen Temperatur die äus Arbeit der Verdampfung ein Maximum wird. Mit Benutz der Clapeyron'schen Formel für die Dampfspannung folgt wei aus 1), dass die Spannung der gesättigten Dämpfe proporti ist einer constanten Potenz des Verhältnisses der von der V dampfungsgrenze zu der vom absoluten Nullpunkte gezä Temperatur. Die Bestätigung dieses Satzes ergiebt sich aus d Messungen Regnault's.

Aus den mitgeteilten Tabellen geht hervor, dass es, we überhaupt, nur in seltenen Fällen möglich sein wird, die rechnete Verdampfungsgrenze durch unmittelbare Beobachtung hinreichend genau festzustellen.

Aus 2) folgert der Verfasser weiter den Satz: Die V dampfungswärme ist proportional einer constanten Potenz d Verhältnisses der abwärts vom kritischen Punkte zu der vo absoluten Nullpunkte gezählten Temperatur. Hiernach kann a der Verdampfungswärme der kritische Punkt bestimmt werd

Dieser neue Satz zeigt auch, dass das Vorhandensein einer Verdampfungsgrenze nicht auf der Unmöglichkeit, die Flüssigkeit zu verdampfen, beruht, sondern auf einer Eigenschaft des Dampfes selbst, nämlich dem Gleichgewicht zwischen dem Druck der Wärme und der Anziehung der Molecüle. Durch Anwendung der gefundenen Gleichungen kann endlich die Raumzunahme bei der Verdampfung für jede Temperatur bestimmt werden.

Sbt.

B. Galitzine. Ueber den Einfluss der Krümmung der Oberfläche einer Flüssigkeit auf die Spannkraft ihres gesättigten Dampfes. Wiedemann Ann. (2) XXXV. 200-208.

W. Thomson hat gezeigt, dass die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit bei concaver oder convexer Oberfläche kleiner bezw. grösser ist als bei ebener Oberfläche, und hat den Druckunterschied dargestellt durch die Formel:

$$p_1 - p_2 = \frac{T \cdot \sigma}{\Delta - \sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

wo p_1 und p_2 die Spannkraft bei ebener und gekrümmter Oberfläche bezeichnen, T die Oberflächenspannung, Δ die Dichte der Flüssigkeit, σ die ihres Dampfes und r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien der freien Oberfläche, die für eine concave Fläche positiv gerechnet werden. — Stefan hat durch seine Betrachtungsweise gefunden, dass die Arbeit, die notwendig ist, um ein Molecül der Wirkungssphäre der freien Oberfläche zu entziehen, grösser ist für concave als für ebene oder gar convexe Oberflächen, ein Satz, dessen Folgerungen übereinstimmen mit denen aus der Thomson'schen Formel. Die theoretischen Ansichten Stefan's werden in der vorliegenden Arbeit weiter entwickelt, und der Verfasser erhält schliesslich die Formel:

$$p_1 - p_2 = \frac{\pi \cdot \Delta^2}{2} \cdot \psi(\varrho_0) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \cdot \frac{\sigma}{\Delta - \sigma},$$

wo ϱ_0 den Radius der Wirkungssphäre der Molecüle bedeutet. Der Vergleich beider Formeln lehrt:

$$T = \Delta^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \psi(\varrho_0) \quad \text{oder} \quad \frac{T}{\Delta^2} = F(\varrho_0),$$

d. h. der Quotient aus der Oberflächenspannung und dem Quadrat der Dichte ist nur Function der Wirkungsweite der Molecüle. Nach einem von Bartoli gefundenen empirischen Gesetz ist aber $\frac{T}{c.\Delta'} = \text{const.}$, wo c die specifische Wärme der Flüssigkeit; also ergiebt sich $c = \omega(\varrho_0)$, d. h. die specifische Wärme ist nur Function der Wirkungsweite der Molecüle. Sbt.

P. Duhem. Sur quelques propriétés des dissolutions. Almeida J. (2) VII. 5-25.

Eine rein theoretische Studie, im Anschluss an die Schrift des Verfassers „Le potentiel thermodynamique et ses applications". Paris, 1886, unter Bezugnahme auf Arbeiten von J. H. Van t'Hoff, von Raoult und auf Kirchhoff's Abhandlung: „Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben". Poggendorff Ann. CIII. (1858). Lp.

P. Duhem. De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions. Almeida J. (2) VII. 391-419.

Gouy et G. Chaperon. L'équilibre osmotique et la concentration des dissolutions par la hauteur. C. R. CV. 117ff.

Gouy et G. Chaperon. Sur la concentration des dissolutions par la pesanteur. Ann. de Chim. et Phys. (6) XII. 384ff.

Gouy et G. Chaperon. Sur l'équilibre osmotique. Ann. de Chim. et Phys. (6) XIII. 120-132.

Herr Duhem hat seine Arbeit mit Rücksicht auf die grösstenteils experimentellen Untersuchungen der Herren Gouy und Chaperon unternommen und gelangt zu folgendem Schlusse: „Aus der von uns gegebenen Darstellung erhellt, dass die Methode des thermodynamischen Potentials sich vollkommen zur Erforschung des Einflusses eignet, den die Schwere auf die Salzlösungen ausübt. Nicht nur erlaubt sie, die von den Herren Gouy und Chaperon gewonnenen Ergebnisse wiederzufinden, soweit dieselben genau sind; sondern sie gestattet auch eine Be-

seitigung der Beschränkungen, welche diese Physiker getroffen hatten, und eine Vermeidung der Ungenauigkeiten, zu denen sie durch die Anwendung einer nur für die umkehrbaren Kreisprocesse gültigen Gleichung auf einen nicht umkehrbaren Kreisprocess geleitet waren. Was die Ergebnisse betrifft, zu denen dieselbe Methode uns in dem Falle geführt hatte, wenn die Lösung homogen vorausgesetzt wird, so behalten sie weiter ihren Wert, selbst wenn man der Aenderung der Zusammensetzung Rechnung trägt, die von der Einwirkung der Schwere herrührt". Lp.

P. Duhem. Sur la liquéfaction de l'acide carbonique en présence de l'air. Almeida J. (2) VII. 158-168.

Th. Andrews. On the properties of matter in the gaseous and liquid states under various conditions of temperature and pressure. Lond. Phil. Trans. CLXXVIII. 45ff.; Almeida J. (2) VII. 168-170.

Die theoretische Untersuchung des Hrn. Duhem betrifft die von Hrn. Cailletet im Jahre 1880 beobachteten Erscheinungen bei der Verdichtung eines Gemenges von 1 Teil Luft und 5 Teilen Kohlensäure. Dieses letztere Gas wurde zunächst bei mässigem Drucke flüssig. Wenn dann, damit die Temperatur constant bliebe, der Druck langsam vergrössert wurde, so verschwand die Flüssigkeit für einen hinlänglichen Druck. Bei langsamer Verminderung des Druckes erscheint darauf die Flüssigkeit plötzlich wieder in dem Augenblick, wenn man bei dem Drucke anlangt, für den sie bei dem ersten Versuch verschwunden war, und bei einer gegebenen Temperatur bildet sich der Meniskus aus, sobald der Druck einen bestimmten Wert erreicht hat, der um so tiefer liegt, je höher die Temperatur ist. Die von Jamin (Almeida J. (2) VII. 389ff.) vorgeschlagene Theorie verwirft Hr. Duhem. Dagegen leitet er eine neue aus seinen Formeln ab, die er in der Schrift: „Sur le potentiel thermodynamique" aufgestellt hat. Zum Schlusse bemerkt er: „Die Gleichung $F(p, T, \lambda) = 0$, auf deren Betrachtung diese ganze Theorie be-

ruht, nimmt augenscheinlich eine andere Gestalt an, wenn m
verschiedene Gase betrachtet. Ein Gemisch aus Wasserstoff u
Kohlensäure wird sich also anders verhalten als ein Gemi
aus Luft und Kohlensäure". In dem Berichte, den Hr. Duh
über die Versuche von Andrews erstattet (welche sich auf G
menge von Kohlensäure und Stickstoff erstreckten, und welc
nach dem Tode von Andrews veröffentlicht, Hrn. Duhem b
der Abfassung seiner Arbeit noch nicht bekannt waren), wi
die vollkommene Uebereinstimmung dieser Versuche mit d
gegebenen Theorie festgestellt. Lp.

H. Pellat. Application du principe de Carnot au réactions endothermiques. Almeida J. (2) VII. 279-285.

Es sei t die Temperatur der Körper, welche eine end
thermische Reaction veranlassen; T die Temperatur der Quel
A, welche durch Leitung oder Strahlung in der Gestalt v
Wärme die ganze zu dieser Reaction nötige Energie liefert;
die niedrigste Temperatur, bei welcher die exothermische Rea
tion notwendig eintritt. Dann findet folgendes Gesetz sta
1. Die Temperatur T der Quelle A kann nicht unter T_1 lieg
2. Wenn die Temperatur der reagirenden Körper unter T_1 lieg
so muss die Temperatur der Quelle A um so mehr über
liegen, je stärker endothermisch die betrachtete Reaction ist.
Lp.

K. Fuchs. Ueber Verdampfung. Exner Rep. XXIV. 141-1

„Die dynamische Gastheorie stützt sich von Grund aus a
das Princip der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Die grosse
Erfolge, zu welchen dieses Princip auf dem Gebiete der Ga
theorie geführt hatte, erweckten von Anfang an die Hoffnung
dass es gelingen werde, auf Grund desselben Principes das Ge
setz der Dampfspannungen theoretisch zu entwickeln. Clausiu
hat wohl den Grundgedanken einer entsprechenden Theori
skizzirt, eine concrete Formel ist jedoch bis heute nicht gefunde

worden. Im folgenden soll versucht werden, dieses Problem von ganz anderer Basis aus in Angriff zu nehmen. Wir stellen als Ausgangspunkt den Satz auf: Der Dampf über einer Flüssigkeit ist gesättigt, wenn durch die Verwandlung eines Massenelementes der Flüssigkeit in Dampf keine Arbeit geleistet wird."

Lp.

N. von Wuich. Untersuchungen über die Spannungsverhältnisse bei der Verbrennung des Pulvers in geschlossenen Gefässen. Mitt. üb. Art. u. Genie. XIX. 337-350, 381-392.

Die Untersuchungen über die Spannung der Pulvergase in geschlossenen Gefässen berücksichtigen zumeist nur den Fall eingehend, dass die ganze Pulverladung vollständig verbrannt ist, während der Verlauf der Spannungen nur beiläufig beachtet wird. Das Endziel der Studie des Verfassers ist die Aufstellung des Zusammenhangs zwischen der Spannung und der Zeit; in der Phase von der Entzündung der Pulverladung bis zu dem Beginne der Geschossbewegung kann nämlich das Rohr als ein Gefäss von unveränderlichem Inhalte betrachtet werden. Die für ein geschlossenes Gefäss geltenden Beziehungen bilden daher den naturgemässen Ausgangspunkt für die Behandlung des Bewegungsproblems, da ja das Rohr auch während eines unendlich kleinen Zeitteilchens als Gefäss von constantem Volumen angesehen werden kann. Endlich lassen sich aus der Beziehung zwischen Spannung und Zeit die Mittel ableiten, um dem brisanten Verhalten des Pulvers bei grossen anfänglichen Widerständen des Geschosses zu steuern. Bezüglich der Behandlung des Gegenstandes ist zu bemerken, dass der Verf., eine Autorität im Gebiete der Ballistik, von der Formel der Physik ausgeht, die das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz ausdrückt ($p.v = R.T$), und u. a. zu dem Schlusse gelangt, dass die gasförmigen Verbrennungsproducte sich nicht wie vollkommene Gase verhalten. Ferner ergiebt sich, dass die Verhältnisse im Beginne der Geschossbewegung allein massgebend sind für die Festsetzung der Dimension und Constitution des Pulverkornes. „Die Korndimen-

sion aus der Rohrlänge abzuleiten, ist ein ganz verfehlter Stan punkt, da die Rohrlänge im Interesse der Auswertung des m Rücksicht auf die Schonung des Rohrs entsprechend dim sionirten Pulverkornes festgestellt wird: Die Rohrlänge ist e Function des Pulverkornes und nicht umgekehrt". Lp.

E. Strnad. Zur inneren Ballistik der Geschütze. Mit geteilt nach A. Moisson's „Pyrodynamique". Mitt. ü. Art. u. Genie XIX. 439-456.

Kurze Zusammenfassung der Theorien Moisson's, soweit sie die Vorgänge in Rohren betreffen, und im Anschlusse daran einige Anwendungen. Unter Beibehaltung des Ideengangs des französischen Theoretikers benutzt der Verfasser, hierin vom Originale abweichend, einen auf dem Princip der lebendigen Kräfte basirten Vorgang, um zu derjenigen Differentialgleichung zu gelangen, deren Integration leicht discutirbare und praktisc bequeme Schlussformeln liefert. Lp.

J. Tobell. Ueber den Wärmeübergang beim Schnell- feuer und den Einfluss der künstlichen Kühlung Mitt. üb. Art. u. Genie XIX. 551-574.

Die ausserordentlichen Erfolge, welche durch die bei der Mitrailleuse nach dem System Maxim verwendete künstliche Kühlung des Laufes durch zahlreiche Versuche für die Feuer- schnelligkeit unter Aufrechterhaltung der normalen Schusspräc- sion constatirt wurden, haben den Verfasser veranlasst, eine Be- stimmung der mit einer gegebenen Feuerschnelligkeit eintreten- den Erhöhung der Lauftemperatur durch die Rechnung vorzu- nehmen und sie mit Berücksichtigung der Versuchsdaten auf den Fall der benutzten Handfeuerwaffen anzuwenden. Lp.

A. Moisson. Pyrodynamique, théorie des explosions dans les canons et les torpilles. Paris (1887).

B. Gastheorie.

L. Boltzmann. Ueber das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen progressiver und Rotationsbewegung bei Gasmolecülen. Berlin. Ber. 1395-1408.

Die Resultate der Untersuchungen von Maxwell und dem Verfasser können erst durch Anwendung auf specielle Fälle, in denen die Rechnung sich vollständig durchführen lässt, für die Gastheorie nutzbar gemacht werden. Herrn Burnside gebührt nach dem Verfasser das Verdienst, einen ziemlich allgemeinen Fall durchgeführt zu haben (Edinb. Trans. 1887, Juli); das Schlussergebnis desselben widerspricht aber dem allgemeinen Theoreme, wonach die mittlere lebendige Kraft für jeden Freiheitsgrad dieselbe sein soll. Der Widerspruch rührt nach dem Verfasser daher, dass B. Unendlichkleines von derselben Grössenordnung, von der die ausschlaggebenden Glieder sind, vernachlässigt, indem er annimmt, dass die Häufigkeit der Zusammenstösse durch die excentrische Lage des Schwerpunktes seiner Molecüle nicht alterirt wird.

Es wird nun gezeigt, wie die Berücksichtigung dieses Umstandes zur Uebereinstimmung mit jenem Theoreme führt. Demnächst wird die Untersuchung verallgemeinert, indem die Molecüle als starre, vollkommen elastische Körper nicht mehr von Kugelform, sondern von beliebiger Gestalt vorausgesetzt werden, wobei nur die Oberfläche nach aussen immer convex sein und nirgends Spitzen oder scharfe Ecken besitzen soll. — Es ergiebt sich, dass für das Gleichgewicht zwischen der progressiven und rotirenden Bewegung dieselbe Bedingung gilt wie früher.

Zur besseren Veranschaulichung behandelt der Verfasser noch das analoge Problem für die Ebene. Sbt.

L. Natanson. Ueber die kinetische Theorie unvollkommener Gase. Wiedemann Ann. (2) XXXIII. 683-701.

Von den zwischen Gasmolecülen thätigen Kräften wird vor-

ausgesetzt, dass ihre Wirkung erst bei der Annäherung bis zu einer gewissen Grenze *R* berücksichtigt zu werden braucht. Molecüle, die von allen übrigen um mehr als *R* entfernt sind, bewegen sich geradlinig und heissen freie Molecüle. Krummlinige Bewegung tritt ein, wenn zwei Molecüle sich bis zur Entfernung *R* nähern, und dann sind zwei Fälle möglich: entweder die Molecüle nähern sich bis zu einem Minimum der Entfernung und gehen dann auseinander, was der Verfasser einen Zusammenstoss nennt, — oder die Bewegung wird stationär, die dann entstehenden beständigen Systeme werden Aggregate genannt.

Der Verfasser berechnet zunächst den Procentsatz solcher Molecüle, die in einem beliebigen Zeitmomente eben in bimolecularen Zusammenstössen begriffen sind, und beweist dann, dass die Geschwindigkeit, mit welcher der Schwerpunkt zweier Molecüle während eines Zusammenstosses fortschreitet, dem Maxwell'schen Verteilungsgesetze unterworfen ist. Es folgen dieselben Untersuchungen für die Zusammenstösse von mehr als zwei Molecülen. Die Berechnung der Zahl der Aggregate führt zu einer Formel, die mit der Gibbs'schen Dissociationsgleichung übereinstimmt. — Bei der Aufgabe, eine Zustandsgleichung für unvollkommene Gase abzuleiten, entsteht die Frage, wie die Temperatur derselben zu definiren sei; der Verfasser findet, dass die mittlere kinetische Energie der freien Molecüle das Mass für die Temperatur giebt. Nachdem der Clausius'sche Satz vom Virial verallgemeinert worden ist, sodass er auch unstationäre Bewegungen umfasst, wird schliesslich eine Zustandsgleichung für die unvollkommenen Gase aufgestellt. Sbt.

L. Natanson. Ueber die Geschwindigkeit, mit welcher Gase den Maxwell'schen Zustand erreichen. Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 970-980.

Das Maxwell'sche Gesetz ist als eine Grenze anzusehen, der sich das wahre Verteilungsgesetz in Gasen nähert, wenn die Anzahl der Molecüle unbegrenzt wächst und die Dauer der Zusammenstösse immer mehr abnimmt. Diesen beiden Beschrän-

kungen, von denen die erste von Maxwell selbst, die zweite von Boltzmann herrührt, fügt der Verfasser die dritte hinzu, dass das Gas den Maxwell'schen Zustand genau erst nach Ablauf von unendlich langer Zeit erreicht. Sbt.

L. Natanson. Sur l'explication d'une expérience de Joule, d'après la théorie cinétique des gaz. C. R. CVII. 164-166.

Unter den Einwänden, die Hirn gegen die kinetische Gastheorie erhoben hat, ist auch der, dass ein bekannter Versuch von Joule nach dieser Theorie keine Erklärung finden könnte, der Versuch nämlich, bei dem comprimirte Luft aus einem Gefässe A in ein möglichst luftleer gemachtes Gefäss B überströmte, und demnächst in A eine Erniedrigung, in B eine Erhöhung der Temperatur beobachtet wurde, und zwar so, dass die gesamte Wärmemenge des Gases unverändert geblieben war. Der Verfasser giebt eine Erklärung dieser Erscheinung und stützt dieselbe auf die Maxwell'schen, von Boltzmann bestätigten Untersuchungen, wonach die verschiedenen Molecüle eines Gases mit verschiedenen Geschwindigkeiten begabt sein können.

Sbt.

G. A. Hirn. Réflexions relatives à la note précédente de M. Ladislas Natanson. C. R. CVII. 166-169.

Der Verfasser macht zu der vorher erwähnten Arbeit einige Bemerkungen, in denen er auf seinem gegnerischen Standpunkte beharrt. Er zieht aus der Behauptung, dass verschiedenen Molecülen eines Gases verschiedene Geschwindigkeiten zukommen, die Consequenzen, dass ein Molecül seine ganze Geschwindigkeit an ein anderes abgeben könnte, dass infolge dessen in einer Gasmenge Teile, deren Temperatur der absolute Nullpunkt, in unmittelbarer Nachbarschaft von solchen vorkommen könnten, die eine unbeschränkt hohe Temperatur hätten, und dass dieser Zustand sich beständig und willkürlich verändern könnte. Der

Verfasser hält dafür, dass einer Theorie, die zu solchen Ergebnissen führt, das Urteil gesprochen wäre. Sbt.

— —

A. Violi. L'isoterma dei gas. Rom. Acc. L. Rend (4) IV 285-292, 316-324, 462-470, 513-520.

Nach einer einleitenden historischen Uebersicht über die Entwickelung der Gasgesetze von Boyle und Mariotte bis van der Waals und Clausius unternimmt es der Verfasser, selbst eine neue Zustandsgleichung aus der kinetischen Theorie der Gase abzuleiten. Er setzt voraus, dass die Molecüle des Gases nach einem bestimmten Gesetze auf einander wirken, und zwar, dass diese Molecularwirkungen als Function der Entfernung ϱ gegeben seien durch $a' = f.\left(\frac{m}{\varrho}\right)^2$, eine Annahme, deren Consequenzen im Einklange sind mit den Untersuchungen von van der Waals. Die Aetheratmosphären der einzelnen Elemente, aus denen ein Molecül zusammengesetzt ist, und welche deren Wirkungssphären bestimmen, werden als gleich angenommen, so lange der äussere Druck der gleiche ist; und es wird weiter die Hypothese gemacht, dass diese Aetheratmosphären eine Condensation erfahren können.

Die Rechnungen führen schliesslich zu der folgenden allgemeinen Gleichung für die Isotherme der Gase:

$$\left\{H + \frac{a}{2\{v(1-b)(1+\alpha t)\}^2}\right\} v(1-b) = R_1.$$

Hier bedeutet H den Druck in Metern Quecksilber, t die Temperatur in Centesimalgraden, v das Volumen des Gases bei der Temperatur 0, α den Ausdehnungscoefficienten, der, wie sich hier theoretisch ergiebt, für alle Gase den gleichen Wert hat $\alpha = 0{,}00365426$; a ist die specifische Constante der Molecularattraction und b das Molecularvolumen, endlich $R_1 = \frac{1}{3\alpha} Nmu^2$ (N die Anzahl der Molecüle von der gleichen Masse m, die sich mit der gleichen mittleren Geschwindigkeit u bewegen).

Die Ergebnisse der Formel werden in der verschiedensten

Hinsicht verglichen mit den Beobachtungen von Regnault und mit den theoretischen Resultaten von van der Waals und Blaserna.

Sbt.

Ch. Antoine. Sur les variations de température des gaz et des vapeurs qui conservent la même quantité de chaleur, sous des tensions différentes. C. R. CVI. 57-60.

Bedeuten θ und θ' die absoluten Temperaturen, die dem End- und Anfangsdruck entsprechen, so ist für atmosphärische Luft die Temperaturänderung nach dem Verfasser gegeben durch die Gleichung $y = 25 . \sqrt[3]{\theta - \theta'}$. Um die Ergebnisse der Formel mit denen der Experimentaluntersuchungen von Regnault zu vergleichen, bringt der Verfasser diese Gleichung durch einen Kunstgriff in die Form $y = 17{,}5 . \sqrt[3]{t - t'}$, wo t und t' die gewöhnlichen Temperaturen sind, die für gesättigten Wasserdampf dem schliesslichen und anfänglichen Druck entsprechen. Die berechneten Werte werden mit den von Regnault gefundenen in Tabellen zusammengestellt. Für Kohlensäure lautet die entsprechende Formel $y = 15{,}6 . \sqrt[3]{t - t'}$.

Sbt.

P. G. Tait. On the mean free path and the average number of collisions per particle per second in a group of equal spheres. Edinb. Proc. XV. 225-226.

Bezieht sich auf die kinetische Gastheorie und eine Zweideutigkeit in dem Ausdrucke „mittlerer freier Weg“.

Cly. (Lp.)

P. G. Tait. Reply to Professor Boltzmann. Edinb. Proc. XV. 140-148.

Bezieht sich auf einen streitigen Punkt in der kinetischen Gastheorie.

Cly. (Lp.)

P. G. TAIT. Note on the motion of a gas „in mass". Phil. Mag. (5) XXV. 38-39.

S. H. BURBURY. On the diffusion of gases; a reply to Professor Tait. Phil. Mag. (5) XXV. 129-130.

P. G. TAIT. On some questions in the kinetic theory of gases. Reply to Professor Boltzmann. Phil. Mag. (5) XXV. 172-179.

Fortsetzungen des Streites über manche Fragen in der kinetischen Gastheorie. (Vgl. F. d. M. XIX. 1887. 1178 ff.)

Gbs.

W. S. BURNSIDE. On a simplified proof of Maxwell's theorem. Edinb. Proc. XV. 106-108.

Eine Vereinfachung eines Beweises für einen Maxwell'schen Lehrsatz in dem Aufsatze des Herrn Tait über die kinetische Gastheorie. Cly. (Lp.)

A. V. BÄCKLUND. Bidrag till theorien för vagrörelsen i ett gasartadt medium. III (Slut). Stockholm Öfv. 12

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

H. POINCARÉ. Sur la théorie analytique de la chaleur. C. R. CVII. 967-971.

Die Mitteilung ist ein Nachtrag zu einer früheren Arbeit des Verfassers (F. d. M. XIX. 1887. 1165) über die Erkaltung eines homogenen, isotropen Körpers. Es war dort die Existenz einer unbegrenzten Zahl von Functionen $U_1, \ldots, U_n, \ldots$ nachgewiesen, die für das Innere des Körpers der Gleichung $\varDelta U_n + k_n . U_n = 0$ und für die Oberfläche der Gleichung $\frac{dU_n}{dn} + h . U_n = 0$ genügen. Bei der Bestimmung der Temperatur in einem beliebigen Punkte

des Körpers spielte der Satz eine wesentliche Rolle, dass k_n unausgesetzt wachsen muss, wenn n über jede Grenze hinaus wächst. Dieser Satz wird jetzt strenger als früher und für einen Körper von beliebiger Gestalt bewiesen. Weiter wird gezeigt, wie man eine obere Grenze für k_n finden kann. Sbt.

R. Woodward. On the diffusion of heat in a homogeneous rectangular mass, with special reference to bars used as standards of length. Annals of Math. IV. 101-127.

Die Vergleichung von Längenmassen in der bisher üblichen Weise, wobei es darauf ankam, alle durch Abkühlung oder Erwärmung des Massstabes veranlassten complicirteren Erscheinungen zu umgehen, scheint den grösstmöglichen Grad von Vollkommenheit erreicht zu haben; einen weiteren Fortschritt sucht der Verfasser anzubahnen durch das Studium der verwickelteren thermischen Eigenschaften der Metalle. Die Basis desselben bilden die Untersuchungen von Fourier und Poisson. Der Verfasser betrachtet einen Stab von der Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Dimensionen $2a$, $2b$ und $2c$, der anfangs einen gleichmässigen Temperaturüberschuss u_0 hat im Vergleich zu dem umgebenden Mittel. Letzteres behält seine Temperatur unverändert bei, und unverändert bleiben auch innerhalb der betrachteten Temperaturschwankungen die innere und äussere Leitungsfähigkeit (K und H), sowie die Wärmecapacität (C) des Körpers. Unter diesen Voraussetzungen wird der Temperaturüberschuss u im Punkte (x, y, z) zur Zeit t so bestimmt, dass er der bekannten Gleichung der Wärmebewegung und den Grenzbedingungen genügt, und in etwas complicirten Ausdrücken als $F(u_0, x, y, z, t)$ dargestellt. Danach wird die mittlere Temperatur des ganzen Körpers und die einer Grenzfläche berechnet. Die allgemeinen Entwickelungen werden erläutert durch das bis in alle Einzelheiten durchgeführte Beispiel eines Eisenstabes, der sich in der Luft abkühlt, und demnächst eines eben solchen Stabes in einem anderen Mittel, für das H

einen grossen Wert annimmt. Endlich wird gezeigt, wie die thermischen Constanten C, H, K des Körpers bestimmt werden können durch Beobachtungen, die den Voraussetzungen der vorliegenden analytischen Untersuchungen entsprechen.

Sbt.

E. W. Hobson. Synthetical solutions in the conduction of heat. Lond. M. S. Proc. XIX. 279-294.

Die hier in Angriff genommenen Probleme der Wärmebewegung in zwei und drei Dimensionen werden nach der von W. Thomson eingeführten Methode der Superposition derjenigen Temperaturen behandelt, die einer geeigneten Verteilung von momentanen oder continuirlichen Wärmequellen entsprechen. Die Bedingung einer gegebenen anfänglichen Verteilung der Wärme fasst man so auf, dass eine unendliche Zahl von momentanen Wärmequellen vorhanden ist, von denen die Wärme sich durch den ganzen Körper verbreitet. Leicht genügt man so auch der Bedingung, dass die Temperatur an den Grenzen des Körpers dauernd gleich 0 sei. Wenn dieselbe als Function der Zeit und der Lage des Punktes an der Grenze gegeben ist, so denkt man sich an der ganzen Grenze Paare von Punkten, von denen der eine Wärme zuführt, der andere solche entzieht, und zwar so, dass die Verbindungslinie zweier zusammengehörigen Punkte senkrecht zu der Grenze und unendlich klein ist, während das Product aus dieser Länge und der für beide Punkte gleichen Intensität endlich ist. Durch Addition der einer solchen Verteilung von Paaren entsprechenden Temperatur zu derjenigen, die der Grenzbedingung 0 entspricht, erhält man die Lösung des Problems für die vorgeschriebenen Grenzbedingungen. Die Lösungen erscheinen in Form von bestimmten Integralen.

Bei einer Leitung in zwei Dimensionen erhält man für die Temperatur v im Punkte (x, y) zur Zeit t, sowie sie einer zur Zeit 0 im Punkte (x', y') vorhandenen momentanen Wärmequelle entspricht, den Ausdruck

$$\frac{Q}{4\pi kt}\cdot e^{-[(x-x')^2+(y-y')^2]:4kt},$$

wobei Q die erzeugte Wärmemenge und k die Leitungsfähigkeit, dividirt durch das Product aus Dichtigkeit und specifischer Wärme, bedeutet. Demgemäss ergiebt sich für ein solches, vorhin erwähntes Paar in $(x', 0)$, dessen Verbindungslinie parallel der y-Axe, wenn $Q.\delta y = Q_1$:

$$Q_1 \cdot \frac{y}{8\pi k^2 t^2} \cdot e^{-[(x-x')^2+y^2]:4kt}.$$

Durch Integration findet man auch den Wert, der einem Paare mit continuirlicher Wärmezufuhr und -Entziehung entspricht, sei es, dass die Intensität desselben constant oder mit der Zeit veränderlich, gleich $\chi(t)$, sei. Dann zeigt sich, dass der erhaltene Ausdruck verschwindet für alle Punkte der x-Axe, ausser wenn $x = x'$, und dass er in diesem Falle gleich $\frac{1}{k} \cdot \chi(t)$ ist. Es kann also die Grenzbedingung $F(x', t)$ in der Behandlung ersetzt werden durch ein solches Paar im Punkte $(x', 0)$ von der Stärke $2k.F(x', t)$.

Nach diesen Grundsätzen wird die Wärmebewegung in geradlinig begrenzten ebenen Gebilden und in Körpern, die durch Ebenen begrenzt sind, behandelt. Es wird weiterhin in derselben Weise auch die Strahlung berücksichtigt, die über die Grenzen des Körpers hinaus in ein Mittel mit einer gegebenen, von Punkt zu Punkt und mit der Zeit veränderlichen Temperatur erfolgt, unter der Beschränkung, dass die Strahlung nur durch eine begrenzende Gerade bezw. Ebene erfolgt. Sbt.

H. Meyer. Zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender fester Körper nach absolutem calorimetrischem Masse. Gött. Nachr. 41-50, Wiedemann Ann. (2) XXXIV. 596-607.

Unter der Voraussetzung, dass die äusserste Schicht eines in Wasser getauchten festen Körpers stets die Temperatur des umgebenden Wassers hat, wird die Temperatur v als Function von x, y, z, t theoretisch bestimmt. Daraus ergiebt sich die Mitteltemperatur (v) des Körpers zur Zeit t, und wenn diese experi-

mentell ermittelt wird, so findet man die Leitungsfähigkeit des Körpers nach absolutem Masse, falls dieselbe klein ist, und der Körper eine geeignete Form hat. Für einen Würfel mit der Kante $2a$ wird

$$k = \frac{4c.\delta.a^2}{\pi^2.t} \cdot \log n \frac{8.(1+\varepsilon)}{\pi^2.\sqrt[\varepsilon]{(v)}},$$

wo c die specifische Wärme, δ die Dichtigkeit des Körpers und $\varepsilon = \frac{1}{9} \cdot e^{-\frac{2\pi^2 k.t}{4c.\delta a^2}}$ ist, eine Correctionsgrösse, zu deren Berechnung ein angenäherter Wert von k ausreichend ist. Für eine Kugel wird gefunden

$$k = \frac{c.\delta.R^2}{\pi^2.t} \cdot \log n \frac{6R(1+\varepsilon)}{\pi^2.(v)}, \quad \varepsilon = \frac{1}{4} \cdot e^{-3.\frac{k}{c.\delta}.\frac{\pi^2}{R^2}.t}.$$

Die Versuche, durch welche (v) bestimmt wurde, werden eingehend beschrieben; es ergab sich für Spiegelglas $k = 0{,}107$, für Crownglas 0,098, für Flintglas 0,086 in $c.g.m.$ Einheiten.

Zur Prüfung der Zuverlässigkeit der Untersuchungsmethode wurde k für Spiegelglas noch nach einer anderen Methode ermittelt, die im Princip übereinstimmt mit einer von H. Weber für Flüssigkeiten angewandten Bestimmungsweise; nach dieser ergab sich $k = 0{,}108$. Sbt.

FORCHHEIMER. Ueber die Erwärmung des Wassers in Leitungen. Hannov. Zeitschr. XXXIV. 175-191, Z. dtsch. Ing. XXXII. 675.

Der Verfasser behandelt zunächst die stationäre Wärmebewegung in einem Gebiet, welches von einer Ebene und einer dieser Ebene parallelen Cylinderfläche begrenzt wird. In beiden Flächen sei die Temperatur constant; dann ist die Wärmeverteilung in allen Ebenen senkrecht zur Axe des Cylinders unabhängig von der Coordinate in Richtung der Cylinderaxe. Ist nun h der Abstand der Cylinderaxe vom Boden, r der Radius des Cylinders, k die innere Leitungsfähigkeit, t_0 und t_r die Temperatur an der Ebene und am Cylinder, so tritt auf dem

Axendifferential dl in der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$\frac{2\pi k(t_0-t_r)}{\ln\left(\frac{h}{r}+\sqrt{\frac{h^2}{r^2}-1}\right)}\,dl$$

in den Cylinder ein. Ist der Cylinder eine Röhre, durch welche pro Zeiteinheit die Wassermenge W fliesst, so wird die aufgenommene Wärmemenge zur Erwärmung des Wassers verwendet. Herr Forchheimer lässt nun unmerklich die Constanz der Verhältnisse in Bezug auf die Cylinderaxe fallen, indem er setzt

$$dt_r = \frac{2\pi k(t_0-t_r)}{W\ln\left(\frac{h}{r}+\sqrt{\frac{h^2}{r^2}-1}\right)}\,dl$$

und dann, wenn t_a die Anfangstemperatur bezeichnet, ableitet:

$$\ln\cdot\frac{t_0-t_r}{t_0-t_a} = -\frac{2\pi kl}{W\ln\left(\frac{h}{r}+\sqrt{\frac{h^2}{r^2}-1}\right)}.$$

Das Resultat wird mit Beobachtungen verglichen. F. K.

H. F. Weber. Untersuchungen über die Strahlung fester Körper. I. Das Emissionsgesetz der Strahlung. Berl. Ber. 933-957.

Alle bisherigen Versuche, die Stärke der Strahlung als Function der Temperatur und Wellenlänge darzustellen, haben zu keinem befriedigenden Ergebnis geführt. Der Verfasser fand nun durch zahlreiche Messungen, die er im Interesse einer physikalischen Theorie des elektrischen Glühlichtes anstellte, folgenden Zusammenhang zwischen der nach englischen Normalkerzen gemessenen mittleren räumlichen Gesamthelligkeit H, dem in Watts ausgedrückten Arbeitsverbrauch A und der Grösse der strahlenden Oberfläche O:

$$H = n\,.\frac{A^3}{O^2},$$

wo $n = 0{,}0000380$ für die grauglänzende, metallähnliche und

= 0,0000218 für die mattschwarze, russähnliche Modification der Kohle ist. Diese Beziehung war für 23 verschiedene Typen von Glühlampen und innerhalb sehr weiter Temperaturgrenzen des glühenden Kohlenfadens gültig. Es entstand deswegen das Bedürfnis, das empirische Ergebnis durch ein allgemeines Strahlungsgesetz zu begründen, und der Verfasser fand ein solches Gesetz, das sich innerhalb eines Temperaturintervalles von 0° bis 1775° C. und eines Bereiches der Wellenlänge von 0,0004 bis 0,015 mm als ein getreuer Ausdruck der Thatsachen erwies.

Bezeichnet dF die Grösse eines Oberflächenelementes des strahlenden festen Körpers, dF_1 diejenige eines beliebigen Flächenelementes, auf das ein Teil der von dF ausgehenden Strahlung fällt, ist r die Entfernung der Mittelpunkte dieser beiden Flächenelemente, und sind w und w_1 die Winkel zwischen den Normalen von dF bezw. dF_1 und der Verbindungslinie r, so ist der Ausdruck für die Energiemenge, welche bei der absoluten Temperatur T des strahlenden Körpers die von dF ausgehende homogene Strahlung mit der Wellenlänge λ dem Flächenelemente dF_1 in der Zeiteinheit zuführt:

$$d^2 s = \frac{dF \,.\, dF_1 \,.\, \cos w \,.\, \cos w_1}{r^2} \,.\, \frac{c}{\lambda^2} \,.\, e^{aT - \frac{1}{b^2 T^2 \lambda^2}}.$$

Hier hat a, der „Temperaturcoefficient“, einen für alle Körper constanten Wert 0,0043 ..., b, das „Leuchtvermögen“, und c, die „Emissionsconstante“, sind abhängig von der strahlenden Substanz.

Die von der ganzen Oberfläche F in der Zeiteinheit nach allen Richtungen ausgesandte Energiemenge, die „Stärke der homogenen Strahlung“, ist also:

$$s = c \,.\, \pi \,.\, F \,.\, \frac{1}{\lambda^2} \,.\, e^{aT - \frac{1}{b^2 T^2 \lambda^2}}.$$

Die Stärke der gesamten, alle Wellenlängen von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \infty$ umfassenden Strahlung wird

$$S = \int_0^\infty s \,.\, d\lambda = C \,.\, F \,.\, e^{aT} \,.\, T,$$

wo C, die „Constante der Gesamtstrahlung“, $= c \,.\, b \,.\, \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}$ ist.

Befindet sich ein Körper K mit der Oberfläche F und der in allen seinen Teilen gleichen Temperatur T innerhalb einer von einem zweiten Körper K_1 gebildeten, geschlossenen Höhlung mit der Fläche F_1 und der Temperatur T_1, so ist der gesamte Energieverlust des Körpers K in der Zeiteinheit:

$$\varDelta S_{T,T_1} = \frac{C.F}{1+(1-\alpha_1)\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\frac{F}{F_1}}\cdot\{e^{aT}.T-e^{aT_1}.T_1\},$$

wo α und α_1 die Absorptionscoefficienten für die Gesamtstrahlung sind. Ist $\frac{F}{F_1}$ sehr klein und α_1 nahe an 1, so darf dafür gesetzt werden:

$$\varDelta S_{T,T_1} = C.F.e^{aT_1}.T_1\left\{\frac{T}{T_1}\cdot e^{a(T-T_1)}-1\right\}.$$

Um den Grad der Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Formeln und den Beobachtungen zu veranschaulichen, behandelt der Verfasser ausführlich die spectrale Verteilung der Strahlungsenergie und vergleicht das Resultat mit den Messungen Langley's, ferner die Intensität der Gesamtstrahlung, die mit Schleiermacher's Messungen an blanken und mit Kupferoxydul bedeckten Platindrähten und mit denen von Violle an schmelzendem Platin und Silber verglichen wird, endlich die Stärke der homogenen Strahlung, für welche die Beobachtungen von Langley, Garbe, Tyndall und Nichols eine Bestätigung der Formel liefern.

Sbt.

O. Tumlirz und A. Krug. Die Energie der Wärmestrahlung bei der Weissglut. Wien. Ber. XCVII. 1521-1559.

Die Verfasser versuchten die Energie des Lichtes, das von einem durch den galvanischen Strom weissglühend gemachten Platindrahte ausgeht, zuerst indirect zu bestimmen, indem sie den in eine Glasröhre eingeschlossenen Draht in ein Calorimeter einsenkten und die in dasselbe übergeführte Wärme einmal bei bedeckter, das andere Mal bei unbedeckter Glasröhre ermittelten. Es ergab sich, dass der Unterschied viel kleiner war als der wahrscheinliche Fehler des Resultates in beiden Fällen, woraus

geschlossen werden muss, dass die Energie des ausgesandte Lichtes ausserordentlich klein ist, so klein, dass sie auf dies Weise gar nicht gemessen werden kann. Der Versuch ist zu gleich eine Bestätigung des Joule'schen Gesetzes für sehr hoh Grade der Weissglut. Es wurde danach die Gesamtstrahlun und das Verhältnis derselben zum Gesamtverlust direct bestimm mit Hülfe eines besonderen, von den Verfassern construirten u in der Arbeit ausführlich beschriebenen Luftthermometers. Di stärkste Emission, die erhalten wurde, betrug 0,944 Gramm calorien für 1 qcm und 1^s. Sbt.

E. Beltrami. Intorno ad alcuni problemi di propaga zione del calore. Nuovo Cimento (3) XXIII. 97-109, XXIV. 24-32 145-152.

Abdruck aus Bologna Mem. (6) VIII. Vergl. F. d. M. XIX. 1887. 1191 ff.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Capitel 1.

G e o d ä s i e.

W. JORDAN. Handbuch der Vermessungskunde. I. Bd. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. II. Bd. Feld- und Land - Messung. 3. Aufl. Stuttgart. Metzler.

Die dritte Auflage des vorliegenden Handbuches ist auf drei Bände berechnet, wovon die beiden ersten jetzt erschienen sind. Der erste Band, die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, der im wesentlichen dem ersten Teil des ersten Bandes der vorigen Auflage entspricht, ist gegen diesen nicht nur gründlich umgearbeitet und vielfach vermehrt, sondern er bringt auch die Fortschritte der Ausgleichungen der preussischen Landesaufnahme mit zur Darstellung. In fünf Capiteln, wovon jedes einzelne seiner Reichhaltigkeit wegen hier nicht weiter zergliedert werden kann, sind ausführlich behandelt: die allgemeine Theorie der kleinsten Fehlerquadratsumme, die trigonometrische Punkteinschaltung, die Ausgleichung der Triangulirungsnetze, das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit und die Theorie der Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung. Hieran schliessen sich noch vier Tafeln mit den Quadratzahlen,

den Reciprokzahlen der Quadrate, den Richtungscoefficienten und den Fehlerwahrscheinlichkeitszahlen.

Der zweite Band, die Feld- und Landmessung, ist eine gleichfalls gründliche Neubearbeitung des zweiten Teiles des ersten Bandes der vorigen Auflage. Mit sehr vielen Erweiterungen versehen, wozu namentlich auch die vom Verfasser ausgeführten grösseren praktischen Arbeiten mit beigetragen haben, entspricht dieser Band nach allen Richtungen hin dem heutigen Stande der Landmessung. In 16 Capiteln, welchen am Ende noch 55 Hülfstafeln angehängt sind, finden eine erschöpfende Darstellung: die einfachsten Arbeiten des Feldmessens und ihre Verbindung zu kleineren Aufnahmen, die Berechnung und Teilung der Flächen, die mechanischen Hülfsmittel für Berechnungen, die Libelle, die optischen Instrumente, der Theodolit, die Coordinaten- und Azimutrechnung, die Triangulirung, die polygonalen Züge, die Nivellirung, die trigonometrische Höhenmessung, die barometrische Höhenmessung, der Distanzmesser, die Tachymetrie, der Messtisch und das Abstecken von Linien.

Bald wird der dritte, die höhere Geodäsie umfassende Band erscheinen, und die geodätische Literatur befindet sich dann im Besitz der Neuauflage eines Werkes der gesamten Wissenschaft, das für jeden, der sich mehr als oberflächlich mit dem Fach beschäftigt, unentbehrlich ist. P.

W. Jeep. Barfuss' Handbuch der Feld-Messkunde. 4. vollständig umgearbeitete und wesentlich gekürzte Auflage. Mit einem Atlas von 29 Tafeln. Weimar. Voigt. XII u. 144 S. (1889.)

Das schon an anderer Stelle (Zeitschr. f. Vermessungswesen XVII. 650) vom Referenten besprochene Werk enthält eine Beschreibung: 1. der Instrumente und Geräte zum Messen gerader Linien, zum Abstecken und Bezeichnen der Punkte auf dem Felde, zum Visiren, zum Abstecken rechter Winkel, zum Messen von Winkeln nach Graden, zum Nivelliren, des Messtisches mit Zubehör und der Bussole; 2. der Prüfung, Justirung und Be-

handlung dieser Instrumente; 3. der Arbeiten auf dem Felde; 4. des Nivellirens; 5. des Absteckens von Curven; 6. der Anfertigung der Pläne. P.

---

v. Reitzner. Grundzüge der allgemeinen praktischen Geometrie und der militärischen Landes-Aufnahme. Wien. Seidel & Sohn.

E. T. Henchie. An elementary treatise on mensuration. London. Schoolbooks publishing Company.

Anzeige in Nature XXXVIII. 490.

E. C. Boccardo. Trattato elementare completo di geometria pratica. Dispensa 18 e 19 (ultima) (1887). Dispensa 20. (Parte II: Topografia, dispensa 1). Torino (1888).

G. Hiebel. Die geometrische Behandlung der topographischen Fläche. Wien VIII + 25 S.

A. Baule. Sammlung von Aufgaben der praktischen Geometrie. Berlin. Springer.

Es sind Aufgaben behandelt: 1) zu deren Lösung vorwiegend constante Winkel abgesteckt und Strecken gemessen sind, 2) in denen es sich um die mittlere Messung von Strecken und Winkeln handelt unter Anwendung von Theodolit und Stahlband, 3) über die Aufnahme und Berechnung von Polygonen, 4) über den Anschluss eines Vermessungswerkes an die Landesvermessung, 5) über das Abstecken von Kreiscurven, 6) über die Teilung von Figuren, 7) über die Aenderung der Begrenzung von Flächen mit gleicher und verschiedener Bonität, 8) über Fehlerverteilung in den Winkeln, Coordinaten, Strecken und Flächen, 9) über Flächenmessungen.

Die Aufgaben gehören durchweg dem Gebiete der niederen Geodäsie an. P.

VOGLER. Mess- und Rechenübungen. Jordan Z. f. V. XVII. 449-463, 609-632.

Es sind folgende, von Zahlenbeispielen begleitete Aufgaben behandelt:

1. Einschalten eines Punktes in eine Gerade mit unzugänglichen Endpunkten.

2. Trigonometrische Messung einer Turmhöhe von zwei Standpunkten aus, welche mit dem Ziel in einer Verticalebene liegen, und Anschluss an eine gegebene Höhenmarke.

3. Auf dem Felde sei gegeben eine Berührende und ein Punkt eines Kreises, dessen Halbmesser bekannt ist; den Berührungspunkt abzustecken.

4. Auf dem Felde seien gegeben zwei Berührende einer Curve, deren Halbmesser bekannt ist; fünf Hauptpunkte abzustecken, nämlich Curvenanfang und -Ende, den Scheitel und zwei Zwischenscheitel.

5. Einfaches Nivellement zum Einwägen einer Neumarke im Anschluss an einen Bolzen der Landesaufnahme, mit Messprobe.

6. Nivellement mit Wendelatte unter Abschluss einer Schleife zum Einwägen einiger Neumarken.

7. Von einem Kreis von 120 m Halbmesser sind zwei zugängliche Punkte abgesteckt, diese aber gegenseitig nicht sichtbar und ihr Abstand direct nicht messbar; einen dritten Kreispunkt zu bestimmen.

8. Einen Kreis an drei sich schneidende Gerade berührend zu legen, nach Messung der Brechungswinkel mit dem Theodolit; neun Hauptpunkte abzustecken.

9. Einen Kreis an zwei sich schneidende Gerade berührend zu legen, wenn ein Berührungspunkt gegeben ist.

10. Einen Kreis an drei sich schneidende Gerade berührend zu legen, ohne Messung der Brechungswinkel mit dem Theodolit.

11. und 12. Triangulation eines Vierecks mit Diagonalen;

sämtliche acht Winkel durch sechsfache Repetition zu messen; Ausgleichung zunächst nur auf Grund der Winkelbedingungen, und dann vollständige Ausgleichung. P.

J. Marchand. Problèmes de géométrie appliqués à la géodésie agraire. Louvain. VIII + 59 S. (autographié).

Bauernfeind. Das Bayerische Präcisions-Nivellement. Siebente Mitteilung. München. G. Franz.

Die im Vorliegenden veröffentlichten Nivellementsstrecken sind in chronologischer Ordnung die Linien: 1. Neuenmarkt-Kulmbach-Lichtenfels, 2. Oberkotzau-Hof, 3. Kirchenlaibach-Redwitz-Eger, 4. Coburg-Lichtenfels-Bamberg, 5. Bamberg-Schweinfurt-Partenstein, 6. Partenstein-Aschaffenburg-Kahl, 7. Nürnberg-Ansbach-Crailsheim, 8. Marktl-Burghausen-Freilassing, 9. Schwandorf-Cham-Furth i/W., 10. Kempten-Immenstadt-Füssen-Plansee-Partenkirchen, 11. Gemünden-Burgsinn-Elm.

Von diesen Strecken wurden 1, 4 und 6 ganz, 5 teilweise wiederholt und an 10 noch ein Zweignivellement an den Badersee und den Eibsee angeschlossen. Die Arbeiten sind in den Jahren 1883, 1886 und 1887 mit den in der „Ersten Mitteilung" beschriebenen Ertel'schen grossen Nivellirinstrumenten und teilweise neuen Latten ausgeführt worden. Ebenso wie in den früheren Mitteilungen sind auch hier die genannten 11 Strecken gruppenweise beschrieben mit Angaben über die Zielweiten, die Bestimmungen der Constanten der Instrumente, die Lage und Beschaffenheit der einnivellirten Fixpunkte, sowie über die Genauigkeit der Messungen und die Zeit, die sie in Anspruch nahmen. P.

Howard Gore. Die geodätischen Arbeiten in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika. Jordan Z. f. V. XVII. 33-39, 203-207, 385-391, 394-395.

Es sind nach einander beschrieben:

1. Die Pennsylvanische Gradmessung von Mason und Dix (1764-1768);
2. Borden's Vermessung von Massachusetts;
3. Die Seenvermessung der Vereinigten Staaten. P.

J. KLEIBER. Theorie der Ausgleichung der Beobachtungen. Kasan. Nachr. 1888. 1-99.

H. STADTHAGEN. Beiträge zur Untersuchung des Genauigkeitsgrades astronomischer Berechnungen mit Anwendung auf eine in der geographischen Ortsbestimmung häufig vorkommende Aufgabe. Berlin. 84 gr. 8°.

W. JORDAN. Ueber die günstigste Gewichtsverteilung. Der Schreiber'sche Satz. Jordan Z. f. V. XVII. 641-649.

Es wird der von Herrn O. Schreiber in der Zeitschrift für Vermessungsw. 1882, S. 141, ausgesprochene Satz über die günstigste Gewichtsverteilung bei der Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen einer näheren Erörterung unterzogen. Der Satz lautet im wesentlichen: Wenn in einem Dreiecksnetz mit Bedingungsgleichungen eine Seite S mit möglichst grossem Gewicht P bei constanter Summe $[p]$ der Winkelmessungsgewichte $p_1, p_2, \dots$ bestimmt werden soll, so ist unter den hierzu möglichen Verteilungen der Gewichte $p_1, p_2, \dots$ jedenfalls eine Verteilung, in welcher nur so viele Gewichte p wirklich vorkommen, als die Zahl der zur Bestimmung von S unumgänglich nötigen Winkel (oder Richtungen u. s. w.) beträgt, während die übrigen Gewichte p alle gleich Null zu setzen sind.

Da der allgemeine Beweis auf ein System hochgradiger Gleichungen führt, so hat Verfasser ein Zahlenbeispiel für einen bestimmten Fall zur Erläuterung mit herangezogen. P.

HATT. Sur l'évaluation des erreurs inhérentes au système des coordonnées rectangulaires. C. R. CVI. 921-924.

Von einer Dreieckskette, deren äussere Seiten, sowie die inneren, ein regelmässiges Polygon (Vierundzwanzigeck) bilden, ist unter bestimmten Annahmen über die Ausdehnung der Kette, von einem Punkte ausgehend, unter Zugrundelegung von rechtwinkligen Coordinaten, der Schlussfehler angegeben; nachher sind auf Grund verschiedener Coordinatensysteme die Längen zweier Seiten berechnet, um zu zeigen, dass die geodätischen Polarcoordinaten die geringste Abweichung liefern. P.

W. JORDAN. Genauigkeitsverhältnisse der Polygonzug-Messung. Jordan Z. f. V. XVII. 1-18.

Die vom Verfasser ausgeführte Triangulirung und Polygonisirung der Stadt Linden bei Hannover hat ihm Gelegenheit geboten, mit Rücksicht auf das dadurch erlangte Material interessante Betrachtungen über die Polygonzugmessung anzustellen. Nach einer kurzen Erläuterung der Triangulirung mit Angabe ihrer Genauigkeit ist die Festlegung und Versicherung der Polygonpunkte, sowie die Centrirungsvorrichtung für den Theodolit und die Signale an der Hand von Zeichnungen beschrieben, und hierauf die Genauigkeit der Polygonwinkel- und Längenmessung, sowie der Anschlüsse zwischen den Polygonzügen und der Triangulirung besprochen. Danach beträgt der mittlere Winkelfehler $\pm 15''$ für Züge, die direct an trigonometrische Punkte angeschlossen sind, und $\pm 21''$ für Züge, die zwischen Polygonpunkten liegen; während der mittlere unregelmässige Fehler des Mittels zweier Längenmessungen der Länge l sich zu $0{,}444\sqrt{l}$ berechnet.

Von besonderem Interesse sind die Längenwidersprüche zwischen der Triangulirung und der Polygonisirung, da die Basis für erstere nur eine vorläufige, aus alten Gauss'schen Punkten der hannoverschen Gradmessung abgeleitete war. Dieser Längenwiderspruch, der naturgemäss überall in demselben Sinne

auftrat, betrug im Mittel −0,20 m auf 1000 m, so dass derselbe zu einer vorläufigen Verbesserung der Basislänge benutzt werden konnte. P.

F. Siacci. Sulla compensazione delle poligonali che servono di base ai rilievi topografici. Torino Atti XXIII. 430-432.

Es wird die Ausgleichung der Seiten eines Polygonzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate besprochen. Die im Eingange befindliche Aeusserung, die Seitenfehler eines Polygonzuges seien unabhängig von den Winkelfehlern desselben, trifft für die Ausgleichung nicht zu, weshalb auch die hier vorausgesetzte Trennung der Seiten- und Winkelausgleichung nicht zulässig ist. P.

N. Jadanza. Sulla misura diretta ed indiretta dei lati di una poligonale topografica. Torino Atti XXIV. 177-194.

Im ersten Abschnitt sind zur Untersuchung der Längenmessgenauigkeit für Längen bis zu 200 m die Ergebnisse der Messungen im ebenen und Hügellande mit einem Clepsdistanzmesser von Salmoiraghi (1. Grösse), einem englischen Tachymeterdistanzmesser und der Dreimeterlatte neben einander gestellt und die mittleren Fehler für jeden Fall abgeleitet. Verfasser findet, dass im coupirten Terrain der Distanzmesser, insbesondere derjenige des Cleps, genauere Resultate liefert, als die Lattenmessung. Die angezogenen Zahlen der Versuchsmessungen für diesen Fall zeigen aber, da bei einer Länge von 50 m die Lattenmessungen unter sich um 0,5 m abweichen, dass diese in einer Weise ausgeführt sein müssen, die den Namen Lattenmessung nicht verdient.

Im zweiten Abschnitt ist ein geschlossenes Polygon, dessen Winkel wieder auf dreifache Weise gemessen wurden, nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen. Es ist dabei erst der Winkelwiderspruch auf die Winkel gleichmässig verteilt, und nachher sind die Seiten nach der Methode der bedingten Beobachtungen, wobei es allerdings nur zwei Normalgleichungen auf-

zulösen giebt, ausgeglichen worden. Dieses Verfahren ist deshalb nicht richtig, weil bei einer Trennung der Winkel- und Seitenausgleichung die erste durch die letzte wieder zerstört wird. P.

J. Bischoff. Neue Beziehungen auf dem Geoid.
Astr. Nachr. CXIX. No. 2844. 176-184.

Es wird mittels sphärischer Trigonometrie gezeigt, wie man die Differenz zwischen wahrem und sphärischem Azimut eines Punktes der Erdoberfläche in Bezug auf einen anderen, den Unterschied der Azimute der beiden Verticalschnitte, welche je durch das Lot des einen Punktes und durch den anderen hindurchgehen, ihren Flächenwinkel und die sogenannten Depressionswinkel berechnen kann, wenn als bekannt vorausgesetzt sind die Zenitdistanz der beiden Oerter, d. h. der Winkel, welchen ihre Lote mit einander bilden, und die Neigungen der beiden obigen Verticalebenen gegen das Lot, durch welches sie nicht hindurchgehen. Diese Formeln werden auf das Rotationsellipsoid angewandt und ihre Reduction für kleine Entfernungen angegeben. Dz.

P. Pizzetti. Gli azimut reciproci di un arco di geodetica.
Torino Atti XXIII. 433-448.

Ausgehend von der Bessel'schen Differentialgleichung der geodätischen Linie, behandelt der Verfasser die Ermittelung des Unterschiedes der Azimute einer geodätischen Linie in ihren Endpunkten für eine beliebige, nur wenig von der Kugel abweichende Fläche, wobei die Breite als Function der Länge eingeführt und der Unterschied der Sinus der Breiten in eine Reihe nach Potenzen des Längenunterschiedes entwickelt wird. Die Methode ist noch besonders auf das Rotations- und das dreiaxige Ellipsoid angewandt. P.

N. Jadanza. Sul calcolo degli azimut mediante le coordinate rettilinee. Torino Atti XXIII. 89-106.

Es handelt sich um die Berechnung des Azimutes einer

kurzen geodätischen Linie in ihren durch rechtwinklige Coordinaten gegebenen Endpunkten für den Fall, dass diese beiden Punkte noch innerhalb eines Blattes der Karte von Italien liegen. Zunächst sind mittels der Legendre'schen Formeln für den Breiten- und Längenunterschied, die Meridianconvergenz und das Gegenazimut aus den geographischen Coordinaten zweier Punkte die rechtwinkligen Coordinaten abgeleitet, die Rechnung durch ein Zahlenbeispiel erläutert und nachher aus diesen rechtwinkligen Coordinaten die Azimute in den Endpunkten der Verbindungslinie berechnet. Zum Schlusse ist dann noch die Berechnung der geographischen Coordinaten aus den rechtwinkligen Coordinaten mit den entsprechenden Formeln an einem Beispiel durchgeführt. Tabellen zur Vereinfachung der Rechnung nebst einem Verzeichnis der Breiten und Längen der Blattmitten (Anfangspunkte der rechtwinkligen ebenen Coordinaten) der einzelnen Blätter der Karte von Italien sind der Abhandlung angehängt.

P.

C. Haenig. Ueber Hansen's Methode, ein geodätisches Dreieck auf die Kugel oder in die Ebene zu übertragen. Diss. Leipzig. 36 S. 4°.

F. Zrzavy. Vereinfachung des absoluten Gliedes bei der Seitengleichung nach Baeyer. Prag. Ber. 189-191.

Das absolute Glied $\frac{1}{\sin 1''}\left(\frac{\sin\alpha\,\sin\beta\,\ldots}{\sin\alpha'\sin\beta'\ldots}-1\right)$ der Seitengleichung nach Baeyer ist, wenn der Logarithmus des Bruches in der Klammer gleich $\pm\log D$ gesetzt und mit M der Modul der Brigg'schen Logarithmen bezeichnet wird, auf die Form

$$\pm\frac{\log D}{M\sin 1''}=\frac{10^7\log D}{10^7 M\sin 1''}$$

gebracht worden.

P.

Gerling. Die Pothenot'sche Aufgabe in praktischer Beziehung dargestellt. Zweite Ausgabe. Marburg. Elwert.

Das im Jahre 1840 erschienene, jetzt neu gedruckte Werkchen enthält nach einigen Vorbemerkungen über die Pothenot'sche Aufgabe: 1) deren Auflösung durch Rechnung, wenn nur drei Punkte gegeben sind und wenn mehr Punkte und Winkel als notwendig gegeben sind, mit Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate; 2) die Auflösung mittels des Messtisches.

P.

DECHER. Die einfache und die Doppelpunkteinschaltung in Dreiecksnetze. Jordan Z. f. V. XVII. 140-152.

Die Lösung der Pothenot'schen Aufgabe und der Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte ist auf die Eigenschaften der Dreiecke im Kreise, die als geometrische Oerter die Punkte bestimmen, gegründet.

P.

LORBER. Ueber die Winkelsumme in Polygonen mit Seitendurchschneidungen. Jordan Z. f. V. XVII. 593-599.

Es ist die Formel für die Winkelsumme und die sich daraus ergebende Regel abgeleitet.

P.

W. JORDAN. Coordinaten - Umformung mit Massstabsänderung. Jordan Z. f. V. XVII. 305-310.

Die in der Abhandlung desselben Verfassers: „Genauigkeitsverhältnisse der Polygonzugmessung" (Jordan Z. f. V. XVII. 1-18, vgl. oben S. 1233) besprochene Triangulirung und Polygonisirung der Stadt Linden veranlasste den Verfasser, die ursprünglich auf das Gauss'sche System der hannoverschen Gradmessung gegründeten Coordinaten mit dem Ursprung Göttingen auf den Ursprung Celle des neuen Systems des Katasters umzuformen. In der vorliegenden Abhandlung sind die Formeln für die Verwandlung der geographischen Coordinaten in rechtwinklige sphärische Coordinaten, sowie die Transformationsformeln für letztere mit Rücksicht auf die Massstabsänderung zusammengestellt.

P.

F. Zrzavy. Eine Bemerkung zur Berechnung der Höhenunterschiede aus gemessenen Zenitdistanzen. Prag. Ber. 191-194.

Wenn bei der Zenitdistanzmessung für eine Höhenbestimmung ein excentrischer Punkt anvisirt wird, so muss noch der Unterschied der Entfernungen Standpunkt-Centrum und Standpunkt-Zielpunkt ermittelt werden. Verfasser zeigt, wie dies mittels einer Boussole, wenn das Object, dessen Höhe bestimmt werden soll, z. B. eine Kirchturmspitze ist, geschehen kann. P.

Koppe. Die Verfahren der Ausführung und der Berechnung barometrischer Höhenaufnahmen. Jordan Z. f. V. XVII. 561-584, 603.

Nach einer geschichtlichen Uebersicht über die barometrische Höhenmessung werden die heutigen Messmethoden und die gebräuchlichen Formeln und Tafeln zur Berechnung der Höhen aus Barometerständen ausführlich besprochen. P.

J. M. Pernter. Ueber die barometrische Höhenmessformel. Mit neuen Tafeln. Exner Rep. XXIV. 161-178.

Der Grund zur neuen Bearbeitung des Gegenstandes liegt für den Verfasser darin, die Aufgabe zu lösen, „einerseits eine fehlerhafte Voraussetzung in Bezug auf die Abnahme der Schwere mit der Höhe auf den Continenten aus der gewöhnlichen Formel zu eliminiren, andererseits die nun genauer festgestellten richtigeren Constanten einzuführen und endlich die Einführung von nur solchen Barometerständen in die Höhenmessformel, welche wegen aller Fehler corrigirt sind, vorzuschlagen“.

Die endgültige Formel lautet:

$$h = 18399{,}8\{1+\tfrac{1}{2}(t'+t'')\alpha\}\left[1+0{,}378\cdot\tfrac{1}{2}\left(\frac{e'}{b'}+\frac{e''}{b''}\right)\right]$$
$$\cdot(1+0{,}00259\cos 2\varphi)\cdot\left(1+\tfrac{5}{8}\,\frac{2z+h}{6371103}\right)\log\frac{b'}{b''}\cdot$$

Ausser den allgemein üblichen Bezeichnungen bedeutet hierin e

den Dampfdruck des Wassers in der Luft, z die Höhe der unteren Station über dem Meeresspiegel. Acht beigegebene Tafeln sollen die Zahlenrechnungen erleichtern. Lp.

W. Köppen. Einfache barometrische Höhenformeln.
Met. Zeitschr. V. 369-371.

Umformungen der Babinet'schen Formel, von denen die folgenden hervorgehoben werden mögen:

$$B-b = \frac{h}{50} \cdot \frac{762+b}{267+t},$$

(B und b die Barometerstände an den Endstationen, h die Höhendifferenz, t die mittlere Temperatur der Luftsäule);

$$B-b = \frac{h}{50} \cdot \frac{456+b}{256+t_h} \quad \text{oder} \quad = \frac{h}{54} \cdot \frac{520+b}{250+t_h},$$

(t_h Temperatur am oberen Ende der Luftsäule; für eine Temperaturabnahme von resp. 0,78° und 0,58° auf je 100 m.)

Lp.

H. Poincaré. Sur la figure de la Terre. C. R. CVII. 67-71.

Es wird untersucht, ob sich ein Gesetz für die Veränderung der Dichte der Erde ermitteln lässt, das der Clairaut'schen Formel, dem Abplattungswerte $\frac{1}{293}$ und der Präcessionsconstante 305,6 entspricht. Verfasser gelangt zu dem Resultate, dass dies nicht der Fall ist. P.

M. Lévy. Sur la théorie de la figure de la Terre.
C. R. CVI. 1270-1276, 1314-1320, 1375-1381.

Der von Herrn Lipschitz bearbeitete Gegenstand in der im Journal für Math. LXII. veröffentlichten Abhandlung: „Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, das die Dichtigkeit für die Schichten im Innern der Erde annähernd darstellt, aus den gegebenen Beobachtungen", ist vom Verfasser weiter so behandelt, dass die Präcession mit als Bedingung hineingezogen ist.

P.

G. W. Hill. On the interior constitution of the earth as respects density. Annals of Math. IV. 19-29.

Der Verfasser geht von der uns auch durch geologische Erwägungen nahe gelegten Annahme aus, dass die Masse des Erdinnern in grösseren Entfernungen von der Oberfläche sich in einem plastischen Zustande befinde. Dichte (ϱ) und Druck (p) denkt er sich, unter A und B gewisse Constanten verstanden, durch die Gleichung $\varrho = A+Bp$ verbunden, während für das Potential V im Punkte (x, y, z) die folgenden beiden Gleichungen bestehen sollen:

$$dp = \varrho dV; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho.$$

Diese drei Gleichungen discutirt der Verfasser und leitet, indem er $v = \log\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $s = 4\pi B\varrho(x^2+y^2+z^2)$ setzt, für die Beziehung zwischen σ und v nachstehende Differentialgleichung her:

$$\frac{d^2(\log\sigma)}{dv^2}+\frac{d(\log\sigma)}{dv}+s = 2.$$

Die für verschiedene Abstände vom Erdmittelpunkte sich ergebenden Dichten werden berechnet und tabellarisch zusammengestellt; auch werden die eigentümlichen Curven construirt, welche, wenn s und $\frac{d(\log\sigma)}{dv}$ als Coordinaten gelten, der zuletzt angeschriebenen Differentialgleichung entsprechen. Uebrigens hätte doch wohl statt desjenigen der ruhenden das Potential der sich um ihre Axe drehenden Erdkugel eingeführt werden sollen, und dann würde die für die zweiten partiellen Ableitungen von V sich ergebende Relation sich etwas anders gestalten, als oben angenommen wurde. Gr.

Ch. Defforges. Sur la mesure de l'intensité absolue de la pesanteur. C. R. CVI. 126-129, 191-194.

Nachdem im ersten Teil gezeigt ist, wie durch zwei ungleichlange Reversionspendel, die mit denselben Schneiden gebraucht werden, der durch das Mitschwingen des Stativs hervorgerufene Fehler eliminirt werden kann, ist im zweiten Teil ein auf dieses

Princip gegründeter, von Brunner angefertigter Pendelapparat nebst den Vorrichtungen zum Messen der Schwingungsdauer und zur Bestimmung des Betrages, um welchen sich das Stativ fortbewegt, sowie auch der Comparator zur Bestimmung der Länge und des Schwerpunktes jedes Pendels beschrieben. (Vergl. das folgende Referat.) P.

Ch. Defforges. Sur l'intensité absolue de la pesanteur. Almeida J. (2) VII. 239-250, 347-364, 455-478.

Die Arbeit bezieht sich auf die Ermittelung der Constante der Schwere durch Pendelbeobachtungen und stellt alle Erwägungen zusammen, welche die Theorie und die Versuchsanordnung betreffen. Die Abhandlung ist zu diesem Zwecke in folgende Abschnitte geteilt: I. Vorläufige Betrachtungen. II. Das umkehrbare Repsold'sche Pendel. III. Bewegung der Stütze. Beobachtungsmethode, um ihren die Schwingungsdauer störenden Einfluss zu eliminiren. IV. Brünner'sche Pendel. V. Beobachtungsmethoden. (Vergl. das vorangehende Referat.)

Lp.

N. Jadanza. Sullo spostamento della lente anallattica e sulla verticalità della stadia. Torino Atti XXIII. 294-302.

Es ist zuerst ermittelt, welche Veränderung der Lage des anallatischen Punktes sowohl als der Grösse des diastimometrischen Winkels eines anallatischen Distanzmessfernrohres eine Verschiebung der Collectivlinse zur Folge hat; nachher ist der Einfluss der Lattenschiefe auf die Distanzmessung untersucht.

P.

Fr. Kreuter. Das neue Tacheometer aus dem Reichenbach'schen mathematisch-mechanischen Institute T. Ertel & Sohn in München. 2. Aufl. Brünn. Winiker.

Die schon in dem „Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens 1888“, S. 152 vom Referenten besprochene Broschüre enthält eine Beschreibung des Tachymeters von Kreuter (siehe

auch Jordan's Handbuch der Vermessungskunde 3. Aufl., II. 594), des Ganges der Feld- und Hausarbeiten bei Trassirungen und einen Anhang mit Formeln und Tabellen für die neue Kreisteilung, sowie einer Uebersicht über die bei Feldarbeiten erforderlichen Geräte und Arbeitskräfte. P.

LORBER. Ueber Coradi's Kugelplanimeter. Jordan Z. f. V. XVII. 161-187.

Die gleitende Bewegung der Messrolle der Planimeter so gering als möglich zu machen, war der Zweck der Herstellung des Kugelplanimeters, bei welchem ein Kugelsegment der Messrolle als Unterlage dient. Von Coradi werden zwei Arten Kugelplanimeter angefertigt, wovon die eine, das Kugelrollplanimeter, rechtwinklige Coordinaten, die andere, das freischwebende Kugelpolarplanimeter, Polarcoordinaten für die Flächenbestimmung voraussetzt. Von beiden Arten sind Beschreibung, Theorie und Genauigkeitsuntersuchungen gegeben. P.

Capitel 2.

Astronomie.

J. F. ENCKE. Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen. Herausgegeben von GRAVELIUS. 3 Bde. Berlin. Ferd. Dümmler's Verlag. IV + 211 S., VI + 248 S., IV + 158 S. 8°.

Die Sammlung umfasst die wichtigsten Schriften Encke's allgemein wissenschaftlichen Inhalts. Der erste Band enthält sechs Abhandlungen über Rechnungsmethoden, der zweite drei Abhandlungen über die Methode der kleinsten Quadrate und der dritte acht Abhandlungen über mathematisch-astronomische und optische Gegenstände. (Vgl. S. 13 dieses Bandes.) Dz.

S. P. Langley. The new astronomy. Boston. Ticknor and Co. Anzeige in Nature XXXVIII. 291-292.

R. A. Proctor. Old and new astronomy. A treatise on astronomy. London.

E. Caspari. Cours d'astronomie pratique; application à la géographie et à la navigation. Partie I: Coordonnées vraies et apparentes. Théorie des instruments (1888). Partie II: Détermination des éléments géographiques. Applications pratiques (1889). Paris. Gauthier-Villars et Fils. XII + 287, VIII + 347 S.

G. Naccari. Lezioni di astronomia nautica per i capitani di gran cabotaggio, secondo i programmi. Padova. XVI + 152 S.

Loewy et P. Puiseux. Théorie nouvelle de l'équatorial coudé et des équatoriaux en général. C. R. CVI. 704-711, 788-793, 891-898, 970-977, 1320-1326, 1483-1489.

Loewy et P. Puiseux. Influence de la pesanteur sur les coordonnées mesurées à l'aide des équatoriaux. C. R. CVI. 1199-1206.

E. Perrin. Détermination exacte de la latitude et du temps du lieu à l'aide d'observations au sextant par la méthode des hauteurs égales d'étoiles. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. Caspari. Formule pour le calcul des longitudes par les chronomètres. C. R. CVII. 78-80.

Der Gang eines Chronometers ist nicht gleichmässig, und

wenn man es auf einer Reise benutzt, so muss man sich übe denselben zu orientiren suchen, indem man mittels desselben a verschiedenen Orten, deren Länge schon anderweitig bekannt is die Abweichungen feststellt. Diese Abweichungen werden al Ordinaten aufgetragen, während die Abscissen die entsprechen den Zeiten sind. Die gebrochene Curve, welche die Coordinaten endpunkte verbindet, wird dann durch eine andere gebrochen Curve ersetzt, deren Ecken auf den Ordinaten liegen, dere Endpunkte unverrückt bleiben, und für welche die Summe de Quadrate der einzelnen Strecken ein Minimum ist. Dz.

A. Germain. Étude de la déviation de la verticale su les côtes sud de France. Flammarion, Rev. d'Astr. VII. 174-177

F. Folie. Traité des réductions stellaires. Liège Mém. … XIV. V + 88 S.

1. Präcession und Nutation (jährliche und tägliche). 2. Aberration und Parallaxe der Sterne. — In der Vorrede weist der Verfasser auf fünf Fehlerursachen in den gebräuchlichen Formeln bezüglich der Sternreductionen hin: tägliche Nutation, Erdlibration, Fortschreiten des Sonnensystems, numerische Ungenauigkeit der Coefficienten der Nutation, Unveränderlichkeit des mittleren Tages. In der Hauptarbeit selbst versucht er zu zeigen, wie man die Sternörter von den meisten dieser Fehler befreien kann. Mn. (Lp.)

F. Folie. Sur les formules de réduction des circompolaires en ascension droite et en déclinaison. Belg. Bull. (3) XV. 701-711, XVI. 312-316.

Die Reductionsmethode von Fabritius-Oppolzer ist weder vom theoretischen, noch vom praktischen Gesichtspunkte aus gut; praktische Formeln zum Ersatze für die von Fabritius.

Mn. (Lp.)

F. Folie. Note sur son „Traité des réductions stellaires". Belg. Bull. (3) XV. 256-257.

Das erste Heft enthält die Theorie der Präcession, der jährlichen und täglichen Nutation, der Aberration und der Parallaxe der Sterne unter Berücksichtigung der Fortbewegung des Sonnensystems. Mn. (Lp.)

F. Folie. Note sur la méthode la plus sûre pour déterminer la constante de l'aberration au moyen d'une série d'observations d'une même étoile en ascension droite. Belg. Bull. (3) XV. 618-621.

Wenn der Stern eine Rectascension von 18 Stunden und einen Polabstand gleich der Ekliptikschiefe hat, so enthält die Reductionsformel nur noch die Aberrationsconstante, die jährliche Parallaxe des Sterns und eine der Coordinaten der Sonne; es ist nur noch ein Fehler nicht eliminirt, der vom Pendel herrührende. Mn. (Lp.)

F. Folie et J. Liagre. Rapport sur le mémoire de M. Niesten, intitulé: De l'influence de la nutation diurne dans la discussion des observations de α Lyrae faites à l'observatoire de Washington. Belg. Bull. (3) XVI.

Herr Niesten findet für die tägliche Nutation 0,095 Secunden und 69° Länge von Paris für den ersten natürlichen Meridian, aber eine negative Parallaxe von 0,07 Secunden für den untersuchten Stern, was die beiden andern Resultate entwertet. Mn. (Lp.)

L. de Ball. Détermination de la parallaxe relative de l'étoile principale du couple optique Σ 1516 AB. Belg. Mém. S. E. XLIX. 38 S.

Durch zwei Methoden findet der Verfasser eine Parallaxe von ungefähr 0,1 Secunden (oder 31 Lichtjahre). Vergl. Belg. Bull. (3) XII. 609-611, F. d. M. XVIII. 1886. 1101. Mn. (Lp.)

O. Bonnet. Théorie de la réfraction astronomique. Paris. 61 S. 8°.

O. Dziobek. Die mathematischen Theorien der Planeten-Bewegungen. Leipzig. J. A. Barth. VIII u. 305 S. gr. 8°.

Die astromechanischen Untersuchungen, welche die planetarische Störungstheorie betreffen, sind in die gewöhnlichen Lehrbücher der Mechanik nicht aufgenommen worden und bleiben daher vielen Mathematikern unbekannt. Um diesem Mangel abzuhelfen, hat Herr Israel-Holtzwart schon es versucht, sie in seiner Astromechanik den Studirenden zugänglich zu machen, und Herr Rausenberger hat in seinem auf S. 872 dieses Bandes angezeigten Lehrbuche der Analytischen Mechanik den planetarischen Störungen erster Ordnung und den Elementen der Mondtheorie einen umfangreichen Paragraphen gewidmet. In dem vorliegenden Werke nun hat Herr Dziobek die Theorie der Bewegung der Himmelskörper, soweit dieselben als Massenpunkte zu betrachten sind, in vollem Umfange und im Zusammenhange dargestellt, sodass man die Hauptergebnisse der mathematischen Arbeiten von Lagrange, Laplace, Gauss, Jacobi und Leverrier, bis zu den neuesten Untersuchungen hin zu einem einheitlichen Ganzen vereinigt findet.

Das Buch zerfällt in drei Abschnitte. Der erste beschäftigt sich mit der Lösung des Problems zweier Körper, also der relativen Bahn des einen um den anderen, der Auflösung der Kepler'schen Gleichung; dann folgt die Aufstellung der allgemeinen Integrale des Problems der n Körper nebst den algebraischen Umformungen dieses Problems.

Im zweiten Abschnitte werden die allgemeinen Eigenschaften der Integrale der Differentialgleichungen entwickelt. Zunächst durch Poisson und Lagrange an dem vorliegenden System dieser Gleichungen entdeckt, sind diese Eigenschaften von C. G. J. Jacobi als fundamental erkannt, und ist ihre Gültigkeit für ein viel allgemeineres System von ihm bewiesen worden. Endlich haben in neuester Zeit die Herren A. Mayer und S. Lie diese Untersuchungen verallgemeinert und vereinfacht. Die letzten

Untersuchungen über das Vielkörperproblem von Herrn Bruns, über welche in F. d. M. XIX. 1887. 935 berichtet ist, konnten nicht mehr berücksichtigt werden; ihre Ergebnisse sind kurz angeführt.

Nach den Vorbereitungen der beiden ersten Abschnitte, welche etwa die Hälfte des Buches einnehmen (S. 1-149), folgt auf S. 150-305 die Theorie der Störungen. Der Aufstellung der Differentialgleichungen für die absoluten Störungen folgt sofort ihre Lösung. Weil die erhaltenen Formeln jedoch für praktische Berechnungen ungeeignet sind, so werden nach Laplace, Mécanique céleste, I. 281 andere Formeln abgeleitet; sodann wird nach Leverrier die Störungsfunction analytisch entwickelt. Nach der Darstellung von $(a^2-2ab\cos\delta+b^2)^n$ als trigonometrische Reihe werden die Glieder 0ten, 1ten, 2ten Grades der Störungsfunction berechnet, die analytischen Ausdrücke der Störungen erörtert. Darauf wird zur Methode der Variation der Elemente der Bahnen übergegangen, für welche die Differentialgleichungen nach einer Näherungsmethode integrirt werden. Für die säcularen Werte der Elemente werden die exacten Gleichungen aufgestellt, aus ihnen jene Werte angenähert berechnet, in einem besonderen Paragraphen die säcularen Variationen der mittleren Länge ermittelt. Aus den erhaltenen Formeln wird die Verbindung der Theorie der absoluten Störungen mit der Theorie der Variation der Elemente näher beleuchtet, die Stabilität des Sonnensystems erörtert. Der Einfluss der vernachlässigten säcularen Glieder der Störungsfunction, welche in Bezug auf die Excentricitäten und Neigungen von höherem Grade als dem zweiten sind, wird nach Leverrier und Lehmann untersucht, ebenso die Einwirkung der Glieder von langer Periode und die Commensurabilität zweier Umlaufszeiten. Die Genauigkeit der Formeln für die Variation der Elemente, die Vervollständigung der Theorie der Variation der Constanten durch Berücksichtigung der von den zweiten Potenzen der Massen abhängenden Glieder, die Unveränderlichkeit der grossen Axen, die Form, in welcher die Elemente und die Coordinaten als Functionen der Zeit erscheinen, endlich einige allgemeine, auf die Coefficienten der

Entwickelung der Coordinaten in trigonometrische Reihen sich beziehende Formeln sind die in den letzten Paragraphen abgehandelten Gegenstände.

Jedem Abschnitte ist eine Uebersicht über die historische Entwickelung beigegeben, ausserdem sind im Texte die ersten Quellen sorgfältig angeführt. Das Werk zeugt nicht nur von dem grossen Fleisse, den der Verfasser zur Durcharbeitung der vielen Quellen aufgewandt hat, sondern auch von seinem Geschicke zur Darstellung und Verknüpfung vieler getrennten Theorien sowie von seiner ausgedehnten Literaturkenntnis. Leider haben sich manche Druckfehler eingeschlichen, während die ganze Ausstattung des Verlags der Annalen der Physik würdig ist. Lp.

F. Tisserand. Sur une équation différentielle du second ordre qui joue un rôle important dans la mécanique céleste. Toulouse Ann. II. D. 25 S.

Diese Differentialgleichung, welche eine grosse Rolle in der Störungstheorie spielt, ist:

$$\frac{d^2z}{dv^2}+z(n^2+2\alpha\cos(lv+b)) = U,$$

wo

$$U = \Sigma A_i \cos V_i, \qquad V_i = l_i v+b_i$$

und n, α, l, b, A_i, l_i und b_i gegebene Constanten sind. Tisserand behandelt erst die Methode von Lindstedt, welche darauf beruht, dass man z nach steigenden Potenzen von α entwickelt. Betrachtet man zunächst den Fall $U=0$, und verwandelt durch eine leichte Transformation obige Differentialgleichung in

$$\frac{d^2z}{dv^2}+z(a_0^2+2a_1\cos 2v) = 0,$$

so setze man

$$\begin{aligned} z &= z_0+a_1z_1+a_1^2z_2+\cdots+a_1^pz_p+\cdots, \\ u &= a_0+a_1u_1+\cdots \qquad\quad +a_1^pu_p+\cdots, \\ w &= uv+\psi, \end{aligned}$$

wo die z_i von a_1 unabhängige trigonometrische Functionen von v und w sind und, um keine Willkür zu lassen, $z_0=\cos w$ ge-

setzt wird. Die u sind zu bestimmende Functionen von a_0 und ψ eine beliebige Constante. Für z_i wird die Form angenommen:

$$z_i = \sum_{i=-p}^{i=+p} B_i^{(h)} \cos(w+2hv),$$

wo die $B_i^{(h)}$ als Functionen von a_0 zu bestimmen sind. Es ergeben sich dann genügend viele Bestimmungsgleichungen, aus welchen man findet:

$$u = a_0\left[1+\frac{a_1^2}{4a_0^2(1-a_0^2)}+a_1^2 . 0\right],$$

$$w = \psi+u . v,$$

$$z = \eta_0 \cos w+\frac{a_1}{4(1+a_0)}\eta_0 \cos(w+2v)+\frac{a_1}{4(1-a_0)}\cdot\eta_0 \cos(w-2v)$$
$$+\frac{a_1^2}{32(1+a_0)(2+a_0)}\cdot\eta_0\cdot\cos(w+4v)$$
$$+\frac{a_1^2}{32(1-a_0)(2-a_0)}\cdot\eta_0\cdot\cos(w-4v)+\cdots.$$

η_0 und ψ sind die beiden Integrationsconstanten der Differentialgleichung. Ist U nun nicht gleich 0, so wendet man die bekannte Methode der Variation der Constanten an, welche, wenn die Coefficienten A_i nicht gross sind, schnell zu brauchbaren Werten führt.

Die allgemeinen Resultate wendet Tisserand auf die Mondtheorie an, indem er sich auf Gyldén's Theorie der intermediären Bahn des Mondes stützt, welche ihrerseits auf dem Begriff der mittleren Bewegungen aufgebaut ist. Bei Vernachlässigung der Excentricitäten, Neigungen und der vierten Potenz des Verhältnisses m der mittleren Bewegungen erhält man für die Tangente s der Breite des Mondes über der Ekliptik eine Differentialgleichung, welche leicht auf die obige Form zurückgeführt werden kann, und aus deren Integration die retrograde Bewegung des Mondknotens auf $\frac{1}{50}$ ihres Wertes genau sich ergiebt. Dasselbe ergiebt sich für den Radiusvector, und hier folgt die Bewegung des Perihels sogar auf $\frac{1}{600}$ genau, was aber, wie Herr Tisserand nachweist, einigen glücklichen Umständen zuzuschreiben ist.

Die zweite Methode, die Gyldén'sche, beruht darauf, dass in die Gleichung:

$$\frac{d^2z}{dv^2}+z(a_0^2+2a_1\cos v) = U$$

statt der Variable v eine neue Variable u eingeführt wird durch die Gleichung:

$$u=\int_0^v\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad \left(K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\right),$$

wodurch sie umgewandelt wird in

$$\frac{d^2z}{dv^2}+z\left[k^2\frac{1-q^2}{4q}a_1\sin^2\operatorname{am}u-(a_0^2+2a_1\gamma)\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right]=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\cdot U_1,$$

wo dann U_1 auch z enthält, aber mit dem kleinen Coefficienten a_1 multiplicirt. Zunächst $U_1 = 0$ setzend, kann man bei passender Wahl von k die Gleichung auf die Form bringen

$$\frac{d^2z}{du^2}-z(2k^2\sin^2\operatorname{am}u-h) = 0,$$

welche Hr. Hermite in der Arbeit: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques" zu integriren gelehrt hat. Aus dem Integral findet man durch Variation der Constanten das Integral der ersteren Gleichung, welches nach späterer und für praktische Berechnung notwendiger Auflösung genau dieselben Resultate giebt, wie die Methode von Hrn. Lindstedt.

Am Schluss der Arbeit findet sich noch eine Note, in welcher ein dem Verfasser von Hrn. Hermite mitgeteilter Beweis abgedruckt ist, dass ein gewisser, in der Arbeit benutzter, von den ganzen elliptischen Integralen und den Parametern desselben abhängender Ausdruck eine gerade Function von $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ ist.

Dz.

F. Tisserand. Remarque sur un point de la théorie des inégalités séculaires. C. R. CVII. 485-487.

Wenn eine sehr kleine Masse in dem Planetensystem sich bewegt, und man in den Differentialgleichungen für ihre Bahnelemente nur die säcularen Glieder beibehält, ferner sich auf die ersten Potenzen der Excentricitäten und Neigungen beschränkt

und die säcularen Ausdrücke derselben für die grossen Planeten in ihrer bekannten Form annimmt, so folgen diese Elemente für die kleine Masse in einer Form, in welche auch die säcularen Glieder der grossen Planeten eingehen. Es treten hierbei Nenner auf, die unter Umständen sehr gross werden können. Dies findet z. B. für die Neigungen statt, wenn die halbe grosse Axe der Bahn der kleinen Masse = 1,98, für die Excentricität, wenn jene = 1,83, also durchaus kleiner ist, als die kleinste der halben grossen Axen der Asteroiden, welche = 2,1 ist.

Dz.

H. Bruns. Der Lambert'sche Satz. Astr. Nachr. CXVIII. No. 2824. 241-250.

Der Lambert'sche Satz besagt, dass die Entfernung eines Planeten oder Kometen von der Sonne kleiner oder grösser als die der Erde von der Sonne ist, je nachdem seine geocentrische Bahn auf der Himmelskugel ihre Krümmung nach derjenigen Seite des grössten diese Bahn berührenden Kreises wendet, auf welcher die Sonne sich befindet, oder nicht. Herr Bruns beweist diesen Satz durch sehr einfache Mittel und zeigt ferner, wie man ihn als Grundlage für eine Methode der Bahnbestimmung benutzen kann, wenn die Richtungscosinus der Normale auf der geocentrischen Bahn, sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen nach der Zeit aus den Beobachtungen mit hinreichender Genauigkeit in erster Annäherung berechnet worden sind. Der Lambert'sche Satz liefert dann die Gleichung achten Grades von Gauss zur Bestimmung von ϱ, der Entfernung des Planeten von der Erde. Dz.

J. v. Hepperger. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. Wien. Ber. XCVII. 337-362.

Aus der engen Verknüpfung der Begriffe Veränderung und Zeit folgert der Verfasser, dass die Fernwirkung, da sie je nach der Entfernung verschieden ist, nicht von der Zeit unabhängig sein kann. Ueber die Art der Veränderlichkeit wird zur Ver-

einfachung der Rechnung die Annahme gemacht, dass die Geschwindigkeit der Fortpflanzung constant ist. Angesichts der Uebereinstimmung der Beobachtung mit der Berechnung astronomischer Erscheinungen und der Schwierigkeit der Störungsrechnungen ist an eine zahlenmässige Bestimmung dieser Geschwindigkeit jetzt noch nicht zu denken. Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist die Ermittelung einer Grenze, unter welcher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht angenommen werden darf, wenn man mit den Beobachtungen nicht zu sehr in Widerspruch geraten will.

Die Fundamentalgleichungen der Bewegung des einen Körpers mit Bezug auf den anderen, die der Verfasser aufstellt, enthalten auf der linken Seite Ausdrücke von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(1+m)k^2\cdot\frac{x}{r^3},\quad \text{u. s. w.},$$

während die rechte Seite die Summe zweier Glieder darstellt, welche mit der reciproken Fortpflanzungsgeschwindigkeit ε multiplicirt sind, und zwar sind die ersten Glieder die durch die Eigenbewegung des Systems und die zweiten die durch die Revolutionsbewegung veranlassten störenden Kräfte. Die Rechnung wird für beide Gattungen von Störungen gesondert durchgeführt in den vier Abschnitten: I. Störungen der Elemente wegen Eigenbewegung. II. Störungen der Elemente wegen Revolutionsbewegung. III. Störungen der Elemente wegen Revolutionsbewegung des Centralkörpers. IV. Einfluss der Revolutionsbewegung auf die Rotation des Centralkörpers.

Durch Anwendung der erhaltenen Formeln auf die Bahnen der Planeten ergiebt sich, dass die Gravitation zur Zurücklegung einer Strecke von der Grösse der Erdbahnhalbaxe weniger als eine Zeitsecunde braucht. Lp.

A. Seydler. Zur Lösung des Kepler'schen Problems.
Astr. Nachr. CXVIII. No. 2825. 261-272.

Es wird gezeigt, wie man durch Zuhülfenahme leicht zu berechnender neuer Veränderlichen rasch zum Ziele gelangen

kann, falls man aus den dazu vorhandenen Tafeln die excentrische Anomalie mit hinreichender Genauigkeit aufgeschlagen hat.

Dz.

P. Harzer. Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie. I und II. Astr. Nachr. CXIX. No. 2850-51. 273-294.

In der ersten Mitteilung wird nach einer allgemeinen Einleitung auf eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{dy}{d\xi} = -\tfrac{1}{4}x^2 + \Sigma_p \alpha_p(\cos\sigma_p\xi + A_p) + y^2$$

eingegangen, wo x eine reelle Constante, A_p beliebige Constanten, σ_p und α_p kleine Coefficienten sind. Diese Gleichung wird durch Einführung einer neuen Veränderlichen umgestaltet und darauf ihre Lösung durch aufeinanderfolgende Annäherungen besprochen. Schliesslich wird die allgemeine Form der Lösung gekennzeichnet und die Convergenz der Entwickelung erläutert. In der zweiten Mitteilung steht auf der rechten Seite dieser Gleichung noch ein Glied $-2\beta\cos\xi$, und es werden ähnliche Untersuchungen angestellt.

Dz.

P. Harzer. Ueber die Apsidenbewegung der Mondbahn. Astr. Nachr. CXVIII. No. 2826. 273-280.

Bei Fortlassung von Gliedern höherer Ordnung kann dieses Problem auf die Integration einer Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + (n^2 - 2\beta\cos\xi)x = 0$$

zurückgeführt werden. Die Constanten n und β werden für den Mond bestimmt und daraus eine Annäherung für die Apsidenbewegung der Mondbahn abgeleitet.

Dz.

M. Wolf. Die Differentialgleichung der mittleren Anomalie und die Wahrscheinlichkeit der Convergenz in der Darstellung ihres Integrals. Heidelberg 1889. Diss. Heidelberg 1888. 46 S. 8°.

N. Herz. Notiz zur Störungsrechnung. Astr. Nachr. CXVIII. No. 2816. 117-118.

Es werden Zeit, Radiusvector, wahre Anomalie, Länge des Perihels, Länge des Knotens und Neigung als Veränderliche angenommen, dann die wahre Anomalie als unabhängige Veränderliche gesetzt und die Differentialgleichungen der Störungen entsprechend umgeformt. Dz.

G. Meyer. Ueber die Bestimmung der mittleren Anomalien in Ellipsen und Hyperbeln, deren Excentricität der Einheit sehr nahe kommt. Mitteilung nach Vorlesungen von W. Klinkerfues. Astr. Nachr. CXVIII. No. 2819. 165-172.

Es wird von dem Euler-Lambert'schen Satz ausgegangen und die mittlere Anomalie nach steigenden Potenzen von $1-e$ entwickelt, während in den Coefficienten dieser Entwickelung sowohl die wahre als die excentrische Anomalie enthalten sind.

Dz.

H. Gyldén. Ueber die Convergenz einer in der Störungstheorie vorkommenden Reihe. Astr. Nachr. CXIX. No. 2853. 321-330.

Es wird ausgegangen von der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{3m'}{\mu} \cdot an^2 \Sigma\Sigma i k_{ii'} \sin(i'\zeta' - i\zeta + A_{ii'}),$$

und aus der rechten Seite werden dann die Glieder besonders betrachtet, für welche $i'n' - in$ (n und n' die Coefficienten der mittleren Anomalien) sehr klein ist, und die man durch Entwickelung von $\frac{n'}{n}$ in einen Kettenbruch findet. Darauf wird $\zeta = nt + z$ gesetzt und z unter gewissen Annahmen, wie sie von Laplace herrühren, in Glieder zerlegt, so dass Differentialgleichungen von der Laplace'schen Form:

$$\frac{d^2V}{dv^2} = -\alpha^2 \sin V \cos V$$

entstehen, welche sofort durch elliptische Functionen integrirt werden. Diese Functionen werden dann benutzt, um den Diffe-

rentialgleichungen die Form der sogenannten Lamé'schen Differentialgleichungen zu geben. Darauf folgen Entwickelungen, welche dem Berichterstatter wegen ihrer Gedrängtheit und der einer Briefform entsprechenden nur andeutungsweisen Angabe ihrer Richtung nicht ganz klar geworden sind. Dz.

B. Baillaud. Recherches complémentaires sur le développement de la fonction perturbatrice. Toulouse Ann. II. E. 21 S.

Diese Untersuchungen beziehen sich auf die Bestimmung der Anzahl von Gliedern, welche man bei der Entwickelung der Störungsfunction nach steigenden Potenzen der Excentricitäten und Neigungen erhält, wenn man bis zu einem bestimmten Gliede dieser Entwickelung fortschreitet. Eine beigefügte Note giebt den Beweis, dass eine in einer früheren Arbeit des Verfassers angewandte Umformung der Störungsfunction für die Verhältnisse unseres Planetensystems immer durchführbar ist.

Dz.

H. A. Howe. A solution of Kepler's problem for planetary orbits of high eccentricity. Annals of Math. IV. 1-5.

Diese Lösung besteht in folgendem: Ist

$$M = E - e\sin E$$

die Gleichung, aus der E entwickelt werden soll, so setze man

$$F(E) = \tfrac{1}{2}[E-M-\sin(E-M)] = \tfrac{1}{12}\sin^3(E-M)+\tfrac{3}{80}\sin^5(E-M) + \tfrac{5}{224}\sin^7(E-M) + \cdots,$$

bestimme E' aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}(E'-\tfrac{1}{2}M) = \frac{1+e}{1-e}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}M$$

und berechne einen angenäherten Wert für E aus

$$\sin(E'-E) = \tfrac{1}{6}k\sin^3(E'-M) \quad \left(\text{wo } k = \frac{\cos(E'-\tfrac{1}{2}M)}{(1-e)\cos\tfrac{1}{2}M}\right).$$

Dies in die rechte Seite der genaueren Gleichung:

$$\sin(E'-E) = \tfrac{1}{6}k\sin^3(E'-M) + \frac{k\{2F(E'-M-\tfrac{1}{6}k\sin^3(E'-M))-\tfrac{1}{6}\sin^3(E'-M)\}}{1+kv\sec(E'-E)} - \frac{kv\sec(E'-E).2.F(E'-E)}{1+kv\sec(E'-E)}$$

$$\left(v = \tfrac{1}{2}\sin^2(E-M)+\tfrac{1}{8}\sin^4(E-M)\cdots\right)$$

eingesetzt, giebt für alle bei den Asteroiden vorkommenden Fälle eine hinreichend genaue Lösung des Kepler'schen Problems.

Dz.

H. DE LA FRESNAYE. Lois de Kepler. Procédé tout à fait élémentaire pour en déduire l'expression de la vitesse en fonction du rayon vecteur. Flammarion, Rev. d'Astr. VII. 186-187.

Die Herleitung benutzt nur die Sätze der Elementarmathematik, ohne die Trigonometrie oder die analytische Geometrie herbeizuziehen.

Lp.

F. FOLIE et J. LIAGRE. Rapport sur le mémoire intitulé: Les plans planétaires et l'équateur solaire, par L. NIESTEN. Belg. Bull. (3) XV. 4-9.

Herr Niesten hat gezeigt, dass die teleskopischen Planeten, wie die Hauptplaneten, ungefähr dieselbe Neigung gegen den Sonnenäquator besitzen, und dass die Lage ihrer Knoten auf der Ebene dieses Aequators auch ungefähr dieselbe ist. Er versucht hierauf, die Existenz eines Winkels von ungefähr sieben Grad zwischen der mittleren Bahnebene der Planeten und dem Sonnenäquator zu erklären, indem er in diese mittlere Ebene ein anziehendes Centrum hineinsetzt, das auf einer Normale zur eigenen Bahncurve der Sonne liegt. Diese letztere Hypothese entbehrt jeder Unterlage.

Mn. (Lp.)

K. BOHLIN. En generalisation af Laplace's undersökning af librationen i planetteorien. Stockholm Öfv. 5 S.

Γ. HAYWOOD. The Earth and its chief motions, and the tangent index. Dayton. XII + 28 S.

BERMANN. Ueber den mittleren Abstand eines Planeten von der Sonne. Schloemilch Z. XXXIII. 361-362.

Teilt man die Zeit, in welcher ein Planet um die Sonne läuft, in n gleiche Teile, berechnet für jeden Teil den Sonnenabstand, so erhält man als Grenzwert für das arithmetische Mittel bei unendlichem Werte von n:

$$\varrho = a + \tfrac{1}{2}a \,.\, e^2.$$

Dz.

O. STONE. On the mass of Titan. Annals of Math. IV. 53.

Anzeige eines Rechenfehlers in einer früheren Arbeit (F. d. M. XIX. 1887. 1219), durch dessen Berichtigung seine Bestimmung der Masse Titans sich um mehr als dreifach zu gross erweist. Dz.

A. BERBERICH. Ein Versuch, die Gesamtmasse und Anzahl der Planetoiden zwischen Mars und Jupiter zu ermitteln. Astr. Nachr. CXVIII. No. 2827. 289-296.

Dieser Versuch wird gemacht, indem die Planetoiden nach der Zeit ihrer Entdeckung der Reihe nach geordnet werden und dann empirisch ein Gesetz aufgesucht wird, welches die Beziehungen zwischen den Abständen von der Sonne und den Helligkeitsgraden, aus denen unter gewissen Annahmen die Volumina hervorgehen, vermittelt. Dz.

PARMENTIER. Distribution des petites planètes dans l'espace. Flammarion, Rev. d'Astr. VII. 226-231.

J. KLEIBER. Ueber die Verteilung der Meteore in Meteorschwärmen. Astr. Nachr. CXVIII. No. 2830. 345-348.

Bei Annahme völliger Unkenntnis der Ursachen, welche die Verteilung der Sternschnuppen eines und desselben Meteorschwarmes

regeln, kann man die Wahrscheinlichkeit entwickeln dafür, dass auf ein gegebenes Zeitintervall 1, 2, 3, 4 ... Meteore kommen, wenn ihre Gesamtzahl und die Gesamtzeit ihres Erscheinens gegeben ist. Es wird nun gezeigt, dass die Beobachtungen des Andromedaschwarmes am 27. November 1885 in dieser Hinsicht erhebliche Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung ergaben, welche man zum fast völligen Verschwinden bringen kann, durch die Annahme, dass die Sternschnuppen teilweise in Gruppen zu je 2, 3 ... verteilt seien. Dz.

Th. Lohnstein. Ueber die Gleichungen v. Oppolzer's zur Bestimmung der heliocentrischen Distanzen eines Planeten. Astr. Nachr. CXIX. No. 2848. 243-246.

Diese Gleichungen werden angegeben und gezeigt, wie man unter Annahme eines Näherungswertes für eine Grösse μ die Lösung derselben herbeiführen kann. Dz.

A. Shdanow. Theorie der intermediären Bahnen mit Anwendung auf die Bewegung des Mondes. St. Petersburg. 47 S. 4°.

Die Abhandlung besteht aus zwei Teilen; im ersten wird die Störungstheorie von Gyldén auseinandergesetzt, der zweite enthält die Anwendung der Theorie auf die Bewegung des Mondes.

Der Verfasser führt zwei Annäherungen aus. Der von ihm berechnete Wert der Bewegung des Mondperigäums weicht vom Hansen'schen Wert nur um $\frac{1}{650}$ desselben und die Bewegung der Knotenlinie weniger als um $\frac{1}{500}$ ab. Die Differentialgleichungen der Mondbewegung in der intermediären Bahn sind nach Lindstedt's Methode integrirt worden. Bb.

J. Wostokoff. Ueber die Bestimmung der Bahnelemente aus drei Beobachtungen. Warsch. Nachr. 1-31.

V. Wellmann. Die intermediäre Bahn des Planeten (17) Thetis nach Herrn Gyldén's Theorie. Hoppe Arch. (2) VI. 353-391.

Gemäss den in Gyldén's Abhandlung „die intermediäre Bahn des Mondes" aufgestellten Principien werden aus der Störungsfunction gewisse Glieder entnommen und die Differentialgleichungen in die Lamé'sche Form gebracht; diese wird nach der Integration wieder zerstört, und es ergeben sich auf diese Weise Ausdrücke für die „intermediäre Bahn". Dz.

E. Schultz. Ueber die von Gyldén vorgeschlagene Methode, bei der Bahnbestimmung des Mondes die Abweichung der Erde von der Kugel für astronomische Zwecke hinreichend genau in Rechnung zu ziehen. Diss. Halle. 56 S. 8°.

L. de Ball. Recherches sur l'orbite de la planète (181) Eucharis. Belg. Mém. S. E. XLIX. 44 S.

Berechnung der Bahn nach den Beobachtungen mit Hülfe der Schönfeld'schen Formeln. (Vgl. Belg. Bull. (3) XII. 487-488, F. d. M. XVIII. 1886. 1101). Mn. (Lp.)

E. v. Haerdtl. Die Bahn des periodischen Kometen Winnecke in den Jahren 1858-1886 nebst einer neuen Bestimmung der Jupitermasse. Wien. Denkschr. LV. 217-308.

Dieser Komet, dessen Umlaufszeit etwas mehr als 5¼ Jahr beträgt, wurde, wie der Verfasser angiebt, von Oppolzer ausersehen, um durch genaue Störungsrechnungen, die sich besonders auf den störenden Jupiter bezogen, festzustellen, ob auch dieser Komet eine Beschleunigung seiner Umlaufszeit, ähnlich wie der Encke'sche, erfahren, welche aus den Störungen nicht zu erklären wäre. Oppolzer's Rechnungen gehen von 1858 bis 1875, diejenigen des Verfassers bis 1886. Nachdem letzterer auch

die Störungen der übrigen Planeten streng berechnet, fand er nach sorgfältigster Prüfung eine säculare Abnahme der mittleren Bewegung. Aber selbst wenn diese bestimmt und bei den Berechnungen in Rücksicht genommen wurde, stellte sich keine befriedigende Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung heraus. Wohl aber lässt sie sich erreichen, wenn die Jupitermasse, welche er $= \frac{1}{1047,54}$ (nach Krüger) angenommen hatte, etwas vermindert wurde. Das Interesse der Arbeit gipfelt in dieser neuen Massenbestimmung $= \frac{1}{1047,1752 (\pm 0,0136)}$, welcher Herr v. Haerdtl aus den verschiedensten Gründen ein grösseres Gewicht beilegt, als allen früheren. Dz.

Th. Lohnstein. Ueber die Ermittelung der geocentrischen Distanzen eines Kometen. Astr. Nachr. CXIX. No. 2839. 99-106.

Es wird unter Voraussetzung der Kenntnis einer Hülfsgrösse *M* eine obere und eine untere Grenze für den geocentrischen Abstand des Kometen ermittelt. Dann wird gezeigt, wie diese beiden Grenzen dazu dienen können, den für *M* angenommenen Wert zu verbessern und damit wieder genauere Werte für den geocentrischen Abstand zu erhalten, welches Verfahren unter Berücksichtigung der besonderen Umstände des vorliegenden Falles schnell zur Lösung führen kann. Beispiele erläutern den Weg des Verfassers. Dz.

H. J. Kiaer. Sur les équations servant à déterminer les formes des queues cométaires. Astr. Nachr. CXIX. No. 2856. 369-378.

Bessel hat unter der Voraussetzung, dass von dem Kopf des Kometen die Partikel mit einer gewissen Geschwindigkeit fortgestossen werden und ausser der Newton'schen Anziehung noch eine Abstossung von der Sonne erleiden, welche entweder die Anziehung nur schwächen, oder dieselbe ganz aufheben oder sogar überwinden kann, Formeln für die Entwickelung des Kometen-

schweifes gegeben, bei welcher er bis zur dritten Potenz der Zeit gegangen ist. Dabei hat er sich aber auf die Materie beschränkt, welche in der Ebene der Kometenbahn verbleibt. Der Verfasser giebt die Formeln, bei welchen diese Beschränkung aufgehoben ist. Um die Gestalt des Schweifes zu bestimmen, wird angenommen, dass im grossen und ganzen die Ausstossgeschwindigkeit der Materie nur von dem Winkel abhängt, den die Ausstossungsrichtung mit der Richtung vom Kometen nach der Sonne bildet. Diese Function ist unbekannt und kann vielleicht umgekehrt durch die bekannte Gestalt des Schweifes gefunden werden. Die Kontur dieses Schweifes ist nämlich die Enveloppe aller von den ausgeworfenen Teilchen beschriebenen Bahnen, deren Kenntnis zu einer Differentialgleichung zwischen g und λ führt, für welche die singuläre Lösung zu suchen ist. Als Beispiel wird einmal die Kettenlinie als Kontur genommen und eine Parabel höheren Grades $\zeta^n = k\xi + ks$, wo ξ und ζ die Variablen sind. Von der Anziehung des Kopfes auf die Partikel wird zunächst abgesehen, dann aber dieselbe in gewisser Weise berücksichtigt.

Dz.

H. Kreutz. Untersuchungen über das Kometensystem 1843 I, 1880 I und 1882 II. I. Teil. Der grosse Septemberkomet 1882 II. Habilitationsschrift Kiel. 111 S. 4°.

F. Hayn. Bahn-Bestimmung des Kometen 1862 III. Diss. Göttingen. 56 S. 4°.

G. Ericsson. Definitive Bahnelemente des Kometen 1863 III. Upsala. 40 S. 8°.

G. H. Darwin. On the mechanical conditions of a swarm of meteorites and on theories of cosmogony. Lond. R. S. Proc. XLV. 3-16.

Auszug aus einer Schrift, welche später in den Transactions für 1889 erschienen ist.

Cly. (Lp.)

J. N. Lockyer. Notes on meteorites. Nature XXXVIII. 424-428, 456-458, 530-533, 556-559, 602-605.

H. A. Newton. On the orbits of aerolites. Nature XXXVIII. 250-255.

P. Ubaghs. Détermination de la direction et de la vitesse du transport du système solaire dans l'espace. IIe partie. Belg. Mém. S. E. XLIX. 26 S.

Durch Anwendung einer Methode des Herrn Folie (Astron. Nachr. Nr. 2607, F. d. M. XVI. 1884. 1112) hat der Verfasser einen ungemein schwachen Wert für die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Sonne im Raume gefunden. Dieses Ergebnis scheint mit denjenigen unvereinbar, die man aus spektroskopischen Beobachtungen abgeleitet hat. Vergl. Belg. Bull. (3) XIII. 66-70, F. d. M. XIX. 1887. 1222. Mn. (Lp.)

F. Folie et Ch. Lagrange. Rapport sur un mémoire de M. Ronkar, intitulé: Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles intérieures dans les mouvements périodiques d'un système. Application au sphéroïde terrestre. Belg. Bull. (3) XV. 489-500.

Herr Ronkar hat eine grosse Schwierigkeit beseitigt, die in der Theorie der täglichen Nutation des Herrn Folie besteht, und zwar mit Hülfe des folgenden Satzes: Bei den Bewegungen mit sehr langer Periode bewegt sich das Erdsphäroid merklich so, als ob die Kruste und der Kern nur eine einzige Masse bildeten; bei den Bewegungen mit sehr kurzer Periode dagegen bewegen sich der Kern und die Kruste unabhängig von einander; bei den Bewegungen mit mittlerer Periode lassen sich die beiden Teile so ansehen, als ob sie sich teilweise beeinflussten, und ausserdem ist gewöhnlich eine Phasenänderung bei der Einwirkung der Kräfte vorhanden. Dieser Satz ist jedoch nicht mit absoluter Strenge aufgestellt worden. Mn. (Lp.)

F. Terby. Études sur l'aspect physique de la planète Jupiter. Belg. Mém. S. E. XLIX. 46 S.

Vgl. Belg. Bull. (3) XV. 10-11.

L. de Ball. Masse de la planète Saturne, déduite des observations des satellites Japet et Titan en 1885, 1886. Belg. Mém. S. E. XLIX. 18 S.

Resultat: $\frac{1}{3492,8}$. Vgl. Belg. Bull. (3) XIV. 402-406.

Mn.

H. Seeliger. Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesondere des Saturn. München. 114 S 4°.

P. Stroobant. Étude sur le satellite énigmatique de Vénus. Belg. Mém. S. E. XLIX. 48 S.

Der Trabant war wahrscheinlich ein Stern. Vgl. Belg. Bull. (3) XIII. 698-703. Mn. (Lp.)

A. Laussedat. Mémoire sur la méthode graphique des projections appliquée à la construction des cartes des éclipses de soleil, en général. Soc. Philom. Mém. 25 S.

Sind die Elemente einer Sonnenfinsternis gegeben, so ist eine graphische Construction sehr geeignet, den Verlauf derselben auf der Erde zu bestimmen, falls nicht die äusserste, nur durch umfangreiche Rechnungen zu erreichende Genauigkeit beansprucht wird. Die ursprüngliche orthographische Projection wird nachher in eine stereographische umgewandelt, weil bei dieser, wenn man das Centrum der Projection in den Endpunkt des zur Projectionsebene senkrechten Radius legt, bekanntlich Kugelkreise sich wieder in Kreisen projiciren. Dz.

Annaes do Observatorio do Rio de Janeiro. III. 1888.

Der dritte Band der Annalen der Sternwarte von Rio de Janeiro enthält den Bericht über die von Brasilien ausgerüsteten Expeditionen zur Beobachtung des Venusdurchgangs im Jahre 1882 und über die bei dieser Gelegenheit von den Astronomen dieses Landes angestellten Beobachtungen. Die drei von Brasilien ausgesandten Expeditionen fanden statt 1) nach der Insel St. Thomas von den Antillen, 2) nach Punta Arenas an der Magellanstrasse, 3) nach Pernambuco. Die über diese Expeditionen erstatteten Berichte sind portugiesisch und französisch abgefasst. Geschrieben sind sie vom Baron de Teffé, dem Leiter der Expedition nach St. Thomas, von Herrn Oliveira Lacaille, dem Leiter der Expedition nach Pernambuco, und von Herrn Cruls, dem Leiter der Expedition nach Punta Arenas. Die von den brasilianischen Astronomen zur Bestimmung der Sonnenparallaxe angewandten Methoden bestanden in der Methode der Contacte, die durch Projection auf einen Schirm erhalten wurden, und in der Methode, welche auf der Messung des Abstandes der Mittelpunkte der Sonne und der Venus beruht, nach einem von Herrn Liais angegebenen Verfahren. Jeder Bericht enthält die zu diesem Zwecke gemachten Beobachtungen, ebenso die astronomischen und meteorologischen Beobachtungen, die zur Bestimmung anderer, für die Lösung der Aufgabe notwendigen Elemente gemacht sind. Ausserdem enthält der Bericht des Barons de Teffé interessante Bemerkungen über das Land, in welchem die Beobachtung stattgefunden hat, und dem Bericht des Herrn Cruls sind interessante „Reisenotizen" von Herrn Saldarka angehängt, in denen die an die Magellanstrasse stossenden Gegenden beschrieben werden.

Der von der Sternwarte zu Rio de Janeiro veröffentlichte Band macht diesem wichtigen Institute alle Ehre und muss unter den auf den Venusdurchgang von 1882 bezüglichen Schriften einen hervorragenden Platz erhalten. Die Ausstattung ist sehr schön und zeigt die hohe Stufe der typographischen Kunst in Brasilien.

Tx. (Lp.)

F. Tisserand. Sur un point de la théorie de la Lune. C. R. CVI. 788-793.

Aus den Ausdrücken für die Coordinaten des Mondes, welche Delaunay in seiner Nouvelle théorie de la Lune aufgestellt hat, schliesst Tisserand, dass der aus diesen Ausdrücken abgeleitete Wert für die grosse Axe aus einem constanten und aus rein periodischen Gliedern bestehe. Die Coefficienten der letzteren enthalten, falls die Perioden von den mittleren Längen abhängen, das Quadrat des Quotienten zwischen den beiden mittleren Bewegungen von Sonne und Mond als Factor; falls sie aber säcular sind, enthalten sie die vierte Potenz dieser Grösse als Factor. Zum Schluss spricht Hr. Tisserand die Ueberzeugung aus, dass dieselbe Form auch im allgemeinen Problem der n Körper gilt, falls Stabilität vorhanden ist, und dass man bestrebt sein muss, die jetzt vorhandenen Lösungen, in welchen t ausserhalb des Sinus- und Cosinus-Zeichens vorkommt, so umzuformen, dass sie diese Form erhalten. Dz.

Th. v. Oppolzer und R. Schram. Zum Entwurf einer Mondtheorie gehörende Entwicklung der Differentialquotienten, von Th. v. Oppolzer. Nach dessen Tode vollendet unter Leitung von R. Schram. Wien. 188 S. gr. 4°.

H. Thurein. Elementare Darstellung der Mondbahn. Pr. Berlin. Dorotheenstädt. Real-Gymn.

Thurein's „Elementare Darstellung der Planetenbahnen durch Construction und Rechnung“ (Berlin 1886) ist allgemein als ein verdienstliches, brauchbares Unterrichtsmittel anerkannt. Für die Mondbahn unternimmt hier der Verfasser ein Gleiches zu leisten, indem er dabei freilich weit mehr Hindernisse zu überwinden hat; denn der Mondort wird durch die Störungen, deren wichtigste eine nähere Erörterung finden, in weit stärkerem Masse beeinflusst, als irgend ein Planetenort. Gleichwohl gelingt es, mit Zuhülfenahme von Näherungswerten, wie sie insbesondere die Kettenbruchentwickelung darbietet, sowohl die

Stunden des Auf- und Unterganges, als auch die wesentlichen Umstände einer Finsternis in verhältnismässig einfacher Weise vorauszubestimmen. Rechnungsbeispiele sind reichlich beigegeben.

Gr.

M. G. Armelin. Réforme du calendrier. Flammarion, Rev. d'Astron. VII. 347-349.

Im Jahre 1884 sind Herrn Flammarion von einem nicht genannten Freunde der Astronomie 5000 Franken übergeben worden; diese Summe sollte als Preis demjenigen zuerkannt werden, der den besten Vorschlag zur Abänderung des jetzigen Kalenders machen würde. Bedingung war, dass jedes Datum immer auf denselben Wochentag falle, dass ferner die Abweichung vom jetzigen Kalender möglichst klein werde. Der Bericht über die eingelaufenen Arbeiten ist in mehreren sehr eingehenden Artikeln des Jahrgangs 1887 der Revue d'Astronomie durch Herrn Gérigny im Namen der Preisrichter erstattet worden. Die 5000 Franken sind unter sechs Bewerber in verschiedener Höhe geteilt worden. Herr Armelin hat den ersten Preis mit 1500 Franken erhalten. Nach seinem Vorschlag, der an der oben citirten Stelle vollständig abgedruckt ist, sollen die Monate Januar, April, Juli, October je 31 Tage haben, die acht übrigen je 30 Tage; der Neujahrstag als „nullter" Tag keinen Wochennamen erhalten, jedes vierte Jahr einen 31sten December ohne Wochentagsbenennung haben. Dann beginnen die vier ersten Monate jedes Vierteljahrs mit Montag, die vier zweiten mit Donnerstag, die vier dritten mit Samstag.

Lp.

Capitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie.

J. Gallenmüller. Elemente der mathematischen Geographie und Astronomie. Regensburg. Fr. Pustet.

Das Buch enthält den Lehrstoff in dem Umfange, wie er für die Prima der humanistischen Gymnasien Bayerns vorgeschrieben ist. Auf die Astrognosie wird grösseres Gewicht gelegt, als in anderen didaktischen Schriften von verwandtem Charakter. Gr.

M. Fiorini. Le projezioni quantitative ed equivalenti della cartografia. Bollettino della Società geografica italiana (2) XII. 856-891, 951-997.

Nachtrag zum Werke des Verfassers: Le projezioni delle carte geografiche (Bologna 1881). Vi.

E. Oekinghaus. Ueber die Lage der Mondsichel gegen den Horizont des Beobachters. Hoppe Arch. (2) VII. 195-206.

Denkt man sich die beiden Spitzen der Sichel durch eine gerade Linie mit einander verbunden, so ist deren Neigung gegen den Horizont keine constante. Der veränderliche Neigungswinkel soll berechnet werden, resp. man will den Winkel finden, welchen der grösste Kreis, als welchen unser Auge die erwähnte Gerade auf die Himmelskugel projicirt, mit dem Horizontalkreise einschliesst. Die Erde sei von den beiden Himmelskörpern Sonne und Mond resp. um R und ϱ entfernt, und die Richtung von ϱ bilde mit den drei rechtwinkligen Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ (wobei die x-Axe durch den Widderpunkt gehen möge). Setzt man dann

$$\xi = \varrho\cos\alpha, \quad \eta = \varrho\cos\beta, \quad \zeta = \varrho\cos\gamma,$$

so handelt es sich, unter Θ die astronomische Länge des Sonnenmittelpunktes verstanden, zunächst darum, die Grössen r, β, λ aus dem folgenden Gleichungssysteme zu berechnen:

$$-R\cos\Theta + r\cos\beta\cos\lambda = \xi, \quad -R\sin\Theta + r\cos\beta\sin\lambda = \eta, \quad r\sin\beta = \zeta.$$

Jetzt können β und λ als bekannte Grössen angesehen werden; bedeutet dann noch h die Höhe des Mondes, H diejenige der Sonne, so ist, wie der Verfasser durch eine interessante Transformation nachweist, der Cosinus des in Rede stehenden Winkels gleich:

$$\frac{\cos\beta\cos(\lambda-\Theta)\sin h-\sin H}{\cos h\sqrt{1-\cos^2\beta\cos^2(\lambda-\Theta)}}.$$

Die Ableitung ist die gewöhnliche der analytischen Raumgeometrie. Die ursprüngliche gerade Linie ist nämlich der Durchschnitt zweier Ebenen, deren eine im Mondmittelpunkte auf dem Bestrahlungscylinder senkrecht steht, während die andere die Grundfläche des vom Auge an die Mondkugel gelegten Tangentialkegels darstellt. Da jedoch auch der Beobachter nicht in absoluter Ruhe sich befindet, sondern mit der rotirenden Erde selbst im Raume sich fortbewegt, so ist auch die Horizontalebene nicht von unveränderlicher Lage, sondern eine Function der Zeit. Aus allen diesen Ueberlegungen resultirt die obige Formel; dem Entwickelungsgange zu folgen, ist bei der Complicirtheit vieler Ausdrücke ohnehin nicht ganz leicht, und es wäre deshalb eine übersichtlichere Bezeichnung zu wünschen. So bedeutet H einmal einen Buchstaben (Punkt), ein anderesmal dagegen (s. o.) einen Winkelwert. Gr.

O. Fisher. On the amount of the elevations attributable to compression through the contraction during cooling of a solid Earth. Phil. Mag. (5) XXIII. 145-149.

Die Untersuchung in des Verfassers „Physics of the Earth's crust" (Chapter VI) über die mittlere Höhe der Erhebungen, welche der von der Zusammenziehung infolge der Abkühlung herrührende Druck auf der als ein fester Körper betrachteten Erde hervorrufen kann, ist nicht ganz befriedigend und wird daher im vorliegenden Aufsatze wieder aufgenommen. Das Ergebnis wird als eine Bestätigung der Schlussfolgerungen angenommen, welche sich auf die weniger befriedigende Berechnung stützten. Gbs. (Lp.)

O. Fisher. On the mean height of the surface-elevations and other quantitative results of the contraction of a solid globe through cooling; regard being paid to the existence of a level of no strain, as lately

announced by Mr. T. Mellard Reade and by Mr. C. Davison. Phil. Mag. (V) XXV. 7-20.

In diesem Aufsatze wird eine Berechnung der mittleren Höhe der Oberflächen-Erhebungen unter der Voraussetzung einer Fläche ohne Deformation geliefert (Vergl. F. d. M. XIX. 1887. 1228). Bei der Annahme einer Temperatur von 7000° F beim Beginne der Erstarrung und eines Temperaturgradienten von 1/51° F auf den Fuss in der Jetztzeit ergiebt sich die gegenwärtige Tiefe der undeformirten Fläche zu 2,1361 Meilen und die mittlere Höhe aller Erhebungen, welche durch Abkühlung auf einer festen Erde entstehen würden, zu 19 Fuss. Der vom Verfasser gezogene allgemeine Schluss besagt, dass die Entdeckung des Bestehens einer undeformirten Fläche in einer festen, durch Leitung sich abkühlenden Erdkugel mehr als je die Annahme unhaltbar macht, dass die Oberflächenerhebungen durch Pressungen der Rinde einer festen Erdkugel nach jener Art haben gebildet werden können. Gbs. (Lp.)

T. Mellard Reade. The geological consequences of the discovery of a level of no strain in a cooling globe. Phil. Mag. (5) XXV. 210-215.

T. Mellard Reade. Tidal action as an agent of geological change. Phil. Mag. (5) XXV. 338-343.

J. Le Conte. Mountain formation. Phil. Mag. (5) XXV. 450-451.

T. Mellard Reade. Mountain formation. Phil. Mag. (5) XXV. 521-522.

Der erste Artikel erörtert manche Folgerungen für die geologische Theorie, welche nach Ansicht des Verfassers aus dem Bestehen einer undeformirten Fläche folgen; der dritte und vierte behandeln eine in dem ersten erhobene Frage. Die zweite Note betont die Wichtigkeit der Flutwirkung als einer Ursache geologischer Veränderungen. Gbs. (Lp.)

K. Weihrauch. Neue Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie. Dorpat. Th. Hoppe und E. J. Karow; Leipzig. K. F. Koehler. 46 S. 4°.

Die in den „Schriften herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität" als No. IV erschienene Arbeit zerfällt in zwei Teile. Der erste, rein mathematisch gehaltene behandelt die Auflösung der Gleichungssysteme

$$(2)\quad y_h = u_0 + \Sigma_m u_m \sin\left\{U_m + \frac{2\pi m}{K} x_h\right\} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, \nu).$$

$$(3)\quad y_h = u_0 + \Sigma_m u_m \sin\left\{U_m + \frac{2\pi m}{K} x_h\right\} + u_\nu \sin\left\{U_\nu + \frac{2\pi\nu}{K} x_h\right\}$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots, \nu-1),$$

nach den Grössen u_m und U_m oder, was auf dasselbe herauskommt, nach den Grössen $p_m = u_m \sin U_m$, $q_m = u_m \cos U_m$, bei beliebig in der Periode K verteilten Phasen x_h, zu denen die Amplituden y_h gehören, während bei Bessel in den Formeln (2) und (3) die Phasen äquidistant angenommen sind. Die Auflösung der Gleichungen, eine Uebung in der Behandlung von Determinanten, führt die Aufgabe auf Determinanten von der Form

$$\Delta = |\, 1\, a_m a_m^2 \ldots a_m^{2\nu} | \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, 2\nu)$$

oder auf ähnlich gebaute zurück und ist im wesentlichen mit den Formeln in Uebereinstimmung, welche in der Theoria interpolationis methodo nova tractata bei Gauss (Werke III, 279ff.) stehen, obwohl der Verfasser im Hinblick auf die meteorologischen Anwendungen solche Formeln herstellt, die von den Gauss'schen verschieden sind, aber sich für Zahlenrechnungen besser eignen.

Der zweite Teil der Schrift handelt über die Gestalt und über die Verwendung der Bessel'schen Formel in der Meteorologie und gelangt zu den folgenden, vom Verfasser auf S. 44 zusammengestellten Ergebnissen:

1. Die Bessel'sche Formel darf nicht auf Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründet werden.

2. Die Bessel'sche Formel muss immer als ein Aggregat

von Sinuslinien aufgefasst werden, welche sowohl für $n = 2\nu+1$ als auch für $n = 2\nu$ vom 0-fachen bis zum ν-fachen des Winkels gehen.

3. Die Berechnung der Constanten kommt immer auf die Auflösung eines definiten Systems von Gleichungen zurück; für ein ungerades n reichen die gegebenen Bedingungen dazu vollkommen aus, während für ein gerades n die Bedingung hinzugezogen werden muss, dass die Winkelconstante der ν^{ten} Sinuslinie gleich der negativen halben Summe aller gegebenen, in Bogen ausgedrückten Phasen ist.

4. Beim Auftreten von r überzähligen Beobachtungen neben n äquidistanten reducirt sich die Aufstellung der Bessel'schen Formel auf folgende Aufgaben:

a) Bestimmung der Bessel'schen Formel C_n für die n äquidistanten Beobachtungen,

b) Ersetzung der n ersten Unbekannten durch die r letzten,

c) Ermittelung der den überzähligen Phasen in C_n entsprechenden Amplituden,

d) Auflösung eines Systems von r linearen Gleichungen für die r letzten Unbekannten.

5. Der aus äquidistanten Beobachtungen abgeleitete Mittelwert bleibt bei Zuziehung überzähliger Beobachtungen vollkommen unverändert, so lange die Anzahl der letzteren die der äquidistanten Beobachtungen nicht erreicht.

Referent möchte in Bezug auf das letzte Resultat unter 5. die Bemerkung nicht unterdrücken, dass dasselbe jedenfalls die Willkürlichkeit mancher Annahmen bei der gewählten Art der Interpolation bezeugt. Lp.

N. Ekholm. Zur Ableitung einer periodischen Function aus einer Reihe nach gleichen Zeitintervallen beobachteter Grössen. Met. Zeitschr. V. 51-62.

Die zu lösende Aufgabe ist die folgende: „Es ist eine Reihe beobachteter Grössen gegeben; man will hieraus die Form einer periodischen Variation bestimmen, deren Periodenlänge im vor-

aus gegeben ist, also z. B. eine tägliche, jährliche, u. s. w. Periode". Zuerst giebt der Verfasser eine Uebersicht über das bisher gebräuchliche Verfahren, eine solche periodische Function zu berechnen, nebst der von ihm für dasselbe in der Met. Zeitschr. 1885 vorgeschlagenen Verbesserung. Da die Berechnung nach der Methode des Verfassers ziemlich mühsam ist, so modificirt er dieselbe jetzt, ohne von der Genauigkeit etwas einzubüssen, und vervollständigt sie ausserdem in so weit, dass bei jedem Falle das ganze gegebene Beobachtungsmaterial verwendet wird. Die Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass man die Berechnung der Mittelwerte nach der früher gegebenen Methode wiederholt und schliesslich durch Aufeinanderlegen aller so erhaltenen mittleren Perioden eine definitive mittlere Periode bildet.

Lp.

J. Kleiber. Ueber die Abrundungs-Fehler meteorologischer Zahlen. Met. Zeitschr. V. 432-440.

Der Verfasser zieht in den folgenden Worten das Ergebnis aus seinen Untersuchungen:

Kennt man drei Häufigkeitszahlen u_{-1}, u_0, u_1, so erhält man aus ihnen die Correction des mittleren Argumentes x_0 aus der Formel

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{8}\,\frac{u_1 - u_{-1}}{u_1 + u_0 + u_{-1}},$$

welche in dem Falle angewandt werden muss, wenn die einzelnen u sehr ungenau sind.

Sind die Häufigkeitszahlen ziemlich genau, so kann man statt (A) die Formel

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{24}\,\frac{u_1 - u_{-1}}{u_0}$$

benutzen.

Will man die Correction aus fünf Werten von u berechnen, so nehme man

$$\frac{1}{24}\,\frac{2u_2 + u_1 - u_{-1} - 2u_{-2}}{u_2 + u_1 + u_0 + u_{-1} + u_{-2}}$$

oder

$$\frac{1}{120u_0}(2u_2+u_1-u_{-1}-2u_{-2}),$$

je nachdem diese als ungenau oder als genau anzusehen sind.

Lp.

P. Schreiber. Zur Frage der Herleitung wahrer Tagesmittel der Lufttemperatur aus drei- resp. viermaligen Beobachtungen. Met. Zeitschr. V. 259-269.

Ueberlegungen, die sich auf Gründe praktischer Natur stützen und zu empirischen Formeln führen. Lp.

N. Ekholm. Ueber einige Methoden für Wolkenmessungen. Met. Zeitschr. V. 125-132.

1. Bestimmung der Zugrichtung und projicirten Geschwindigkeit der Wolken nach einer Methode, welche sich an die des Hrn. Vettin anschliesst (Met. Zeitschr. 1883). 2. Directe Messung der Höhe und absoluten Bewegung der Wolken durch zwei Beobachter, die telephonisch mit einander verbunden sind, an den Endpunkten einer Standlinie. Lp.

G. Egidi. Intorno alla direzione e velocità delle nubi ed alla correzione del barometro. Rom. Acc. P. d. N. Linc. XL. (1887.) 151-159.

Der Verfasser hat ein eigenes Instrument für messende Wolkenbeobachtungen construirt, mit Hülfe dessen er die Geschwindigkeit der Fortbewegung sowohl absolut, als auch besonders dann, wenn die Höhe dieser Gebilde über dem Erdboden bekannt ist, zu bestimmen unternimmt. Die Methoden selbst stützen sich auf einfache trigonometrische Sätze und bieten nichts wesentlich Neues; die eine derselben ist keine andere, als die in Deutschland wohlbekannte Prestel'sche. Anhangsweise wird eine Formel entwickelt, um aus der Höhendifferenz zweier Orte A und B, die als bekannt angenommen wird, sowie aus dem

gleichfalls bekannten Luftdrucke der Station *A* die Höhe des Barometerstandes für *B* zu berechnen. Gr.

O. FRÖLICH. Ueber das Gesetz der Absorption der Sonnenwärme in der Atmosphäre. Met. Zeitschr. V. 382-390.

Sowohl aus den theoretischen Ueberlegungen als auch aus den Messungen, welche zur Bestätigung der erhaltenen Formeln angestellt wurden, ergiebt sich das folgende Resultat: „Das Absorptionsgesetz der gesamten Sonnenwärme bei klarem Himmel ist, bis auf etwa 10° Sonnenhöhe, dasselbe wie bei dem einfachen Strahl, also von der Form einer einfachen Exponentialgrösse

$$W = S \, . \, e^{-a\zeta},$$

wo S die an der Grenze der Atmosphäre, W die auf der Erde anlangende Wärmemenge, ζ das Wegeverhältnis, α ein mittlerer Absorptionscoefficient; die Höhe der Atmosphäre ist hierbei auf etwa 1/80 des Erdradius anzunehmen“. Lp.

W. ZENKER. Ueber die Absorption der Sonnenwärme in der Atmosphäre. Met. Zeitschr. V. 481-482.

Einwände gegen die der Verhältniszahl ζ zu Grunde gelegte Vorstellung in der Arbeit des Herrn Frölich und daher gegen die Ergebnisse seiner Arbeit. Lp.

V. WELLMANN. Ueber die Wärmestrahlung der Sonne auf die Erde. Met. Zeitschr. V. 441-442.

Kurze Berechnung ohne Berücksichtigung aller störenden Einflüsse und ohne Bezugnahme auf frühere Arbeiten. Lp.

H. v. HELMHOLTZ. Ueber atmosphärische Bewegungen. Berl. Ber. 647-663, Met. Zeitschr. V. 329-340.

Die Untersuchung des Einflusses der Reibung auf die grossen

Circulationen der Atmosphäre ergiebt, dass die Wirkungen der Reibung an der Erdoberfläche für die höheren Luftschichten sehr unbedeutend sein müssten. Die Vernichtung lebendiger Kraft durch Reibung kann hauptsächlich nur an der Bodenfläche und den bei Wirbelbewegungen vorkommenden Trennungsflächen geschehen. Ebenso ist der Einfluss der Wärmeleitung auf die Temperaturänderungen der oberen und unteren Luftschichten ein äusserst geringer, und, ausser an den erwähnten Grenzflächen, wird für den Wärmeaustausch fast ausschliesslich Strahlung und Convection der Wärme durch Luftbewegung in Betracht kommen. — Andererseits würde nun aber die Annahme einer ungehemmten Circulation zu ungeheuren Windgeschwindigkeiten führen: z. B. Luft, die auf dem Aequator ruht, würde in den Breiten von 20° und 30° als Westwind mit der Geschwindigkeit 57,63 und 133,65 m auftreten müssen, was also weit über die beobachteten Werte hinausgeht. Es entsteht somit die Frage: wodurch wird die Geschwindigkeit der Luftmassen in der Passatzone gehemmt?

Zur Erledigung dieser Frage entwickelt der Verfasser die hydrodynamischen Gleichungen für rotirende Luftringe und untersucht das Gleichgewicht aneinander stossender Schichten von verschiedenen Werten des Wärmegehalts und des Rotationsmoments. Unter „Wärmegehalt" ist die später als „potentielle Temperatur" bezeichnete absolute Temperatur zu verstehen, die die Luftmenge annimmt, wenn sie adiabatisch auf den Normaldruck gebracht wird. Es zeigt sich nun, dass das Gleichgewicht stabil ist, wenn die „wärmehaltigeren" Schichten in der Richtung nach dem Himmelspole zu höher liegen. Im normalen Falle muss dazu die Tangente des Meridianschnittes der Grenzfläche das Himmelsgewölbe zwischen dem Pole und dem darunter liegenden Punkte des Horizontes schneiden. Es können aber auch abnorme Fälle vorkommen, in denen jene Tangente den grösseren, vom Pole ab gerechneten Meridianbogen schneiden muss. Je kleiner die Temperaturdifferenz im Verhältnis zur Differenz der Rotationsgeschwindigkeiten, desto näher kommt die genannte Tangente dem Pol.

Discontinuitäten der betrachteten Art treten nun z. B. auf, wo die Passatwinde in die Calmenzone eindringen, oder an dem vorderen Rande der in wärmere Zonen vorrückenden polaren Ostwinde. Dort werden die Passate sich mit der Luft der Calmenzone verschmelzen und deren Masse vermehren, so dass diese oben sich mehr und mehr seitlich ausbreiten muss. Dabei werden ihre Ränder, die das grosse Rotationsmoment der äquatorealen Luft haben, in unmittelbare Berührung treten mit den unterliegenden Schichten von geringerer Temperatur und geringerer Rotationsgeschwindigkeit. Solche discontinuirlichen Bewegungen müssen sich nun früher oder später in Wirbel auflösen, die zu ausgedehnten Vermischungen beider Schichten führen. Der Vorgang ist ähnlich der Erregung von Wasserwogen durch den Wind, er kann sichtbar werden durch gestreifte Cirruswolken, und der Erfolg ist Mischung der beiden Schichten mit Wirbelbildung und unter Umständen mit starken Niederschlägen.

In solchen Vermischungen sieht der Verfasser die hauptsächlichste Ursache für die Hemmung der Circulation unserer Atmosphäre. Sbt.

W. v. Bezold. Zur Thermodynamik der Atmosphäre. Berl. Ber. 485-522, 1189-1206.

In den vorliegenden Untersuchungen wird auf die Voraussetzung adiabatischer Zustandsänderungen, die bisher bei den Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf atmosphärische Vorgänge üblich war, verzichtet. Zur Versinnlichung der Erscheinungen bedient sich der Verfasser der von Clapeyron eingeführten graphischen Methode, unter Berücksichtigung der Erweiterungen, die durch das Auftreten von mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen bedingt sind. Bei meteorologischen Problemen hat man es ja mit einem Gemisch aus Luft und Wasser zu thun. Der Verfasser betrachet nun die Masseneinheit trockener Luft als gegeben und behandelt das Wasser in den verschiedenen Formen des ungesättigten oder gesättigten Dampfes, des tropfbar flüssigen Wassers und Eises als eine hinzugefügte veränderliche Beimischung. Er unterscheidet bei der Verfolgung

der von diesem Gemisch durchlaufenen Zustände ein Trocken-, Regen-, Hagel- und Schneestadium. Von einem Stadium zum anderen muss die Masse des Gemisches abnehmen infolge der entstehenden Niederschläge, und es handelt sich hier um Vorgänge, die wohl in den kleinsten Teilen umkehrbar, im ganzen aber nicht umkehrbar sind. Die allgemeine Form der Zustandsgleichungen für die verschiedenen Stadien ist $f(v, p, t, x) = 0$; dabei ist p der Druck, gemessen in kg auf 1 qm, und v das Volumen der Masse M, die gleich $1+x$, nämlich gleich der Summe aus der Masseneinheit trockener Luft und der beigemischten Menge Wasserdampf ist (x' und x'', die Mengen des beigemischten flüssigen und festen Wassers, sind im allgemeinen so klein, dass sie auf p und v keinen Einfluss äussern). Bei der geometrischen Darstellung wird x als dritte Coordinate senkrecht zur pv-Ebene aufgetragen; bei der Betrachtung der Zustandsänderungen kann man sich aber einfach an die Linie halten, die die Projection des repräsentirenden Punktes auf die pv-Ebene beschreibt.

Nachdem für die verschiedenen Stadien der Verlauf der charakteristischen Linien, insbesondere der Isothermen und Adiabaten, eingehend untersucht ist, wird gezeigt, wie man für beliebige (nicht adiabatische) Zustandsänderungen auch hier bei Anwendung gewisser Kunstgriffe im Stande ist, durch eine Verbindung von Rechnung und planimetrischer Messung die ausgetauschten Wärmemengen zu ermitteln.

Das entwickelte Verfahren wird angewandt auf den Föhn, auf den Luftaustausch zwischen Cyklone und Anticyklone im Sommer und ebendenselben im Winter.

Die zweite Mitteilung betrifft hauptsächlich den von Herrn v. Helmholtz (in der S. 1274 besprochenen Abhandlung) eingeführten Begriff der potentiellen Temperatur, d. h. derjenigen absoluten Temperatur, die ein Körper annimmt, wenn er adiabatisch (oder pseudoadiabatisch) auf den Normaldruck gebracht wird. („Pseudoadiabatisch“ heisst nämlich nach dem Verfasser ein Vorgang, wenn das bei der Condensation gebildete Wasser ganz oder teilweise herausfällt, ein Vorgang also, bei dem Wärme

weder zugeführt noch entzogen, bei dem aber nicht der ganze Verlust an Energie in äussere Arbeit verwandelt wird). Es wird gezeigt, wie die potentielle Temperatur ihre graphische Darstellung findet, und es wird demnächst der Satz bewiesen: Adiabatische Zustandsänderungen in freier Atmosphäre — unter Ausschluss der Verdunstung — lassen entweder die potentielle Temperatur ungeändert oder erhöhen dieselbe (je nachdem nämlich das Trockenstadium nicht verlassen oder aber Wasser ausgeschieden wird). Aus diesem Satze werden nun Folgerungen gezogen für den verticalen Temperaturgradienten, insbesondere für die Abweichungen desselben von dem bekannten Werte 0,993. und für die sogenannte zusammengesetzte Convection, d. i. eine Wärmeübertragung, bei der neben dem Transporte erwärmter oder abgekühlter Körper noch Aenderungen des Aggregatzustandes ins Spiel kommen. Diese bewirkt, dass die Temperatur im anticyklonalen Gebiete stets höher ist, als dies bei einfacher Uebertragung der Fall wäre. Sbt.

A. Oberbeck. Ueber die Bewegungserscheinungen der Atmosphäre. Berl. Ber. 383-395, 1129-1138; Met. Zeitschr. V. 305-310.

Es sind die von Hrn. W. Siemens in dem Aufsatz „Die Erhaltung der Kraft im Luftmeere der Erde" (Berl. Ber. 1886, F. d. M. XVIII. 1064) behandelten Fragen mathematisch weiter verfolgt, und zwar im ersten Teile die Berechnung der Luftströmungen, im zweiten die entsprechenden Untersuchungen der Druckverteilung.

1. Teil: Nachdem die Factoren, von welchen die Bewegung der Atmosphäre abhängt, zusammengestellt und die Art und Weise, wie dieselben in die Rechnung eingeführt sind, besprochen worden ist, leitet Verfasser zunächst auf Grund der Hauptbewegungsgleichungen eine Formel für die Abnahme des Luftdruckes in grösseren Höhen und darauf, indem er den von der geographischen Lage des Ortes abhängigen Teil der Temperatur in eine Reihe nach Kugelfunctionen entwickelt, die Formel für die Ver-

icalcomponente und diejenigen für die beiden Horizontalcomponenten ab. Am Ende sind dann die sich hiernach ergebenden Strömungen noch übersichtlich besprochen.

2. Teil: Da die an der Erdoberfläche vorkommenden grössten Druckunterschiede den Temperaturunterschieden nicht entsprechen, so erklärt man dies durch die Bildung von Strömungen, wofür Verfasser die Begründung giebt; weiter zeigt er, dass aus den beobachteten Werten des Druckes ein Schluss auf die Intensität der Luftströmungen gezogen werden kann. Der Artikel in der Met. Zeitschr. ist ein Selbstreferat des Verfassers, das zuerst in der Naturwissenschaftlichen Rundschau vom 9. Juni 1888 erschienen ist. P.

F. ROTH. Die Anwendbarkeit der Gleichung der lebendigen Kraft auf die Luftwirbel. Met. Zeitschr. V. 34-36.

Der Verfasser sucht die Frage zu beantworten: „Gilt die Gleichung der lebendigen Kraft für ein freies Teilchen, das längs der Erdoberfläche ohne Reibung gleitet, wenn es dabei von einer Kraft getrieben wird, welche überall parallel zu letzterer nach einem mit derselben fest verbundenen Punkte hin anziehend oder von ihm aus abstossend wirkt, und bleibt diese Gleichung auch dann noch bestehen, wenn die Umdrehung der Erde um ihre Axe berücksichtigt wird?“ Während natürlich die Antwort bejahend ausfällt, glaubt Herr R. für die Luftwirbel einen anderen Schluss ziehen zu müssen: „Wird die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt beachtet, so gilt unter den Voraussetzungen unserer Aufgabe die Gleichung der lebendigen Kraft nur dann, wenn der Sitz der Anziehung oder Abstossung ein Nabelpunkt ist.“ Für den Ref. ist die Beweisführung jedoch unklar und nicht überzeugend. Lp.

M. MÖLLER. Ueber Verluste an äusserer Energie bei der Bewegung der Luft. Met. Zeitschr. IV. 318-324.

Einen wesentlichen Verlust dieser Art erleidet bewegte Luft durch Reibung am Erdboden, sowie durch Mischung und Zu-

sammenstoss der sich in entgegengesetzten Richtungen bewegenden Luftmassen. Dies wird durch Rechnungen, unter Zugrundelegung der für den Stoss unelastischer Körper geltenden Gesetze, im einzelnen ausgeführt. Aus den so erhaltenen Resultaten glaubt der Verfasser gewichtige Einwürfe gegen die von Ferrel und Werner Siemens hinsichtlich der grossen atmosphärischen Circulation aufgestellten Theorien ableiten zu können. Gr.

G. Petit. Expériences de M. Ch. Weyher sur les tourbillons aériens et les sphères tournantes. Gén. Civ. XI.

Besprechung der Experimente von Weyher zur Nachahmung der Wirbelwinde und der damit zusammenhängenden meteorologischen Erscheinungen. Bezüglich der Einzelheiten der allerdings vornehmlich in physikalischer Beziehung interessanten Abhandlung muss auf die letztere selbst verwiesen werden.

F. K.

A. Sprung. Ueber die verticale Abnahme des Luftdruckes und der Temperatur. Met. Zeitschr. V. 460-470.

Nimmt man an, dass die Temperatur in verticaler Richtung überall dieselbe sei, so ist das Gesetz der verticalen Druckabnahme dasjenige der geometrischen Progression mit der Höhe $p = p_1 e^{-\lambda h}$, ein Fall, der im Winter bei anticyklonalem Wetter nicht selten vorkommt. Sollen die Luftdruckwerte dagegen eine arithmetische Reihe bilden, so muss die Temperatur für je 100 m Steigung 3,42° Abnahme erfahren, wie es bei heissem Sommerwetter auf kleine Strecken zuweilen vorkommt. Beide Fälle sind in der allgemeinen Annahme begriffen, dass die Temperatur eine lineare Function der Höhe ist, $T = T_1 - \Theta.h$, wobei dann folgt

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{T_1 - \Theta h}{T_1}\right)^\mu, \quad \mu = \frac{g}{R\Theta}, \quad R = 29{,}272.$$

Eine weitere kritische Betrachtung wird an dem ungenauen Satze geübt, dass die dynamische Erwärmung oder Abkühlung in trockener Luft für je 100 m Senkung oder Hebung den Betrag

von 0,993° habe; den Bemerkungen entsprechend ist eine Stelle in dem Lehrbuche des Verfassers abzuändern. Zuletzt wird noch die Annahme kurz erwogen, nach welcher die Temperatur als lineare Function des Luftdrucks auftritt:

$$T = D+(T_1-D)\frac{p}{p_1}.$$

Lp.

Linss. Ueber die Geschwindigkeit aufsteigender Luftströme. Met. Zeitschr. V. 37-39.

Ist H die verticale Dicke der den Niederschlag liefernden Wolkenschicht, r die absolute Niederschlagsdichte (Niederschlagshöhe in Millimetern pro Stunde), so berechnet der Verfasser für die fragliche Geschwindigkeit einen Minimalwert in Metern:

$$v_m = \frac{r}{34,889\,(0,260-0,0242\,H)H}.$$

Lp.

L. Sohncke. Gewitterelektricität und gewöhnliche Luftelektricität. Met. Zeitschr. V. 413-425.

Ergänzungen zu der Schrift des Verfassers über den Ursprung der Gewitterelektricität (Jena. Fischer. 1885) und der gewöhnlichen Elektricität der Atmosphäre nebst Widerlegungen der Bedenken und Einwürfe, welche gegen dieselbe erhoben worden sind. Lp.

W. König. Ueber den Druck in Wasserbläschen. Met. Zeitschr. V. 109-110.

Berichtigung der Angaben des Hrn. v. Obermayer in Met. Zeitschr. 1877, wo viel zu grosse Werte gefunden sind. Hr. K. berechnet den Capillardruck h für Bläschen vom Radius r für

r = 0,01, 0,001, 0,0001 cm:
h = 0,029, 0,29, 2,9 Atmosphären.

Aus diesen geringen Zahlen schliesst der Verf. weiter, dass die Kiessling'schen Versuche entscheidend sind über die Natur der Nebelkörperchen als homogener Flüssigkeitstropfen. Man vergleiche über den Gegenstand auch die Notizen von Kurz (Exner Rep. XIX. 339-341, 822) und A. König (Berl. phys. Ges. Verh. 1883. 52-55). Lp.

G. Grassi. Sul calcolo della temperatura di regime negli essiccatoi. Nuovo Cimento (3) XXIII. 123-138.

Anhang.

W. LÁSKA. Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. Braunschweig. Vieweg und Sohn. Erste Lieferung. (1888.) 1-296; zweite Lieferung. (1889.) 297-576; dritte Lieferung, erste Abteilung (1889.) 577-776.

Nach der Ankündigung des Werkes auf der Rückseite des Umschlags soll die vorliegende Sammlung von Formeln, Lehrsätzen und Begriffen der reinen und angewandten Mathematik und Physik dem Mathematiker und Physiker alles dasjenige bieten, was man als gesicherten Besitz dieser Wissenschaften ansehen kann; nebenbei wird sie als Uebungsbuch und Literaturrepertorium empfohlen. Die erste Lieferung enthält die Algebra, Arithmetik, algebraische Analysis, die Differential- und Integral-Rechnung; die zweite bringt die Functionentheorie und die Geometrie. In der dritten sind die Astronomie, die Mechanik und die physikalischen Wissenschaften behandelt, und es soll noch ein vollständiges Sach- und Namenregister geliefert werden.

Die Sichtung des aufzunehmenden oder auszuschliessenden Stoffes ist natürlich sehr schwierig und wird an vielen Stellen von persönlichen Ansichten abhängen. Herr Carr hat zu seiner äusserst sorgfältig gearbeiteten „Synopsis of pure Mathematics" (London, 1886, 935 S.), einem Werke ähnlicher Tendenz, das aber zu den Sätzen und Formeln auch Andeutungen der Beweise hinzufügt, die Materialien während voller zwanzig Jahre zusammengetragen und sich bei der Auswahl durch die Rücksichten auf die Bedürfnisse seiner Schüler leiten lassen; dieser

Umstand hat den einheitlichen Charakter seines Buches gefördert. und die langjährige Kontrolle ist der correcten Herstellung dienlich gewesen. Dem vorliegenden Werke dagegen ist die Abwesenheit eines derartigen festen Gesichtspunktes anzusehen. Wenn schon geeignete Sammlungen vorlagen, wie z. B. in den Integraltafeln von Meier Hirsch und Minding, oder in den Werken über elliptische Functionen (besonders von L. Königsberger), so hat der Verfasser eine grosse Menge von Formeln abdrucken lassen; in anderen Gebieten jedoch, wo solche zusammenfassenden Uebersichten nicht zur Hand waren, sticht jener reichen Fülle gegenüber die hier herrschende Dürftigkeit um so mehr ab. Die ganze moderne Theorie der algebraischen Formen mit ihrem Formelreichtum an Invarianten, Covarianten u. dgl. m., die Anwendung derselben auf die Functionentheorie und Geometrie ist nirgends erwähnt, als ob Clebsch und Faà di Bruno keine bezüglichen Lehrbücher mit „Formeln, Lehrsätzen und Begriffen" geschrieben hätten. Die neuere synthetische Geometrie wird gar nicht berührt, obgleich doch auch in ihr z. B. die Sätze über das Doppelschnittverhältnis und überhaupt über die Verwandtschaften oder gar die Zahlen der abzählenden Geometrie „als gesicherter Besitz dieser Wissenschaft" angesehen werden können und in tabellarischer Form oder in kurzer wörtlicher Fassung sich zur Darstellung eignen. Dass die Theorie der hyperelliptischen und Abel'schen Functionen nebst den sich anschliessenden Transcendenten auch nicht berücksichtigt ist, kann danach nur natürlich erscheinen. — Aber auch wenn man sich auf den vom Verf. ausgewählten Stoff beschränkt, so drängt sich bei genauerer Prüfung die Vermutung auf, dass die Veröffentlichung erfolgt ist, bevor das Ganze sorgfältig durchgearbeitet war.

Wenn eine solche Sammlung brauchbar sein soll, so muss sie vor allen Dingen correct sein; erfüllt sie diese Anforderung nicht, so ist sie ein unzuverlässiges, ja schädliches Werkzeug, wie etwa eine fehlerhafte Logarithmentafel. Sobald nun der Ref. an beliebigen Stellen genauer zu prüfen anfing, so fand er Ungenauigkeiten und Fehler aller Arten, nämlich 1) Druckfehler, 2) Ver-

wirrung in der Bezeichnung, 3) sachliche Fehler. Einige Proben mögen dies Urteil bestätigen.

Auf Seite 233 stehen die Cotesischen Formeln zur mechanischen Quadratur: Vier Druckfehler: $\frac{7}{80}$ statt $\frac{7}{90}$ in Zeile 2, $\frac{35}{36}$ statt $\frac{25}{36}$ in Zeile 3, $\frac{2089}{17280}$ statt $\frac{2989}{17280}$ in Zeile 7, eine falsche Klammer in Zeile 12. Statt das Integrationsintervall, wie sonst üblich, von 0 bis h zu nehmen, hat der Verfasser die obere Grenze bei 3, 4, 5, ..., 10 Ordinaten mit $3h$, $4h$, ..., $10h$ bezeichnet. Die abgedruckten Formeln sind aber die für die obere Grenze h; nur bei der für 3 Ordinaten ist der Factor $3h$ hinzugesetzt, bei allen anderen fehlen die bezüglichen Factoren $4h$, $5h$, ..., $10h$.

Gleich dahinter auf Seite 237 stehen unter (10) und (11) zwei bestimmte Integrale, von denen das erste nicht auf die einfachste Gestalt gebracht, das zweite sowohl durch Vergleich mit dem ersten als auch mit denen unter (8) und (9) als unrichtig erkennbar ist. Sie lauten:

$$(10) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{1-2x\cos\lambda+x^2} = \frac{1}{\sin\lambda} \operatorname{arctg} \frac{\sin\lambda}{1-\cos\lambda},$$

$$(11) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\lambda+x^2} = \log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right),$$

während ihre Werte resp. $\frac{\pi-\lambda}{2\sin\lambda}$ und $\frac{\lambda}{2\sin\lambda}$ sind.

In der sphärischen Trigonometrie wird S. 440 festgesetzt, dass α, β, γ die Winkel und a, b, c ihre Gegenseiten im sphärischen Dreieck bezeichnen sollen. Auf S. 441 wird in den Formeln (1) bis (4) diese Bedeutung festgehalten [in (2) steht $\sin b$ statt $\sin\beta$]; dagegen muss man in den Formeln (5) und (8) unter α, β, γ die Seiten und unter a, b, c die Winkel verstehen, wenn sie richtig sein sollen.

Ganz unerklärlich sind manche Verstösse gegen allgemein bekannte Sätze. Auf Seite 407 - 408 löst der Verf. zur Trisection eines Winkels die kubische Gleichung $4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha + \sin 3\alpha = 0$ für $\sin\alpha$ nach der Cardanischen Formel, von der ja doch bekannt ist, dass sie in diesem Falle imaginär wird

und daher für das Problem unbrauchbar ist. Indem nicht weniger als drei Fehler gemacht werden, ergiebt sich $\sin\alpha$ aus ihr reell.

Auf Seite 35 steht richtig: Die Reihen

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \cdots,$$
$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots$$

sind divergent. „Es ist vielleicht ratsam, auf einige divergente Reihen aufmerksam zu machen.“ Diese Warnung ist auf Seite 414 vergessen. Dort liest man unter (40):

$$\frac{1}{2\sin\varphi} = \sin\varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \cdots,$$
$$-\frac{1}{2^2\sin^2\varphi} = \cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + 3\cos 6\varphi + \cdots,$$
$$-\frac{1}{2^3\sin^3\varphi} = \sin 3\varphi + 3\sin 5\varphi + 6\sin 7\varphi + \cdots.$$

Danach kann man sich wohl nicht wundern, auf S. 46 zu finden:

$$(4)\qquad 1 = 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \cdots,$$

$$(5)\qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{2}} = 1 - \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \cdots,$$

Ungeheuerlichkeiten, deren Unmöglichkeit sogar jedem Nichtmathematiker sofort einleuchtet.

Zum Schlusse kann Ref. nur sein Bedauern aussprechen, dass die Mühe und Arbeit, welche der Verf. offenbar aufgewandt hat, nicht von einer sorgfältigeren Prüfung vor dem Drucke und von einem schärferen Auge während desselben begleitet gewesen sind. Lp.

H. C. E. Martus. Mathematische Aufgaben zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. 7. Aufl. Teil I: Aufgaben. Leipzig. XVI + 210 S.

P. T. Foldberg. Mathematiske Examenopgaver fra Adgangsexamen til Polyteknisk Laereanstalt og Afgangsexamen for Stoderende i aarene 1875—1888. Kjöbenhavn. 55 S. 8°.

J. M. Dyer and R. Prowde-Smith. Mathematical examples pure and mixed. Cambridge. VIII + 322 S.

P. D. Michaud. Vademecum du mathématicien. Manuel comprenant les règles de calcul, méthodes, formules et tables nécessaires pour les exercices de mathématiques élémentaires. No. 1. Recueil d'arithmétique. Paris. 77 S. 12°.

D. Biddle. A brief explanation of the advantages to be derived from using the „Aid to approximate calculation“. Ed. Times XLVIII. 125-136.

Auf der einen Hälfte eines Bogens, betitelt „An aid to approximate calculation, prepared by D. Biddle“, hat der Verfasser die sechsstelligen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 999, auf der zweiten eine ähnliche Tafel der Antilogarithmen zusammengestellt. Drei Vorteile dieser Einrichtung hebt er hervor: 1) Die Tafel wird mit einem Blicke übersehen und erfordert kein Umblättern. 2) Die Umwandlung der Zahlen in Logarithmen und die Auflösung der Logarithmen in Zahlen geschehen durch dasselbe Verfahren, nur auf verschiedenen Teilen des Bogens. 3) Die verlangten Ziffern bei jeder Aufsuchung werden fast augenblicklich gefunden, vermöge der Einteilung in Systeme, Columnen und Reihen. Um den Leser von dem Nutzen der Einrichtung zu überzeugen, geht Hr. Biddle folgende Aufgaben durch und erläutert sie durch einzelne durchgerechnete Beispiele: A. Den Logarithmus der Summe oder Differenz zweier Zahlen zu finden, deren bezügliche Logarithmen man besitzt; ohne von den Logarithmen auf die Zahlen zurückzugehen. B. Bei Gleichungen höheren Grades, von denen eine Wurzel gegeben ist, eine zweite zu finden. C. Bei Gleichungen höheren Grades die Wurzeln unabhängig von einander zu berechnen. D. Multi-

plicationen vielstelliger Zahlen auszuführen. E. Divisionen bei vielstelligen Zahlen auszuführen. F. Quadratwurzeln aus grossen und kleinen Zahlen auszuziehen. Lp.

A. M. Nell. Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen u. s. w. 6. Aufl. Darmstadt. XIX + 104 S. 8°.

L. Schrön. Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 2—108000 und der Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten u. s. w. Neue Ausgabe. Tafel I u. II. XXIV + 474 S. gr. 8°. Tafel III. VI + 76 S. Braunschweig.

P. André. Nouvelles tables de logarithmes à sept décimales etc. 3. tirage. Edition stéréotype. Paris. 12 + 14 + 94 S.

Lalande. Tables de logarithmes pour les nombres et les sinus à cinq décimales. Nouvelle édition etc. Paris. Gauthier-Villars & Fils.

J. Blater. Table des quarts de carrés de tous les nombres entiers de 1 à 20000, etc. Publiée avec la collaboration de A. Steinhauser. Paris. Gauthier-Villars & Fils.

J. Blater. La multiplication et la division rendues rapides et faciles par la Table de calcul etc. Avec la collaboration de A. Steinhauser. Paris. Gauthier-Villars & Fils.

Vergl. F. d. M. XIX. 1887. 1235. Ausser der französischen Ausgabe ist in London auch eine englische erschienen.

G. Bernardi. Tavole dei quadrati e cubi dei numeri interi da 1 a 1000. Parma. VIII + 87 S.

Th. Sloudsky. Wissenschaftliche Arbeiten von A. W. Letnikoff. Mosk. Math. Samml. XIV. 24 S. (Russisch.)

Das zweihundertjährige Jubiläum des Erscheinens von Newton's Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Reden, gehalten in der gemeinsamen Sitzung der Kaiserlichen Gesellschaft der Naturkunde, Anthropologie und Ethnographie und der Moskauer Mathematischen Gesellschaft, den 20. December 1887 von den Professoren Joukowsky, Stoletow, Cerassky und Zinger. Moskau. 1888. 1-51. (Russisch.)

N. Umoff. Dem Andenken Clerk Maxwell's. Gedächtnisrede, gehalten am Jahresacte der Universität Odessa. 1888. 50 S. 1 Figurentafel. (Russisch.)

Frömter. Lehrbuch der Grundrechnungsarten, Teil von Kleyer's Encyklopädie. Stuttgart. J. Maier.

Die Bücher von Kleyer's Encyklopädie wollen auch die sämtlichen mathematischen Wissenschaften nach jener Vorschul-Methode lehren, welche den gesamten Stoff in Tausende von Fragen und Antworten zerstückelt, und welche, da jede Frage vorschriftsmässig mit einem „W" anzufangen hat, die „W-Methode" genannt werden könnte. Es ist fraglich, ob überhaupt ein nach der W-Methode verfasstes Lehrbuch eine Besprechung in einem Jahrbuch über die Fortschritte einer Wissenschaft verdient. Das vorliegende Lehrbuch der vier Species mit unbenannten Zahlen darf aber auch wohl, des Inhalts wegen, hier nicht näher besprochen werden. Scht.

R. Mehmke. Dö kuläd kalamas. Volapükagazed, 1888. Wien.

In einer österreichischen Weltsprachezeitung (Volapükagazed) hat Herr Mehmke eine Notiz „Ueber die Genauigkeit beim Rechnen" veröffentlicht, in welcher die Unsicherheit des Rechenergebnisses bestimmt wird, wenn die Unsicherheit der der Rechenoperation zu Grunde gelegten Zahlen bekannt ist. Ist die Unsicherheit der Zahl a gleich α, d. h. liegt der wahre Wert von a zwischen $a+\alpha$ und $a-\alpha$, so wird der Quotient $\frac{\alpha}{a}=\alpha'$ die „relative Unsicherheit" genannt. Bezeichnet man ferner die Unsicherheit einer zweiten Zahl b mit β und ihre relative Unsicherheit mit β', so liegt die relative Unsicherheit ihrer Summe

$a+b$ zwischen α' und β'; die relative Unsicherheit der Differenz $a-b$ liegt zwischen $\frac{a+b}{a-b}\alpha'$ und $\frac{a+b}{a-b}\beta'$. Für das Product ab und den Quotienten $a:b$ ergiebt sich bei Vernachlässigung von $\alpha'\beta'$, α'^2 u. s. w. die relative Unsicherheit $\alpha'+\beta'$. Ist die Unsicherheit von $\log a$ gleich α, so ist die relative Unsicherheit von a gleich $\alpha . \operatorname{lognat} 10 (= \alpha . 2,30 \ldots)$. Scht.

R. Mehmke. Teorems nulik dö kolienat. Nunel valemik. Specimen number. London.

J. Kres. Der Gebrauch des Rechenstabes bei perspectivischen Zeichnungen. Centralbl. d. Bauverw. VII. 253-254.

M. Sibiriakoff. Éléments des Mathématiques. St. Petersburg. A. Deubner.

Bemerkungen über die Null, die negativen und imaginären Zahlen und die quadratischen Gleichungen, darunter in § 3 einiges Unverständliche oder Irrtümliche über die vielfachen Werte einer Wurzel. Am Schluss wird das in der Budan'schen Transformationsmethode der algebraischen Gleichungen geltende Gesetz der Coefficientenbildung dargelegt. Schg.

Th. Harmuth. Textgleichungen geometrischen Inhalts. Berlin. J. Springer.

Vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 55.

W. J. C. Sharp. On simplicissima in space of n dimensions. Lond. M. S. Proc. XIX. 423-482.

Schluss zu dem Aufsatze, über den F. d. M. XIX. 1887. 837 berichtet ist.

E. Neovius. Ueber eine specielle geometrische Aufgabe des Minimums. Math. Ann. XXXI. 359-362.

Abdruck aus Gött. Nachr. 1887 (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 716).

E. Riecke. Ueber die scheinbare Wechselwirkung von Ringen, welche in einer incompressiblen Flüssigkeit in Ruhe sich befinden. Math. Ann. XXXII 203-213.

Abdruck aus Gött. Nachr. 1887 (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 988).

A. Brill. Ueber die Modellsammlung des mathematischen Seminars der Universität Tübingen. Böklen Mitt. II. 7 S.

A. Brill. Das mathematisch-physikalische Seminar. Sonderdruck aus: Die unter der Regierung seiner Majestät des Königs Karl an der Universität Tübingen errichteten und erweiterten Institute der Naturwissenschaftlichen und der Medizinischen Facultät. Tübingen. Laupp. 4 S. gr. 4°.

Ausser den durch die Verlagsbuchhandlung von Brill in Darmstadt in den Handel gekommenen Modellen besitzt das Tübinger Seminar neben Fadenmodellen von Flächen zweiter Ordnung mehrere bisher noch nicht veröffentlichte Modelle und eine Reihe von Zeichnungen, welche sich auf einzelne Fragen der Theorie der ebenen Curven beziehen. Lp.

L. Brill. Katalog mathematischer Modelle. L. Brill. Darmstadt.

C. Crone. En engelsk Integrator. Zeuthen Tidss. (5) VI. 65-72.

Beschreibung der von Sir W. Thomson erfundenen Rechenmaschine „The harmonic analyser“ und ihrer Anwendung. V.

Namenregister.

Berichtigungen.

Seite 4 Zeile 19 zu Bologna Mem. zuzufügen VIII. 401-425.
„ 14 „ 9 von unten lies v. Staudt statt V. Staudt.
„ 21 „ 13 „ oben lies Jellett statt Jellet.
„ 37 „ 15 „ „ „ ricerche statt richerche.
„ 73 „ 7 „ unten „ J. für Math. statt Kronecker.
„ 76 „ 13 „ oben „ beschouwed statt beschouerd.
„ 80 „ 9 „ unten „ géométrique statt géométriques.
„ 83 lies zweimal Rom. Acc. L. Rend. statt Rom. Acc. S. Rend.
„ 92 Zeile 8 von oben lies legge statt leggi.
„ 148 „ 9 „ „ „ XXVI statt XXXI.
„ 172 „ 8 „ „ „ théorème statt theoréme.
„ 244 „ 4 „ unten „ Stolz statt Stoltz.
„ 274 „ 13 „ „ „ T. J. Stieltjes statt F. J. Stieltjes.
„ 292 „ 2 „ „ „ integral statt integration.
„ 554 und 811 lies Sharp statt Sharpe.
„ 567 Zeile 7 von unten lies V. Peschka statt v. Peschka.
„ 604 „ 16 „ oben „ sistemi statt systemi.
„ 649 „ 13 „ unten „ 1ª statt 1°.
„ 846 „ 6 „ oben „ construites statt construits.
„ 880 lies zweimal Geoghegan statt Gheoghegan.
„ 984 Zeile 7 von unten lies an statt on.
„ 1099 „ 9 „ „ „ heterogeneous statt heterogenuous.
„ 1136 „ 7 „ oben „ construite statt contruite.





